

# Mathématiques Financières

Licence 3

2021 - 2022

# 1 Capitalisation dans le moyen terme

## Exercice n°1

Un épargnant décide de déposer la somme  $C_1 = 1200$  € sur un compte rémunéré au taux d'intérêt annuel  $i_1 = 0.015$ , le 27 janvier 2020.

1.1. Quelle sera la valeur acquise au 27 janvier 2022 ?

D'après le cours, la valeur acquise au bout de  $n$  années  $V_n$ , avec un capital initial  $C$  et un taux d'intérêt  $i$  est :

$$V_n = C \cdot (i + 1)^n$$

Donc la valeur acquise  $V_2$  au 27 janvier 2022, 2 ans après est :

$$V_2 = 1200 \cdot 1.015^2 = \boxed{1236.27 \text{ €}}$$

1.2. Il pense pouvoir ajouter le 27 janvier 2021 un complément  $C_2 = 500$  €. Combien obtiendra-t-il le 27 janvier 2022 ?

On décompose les deux années en deux périodes :

**Période 1** : janvier 2020 → janvier 2021

Le capital de départ est toujours  $C_1$ . On ré-applique la formule sur 1 an donc avec  $n = 1$ , avec  $V_1$  le capital obtenu en janvier 2021 soit :

$$V_1 = C_1 \cdot (i + 1)^n = 1200 \cdot 1.015 = 1218.00 \text{ €}$$

**Période 2** : janvier 2021 → janvier 2022

Le nouveau capital de départ est  $V_1 + C_2 = 1218 + 500 = 1718$  €. Le taux reste inchangé, on ré-applique la formule pour trouver  $V_2$  acquis 1 an plus tard :

$$V_2 = (V_1 + C_2) \cdot (1 + i)^n = 1718 \cdot 1.015 = \boxed{1743.77 \text{ €}}$$

L'épargnant obtiendra donc 1743.77 €.

1.3. En se plaçant dans la situation précédente, quel devrait être le taux d'intérêt  $i_2$  pour obtenir une valeur acquise de 1773.25 € le 27 janvier 2022 ?

todo : à revoir On cherche à obtenir  $i$  en connaissance des autres termes d'après la formule générale soit :

$$V_n = C \cdot (i + 1)^n \implies i = \left( \frac{V_n}{C} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

On effectue l'application numérique :

$$i = \left( \frac{V_{acq}}{C} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

## Exercice n°2

Le capital  $C = 900$  € est immobilisé pendant 5 ans.

**2.1.** Avec un taux annuel d'intérêt  $i = 1.8\%$ , quel sera le montant disponible  $C_5$  à l'échéance ?

On raisonne de la même façon que pour l'exercice **1.1**.

$$C_5 = C \cdot (i + 1)^5 \implies C_5 = 900 \cdot 1.018^5 = \boxed{983.97 \text{ €}}$$

**2.2.** En fait, le taux d'intérêt annuel est égal à  $i_1 = 1\%$  les deux premières années et à  $i_2 = 2\%$  les trois dernières. Préciser quel sera le nouveau montant  $C'_5$  à la fin des 5 années.

todo: Blabla on divise en deux

$$\begin{aligned} C'_5 &= C \cdot (i_1 + 1)^2 \cdot (i_2 + 1)^3 \\ \implies C'_5 &= 900 \cdot 1.01^2 \cdot 1.02^3 = \boxed{974.28 \text{ €}} \end{aligned}$$

**2.3.** Quel taux annuel *moyen*  $i_{\text{moy}}$  pourrait-on associer à la deuxième situation ?

todo:

$$V_n = C \cdot (i + 1)^n \implies i = \left( \frac{V_n}{C} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

## Exercice n°3

Un investisseur se propose de verser annuellement auprès d'un organisme financier 12000 € du 01/01/2020 au 01/01/2023.

**3.1.** Préciser la valeur acquise,  $V_{acq}$ , au 01/01/2024 si le placement est rémunéré au taux annuel  $i = 0.75\%$ .

todo:

$$\begin{aligned} V_{acq}^{deb} &= a(i + 1) \cdot \frac{(i + 1)^n - 1}{i} \\ \implies V_{acq}^{deb} &= 12000 \cdot 1.0075 \cdot \frac{1.0075^4 - 1}{0.0075} = \boxed{48906.78 \text{ €}} \end{aligned}$$

**3.2.** Réalisant la difficulté de réunir en une seule fois la somme de 12000 €, il envisage de déposer mensuellement la somme de 1000 € à partir du 01/01/2020 et jusqu'au 01/12/2023.

**3.2.1** Quel est le taux mensuel  $i_m$  équivalent au taux  $i$  ? Le résultat sera donné

avec 6 chiffres après la virgule.

Le taux mensuel  $i_m$  se doit de vérifier, avec  $C$  capital de départ quelconque :

$$C(i_m + 1)^{12} = C(i + 1)$$

d'où

$$i_m = (i + 1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1.75^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.047739$$

Le taux mensuel  $i_m$  équivalent est de 0.047739.

**3.2.2** Déterminer la valeur acquise  $V_{acq}'$  de ces versements mensuels à la date 01/01/2024 lorsque les intérêts sont capitalisés au taux mensuel  $i_m$ . Que remarquerez-vous ?

Ma réponse

## 2 Actualisation dans le moyen terme

### Exercice n°4

Un capital de  $C = 5000$  € est disponible le 27 janvier 2023. Le taux d'actualisation  $\tau$  est fixé à 6.5% pour toutes les questions.

**4.1.** Déterminer la valeur actuelle, au 27 janvier 2020, de ce capital.

D'après le cours, on a, avec  $V_{act}$  la valeur actualisée,  $V_f$  le capital futur disponible,  $n$  le nombre d'années et  $\tau$  le taux d'actualisation :

$$V_{act} \times (\tau + 1)^n = V_f \implies V_{act} = \frac{V_f}{(\tau + 1)^n}$$

Ici on a  $V_f = C = 5000$  €.

On procède à l'application numérique :

$$V_{act} = \frac{5000}{(1.065)^3} = 4139.25 \text{ €}$$

La valeur actuelle de ce capital, au 27 janvier 2020, est donc 4139.25 €.

**4.2.** Quand serait-il disponible si sa valeur actuelle à la date du 27 janvier 2020 était égale à 3 217.53 € ?

On cherche ici à exprimer  $n$ , le nombre d'années, en fonction des autres paramètres. Reprenons la formule :

$$\begin{aligned} V_{act} = \frac{V_f}{(\tau + 1)^n} &\implies (\tau + 1)^n = \frac{V_f}{V_{act}} \implies n \ln(\tau + 1) = \ln\left(\frac{V_f}{V_{act}}\right) \\ &\implies n = \frac{\ln(V_f) - \ln(V_{act})}{\ln(\tau + 1)} \end{aligned}$$

On effectue l'application numérique :

$$n = \frac{\ln(5000) - \ln(3217.53)}{\ln(1.065)} = \boxed{7.00 \text{ ans}}$$

Le capital serait dans ce cas disponible 7 ans plus tard.

## Exercice n°5

Une entreprise étudie les deux investissements ci-dessous :

Années	0	1	2	3
Projet 1	-70000	30000	45000	40000
Projet 2	-60000	15000	40000	50000

**5.1.** Proposer deux formules calculant respectivement les valeurs actualisées nettes du projet 1,  $VAN_1(\tau)$ , et du projet 2,  $VAN_2(\tau)$ , en fonction du taux d'actualisation  $\tau$ .

D'après le cours on a :

$$VAN_1(\tau) = -70000 + \frac{30000}{(1+\tau)} + \frac{45000}{(1+\tau)^2} + \frac{40000}{(1+\tau)^3}$$

et

$$VAN_2(\tau) = -60000 + \frac{15000}{(1+\tau)} + \frac{40000}{(1+\tau)^2} + \frac{50000}{(1+\tau)^3}$$

**5.2.** Calculer ces valeurs pour  $\tau = 10\%$ . Quel projet conseillez-vous ?

En prenant  $\tau = 0.1$ , on a :

$$VAN_1(0.1) = -70000 + \frac{30000}{1.1} + \frac{45000}{(1.1)^2} + \frac{40000}{(1.1)^3} = \boxed{24515.40 \text{ €}}$$

et

$$VAN_2(0.1) = -60000 + \frac{15000}{(1.1)} + \frac{40000}{(1.1)^2} + \frac{50000}{(1.1)^3} = \boxed{24259.95 \text{ €}}$$

On a  $VAN_1(0.1) > VAN_2(0.1)$ , donc le projet 1 est légèrement plus rentable sur un horizon de 3 ans.

**5.3.** Préciser  $VAN_1(0.28)$ . Qu'en pensez-vous ?

En prenant  $\tau = 0.28$ , on a :

$$VAN_1(0.28) = -70000 + \frac{30000}{1.28} + \frac{45000}{(1.28)^2} + \frac{40000}{(1.28)^3} = \boxed{-23.19 \text{ €}}$$

Le projet n'est donc plus rentable avec un taux de 28%.