Mathématiques Financières

Licence 3

2021 - 2022

Table des matières

1 Capitalisation dans le moyen terme

Exercice n°1

Un épargnant décide de déposer la somme $C_1 = 1200$ € sur un compte rémunéré au taux d'intérêt annuel $i_1 = 0.015$, le 27 janvier 2020.

1.1. Quelle sera la valeur acquise au 27 janvier 2022 ?
D'après le cours, la valeur acquise au bout de n années V_n, avec un capital initial C et un taux d'intérêt i est :

$$V_n = C \cdot (i+1)^n$$

Donc la valeur acquise V_2 au 27 janvier 2022, 2 ans après est :

$$V_2 = 1200 \cdot 1.015^2 = \boxed{1236.27 \text{ €}}$$

1.2. Il pense pouvoir ajouter le 27 janvier 2021 un complément $C_2 = 500$ €. Combien obtiendra-t-il le 27 janvier 2022 ?
On décompose les deux années en deux périodes :

Période 1 : janvier 2020 → janvier 2021
Le capital de départ est toujours C_1. On ré-applique la formule sur 1 an donc avec $n = 1$, avec V_1 le capital obtenu en janvier 2021 soit :

$$V_1 = C_1 \cdot (i+1)$$

Période 2 : janvier 2021 → janvier 2022
Le nouveau capital de départ est $V_1 + C_2$. Le taux reste inchangé, on ré-applique la formule pour trouver V_2 acquis 1 an plus tard:

$$V_2 = (V_1 + C_2) \cdot (i+1)^n$$

On remplace V_1 par sa valeur $C_1 \cdot (i+1)$

$$V_2 = (C_1 \cdot (i+1) + C_2) \cdot (i+1)$$

$$\implies V_2 = C_1 \cdot (i+1)^2 + C_2 \cdot (i+1)$$

$$= 1200 \cdot 1.015^2 + 500 \cdot 1.015 = \boxed{1743.77 \text{ €}}$$

L'épargnant obtiendra donc 1743.77 €.

1.3. En se plaçant dans la situation précédente, quel devrait être le taux d'intérêt i_2 pour obtenir une valeur acquise de 1773.25 € le 27 janvier 2022 ?

On cherche à obtenir i en connaissance des autres termes d'après la formule générale. Ici, on prendra $V_2 = 1773,25$ €. D'après la question précédente on a :

$$V_2 = C_1 \cdot (i+1)^2 + C_2 \cdot (i+1)$$
$$\implies C_1 \cdot (i+1)^2 + C_2 \cdot (i+1) - V_2 = 0$$

On développe les termes en $(i+1)$:

$$\implies C_1 \cdot i^2 + (2C_1 + C_2) \cdot i + C_1 + C_2 - V_2 = 0$$

On identifie un polynôme de degré 2 d'inconnue i, de la forme $ai^2 + bi + c$ avec $a = C_1$, $b = 2C_1 + C_2$ et $c = C_1 + C_2 - V_2$. On calcule Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\implies \Delta = (2C_1 + C_2)^2 - 4 \cdot C_1 \cdot (C_1 + C_2 - V_2)$$
$$= 8761600$$
$$\implies \Delta > 0$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$i = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad i = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\implies i = 0.025 \quad \text{ou} \quad i = -2.44$$

Or on recherche i tel que $i > 0$ d'où $i = 0.025$. On a donc $\boxed{i_2 = 0.025}$.

Exercice n°2

Le capital $C = 900$ € est immobilisé pendant 5 ans.

2.1. Avec un taux annuel d'intérêt $i = 1.8\%$, quel sera le montant disponible C_5 à l'échéance ?

On raisonne de la même façon que pour l'exercice **1.1**.

$$C_5 = C \cdot (i+1)^5 \implies C_5 = 900 \cdot 1.018^5 = \boxed{983.97 \text{ €}}$$

2.2. En fait, le taux d'intérêt annuel est égal à $i_1 = 1\%$ les deux premières années et à $i_2 = 2\%$ les trois dernières. Préciser quel sera le nouveau montant C_5' à la fin des 5 années.

On raisonne de la même façon que pour l'exercice **1.2**. On décompose les 5 ans en deux périodes :

Période 1 : Les 2 premières années (année 0 → année 2)
Le capital de départ est toujours C. On ré-applique la formule sur 2 ans donc avec $n = 2$, avec C_2 le capital obtenu en début d'année 2 :

$$C_2 = C \cdot (i_1 + 1)^2$$

Période 2 : Les 3 dernières années (année 2 → année 5)
Le nouveau capital de départ est C_2. On prend $n = 3$.

$$\begin{aligned} C_5' &= C_2 \cdot (i_2 + 1)^3 \\ &= C \cdot (i_1 + 1)^2 \cdot (i_2 + 1)^3 \\ \implies C_5' &= 900 \cdot 1.01^2 \cdot 1.02^3 = \boxed{974.28 \text{ €}} \end{aligned}$$

Le nouveau montant C_5' sera donc de 974.28 €à la fin des 5 années.

2.3. Quel taux annuel *moyen* i_{moy} pourrait-on associer à la deuxième situation ?
On cherche à isoler i dans la formule :

$$V_n = C \cdot (i + 1)^n \implies i = \left(\frac{V_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

d'où :

$$i_{moy} = \left(\frac{C_5'}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{974.28}{900}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = \boxed{0.016}$$

On pourrait associer à la deuxième situation un taux annuel moyen de 1.6%.

Exercice n°3

Un investisseur se propose de verser annuellement auprès d'un organisme financier 12000 € du 01/01/2020 au 01/01/2023.

3.1. Préciser la valeur acquise, V_{acq}, au 01/01/2024 si le placement est rémunéré au taux annuel $i = 0.75\%$.
D'après le cours, en ayant des versements constants de valeur a en début de période, avec un taux d'intérêt i sur n périodes (avec ici $a = 12000$ et $n = 4$), on a :

$$V_{acq}^{deb} = a(i + 1) \cdot \frac{(i + 1)^n - 1}{i}$$

$$\implies V_{acq} = 12000 \cdot 1.0075 \cdot \frac{1.0075^4 - 1}{0.0075} = \boxed{48906.78 \text{ €}}$$

3.2. Réalisant la difficulté de réunir en une seule fois la somme de 12000 € , il envisage de déposer mensuellement la somme de 1000 € à partir du 01/01/2020 et jusqu'au 01/12/2023.
3.2.1 Quel est le taux mensuel i_m équivalent au taux i ? Le résultat sera donné avec 6 chiffres après la virgule.
Le taux mensuel i_m se doit de vérifier, avec C capital de départ quelconque :

$$C(i_m + 1)^{12} = C(i + 1)$$

d'où

$$\boxed{i_m = (i + 1)^{\frac{1}{12}} - 1} = 1.0075^{\frac{1}{12}} - 1 = \boxed{0.000623}$$

Le taux mensuel i_m équivalent est de 0.000623.

3.2.2 Déterminer la valeur acquise V'_{acq} de ces versements mensuels à la date 01/01/2024 lorsque les intérêts sont capitalisés au taux mensuel i_m. Que remarquez-vous ?
Du 01/01/2020 jusqu'au 01/12/2023 il y a 48 mois.

$$V_{acq}^{deb} = a(i + 1) \cdot \frac{(i + 1)^n - 1}{i}$$

Application numérique : on a donc ici $n = 48$, $i = i_m = 0.000623$ et $a = 1000$.
Soit :

$$V'_{acq} = 1000 \cdot 1.000623 \cdot \frac{1.000623^{48} - 1}{0.000623} = \boxed{48739.68 \text{ €}}$$

On remarque que les deux placements ne sont pas équivalents : la stratégie annuelle est plus fructueuse que la stratégie mensuelle ($V_{acq} > V'_{acq}$).

2 Actualisation dans le moyen terme

Exercice n°4

Un capital de $C = 5000$ € est disponible le 27 janvier 2023. Le taux d'actualisation τ est fixé à 6.5% pour toutes les questions.

4.1. Déterminer la valeur actuelle, au 27 janvier 2020, de ce capital.
D'après le cours, on a, avec V_{act} la valeur actualisée, V_f le capital futur disponible, n le nombre d'années et τ le taux d'actualisation :

$$V_{act} \times (\tau + 1)^n = V_f \implies \boxed{V_{act} = \frac{V_f}{(\tau + 1)^n}}$$

Ici on a $V_f = C = 5000$ €.
On procède à l'application numérique :

$$V_{act} = \frac{5000}{(1.065)^3} = \boxed{4139.25 \text{ €}}$$

La valeur actuelle de ce capital, au 27 janvier 2020, est donc 4139.25 €.

4.2. Quand serait-il disponible si sa valeur actuelle à la date du 27 janvier 2020 était égale à 3 217.53 € ?
On cherche ici à exprimer n, le nombre d'années, en fonction des autres paramètres. Reprenons la formule :

$$V_{act} = \frac{V_f}{(\tau+1)^n} \implies (\tau+1)^n = \frac{V_f}{V_{act}} \implies n\ln(\tau+1) = \ln\left(\frac{V_f}{V_{act}}\right)$$

$$\implies \boxed{n = \frac{\ln(V_f) - \ln(V_{act})}{\ln(\tau+1)}}$$

On effectue l'application numérique :

$$n = \frac{\ln(5000) - \ln(3217.53)}{\ln(1.065)} = \boxed{7.00 \text{ ans}}$$

Le capital serait dans ce cas disponible 7 ans plus tard.

Exercice n°5

Une entreprise étudie les deux investissements ci-dessous :

Années	0	1	2	3
Projet 1	-70000	30000	45000	40000
Projet 2	-60000	15000	40000	50000

5.1. Proposer deux formules calculant respectivement les valeurs actualisées nettes du projet 1, $VAN_1(\tau)$, et du projet 2, $VAN_2(\tau)$, en fonction du taux d'actualisation τ.
D'après le cours on a :

$$VAN(\tau) = -V_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{(1+\tau)^{p_i}}$$

d'où :

$$\boxed{VAN_1(\tau) = -70000 + \frac{30000}{(1+\tau)} + \frac{45000}{(1+\tau)^2} + \frac{40000}{(1+\tau)^3}}$$

et

$$\boxed{VAN_2(\tau) = -60000 + \frac{15000}{(1+\tau)} + \frac{40000}{(1+\tau)^2} + \frac{50000}{(1+\tau)^3}}$$

5.2. Calculer ces valeurs pour $\tau = 10\%$. Quel projet conseillez-vous ?
En prenant $\tau = 0.1$, on a :

$$VAN_1(0.1) = -70000 + \frac{30000}{1.1} + \frac{45000}{(1.1)^2} + \frac{40000}{(1.1)^3} = \boxed{24515.40 \text{ €}}$$

et

$$VAN_2(0.1) = -60000 + \frac{15000}{(1.1)} + \frac{40000}{(1.1)^2} + \frac{50000}{(1.1)^3} = \boxed{24259.95\ €}$$

On a $VAN_1(0.1) > VAN_2(0.1)$, donc le projet 1 est légèrement plus rentable sur un horizon de 3 ans.

5.3. Préciser $VAN_1(0.28)$. Qu'en pensez-vous ?

En prenant $\tau = 0.28$, on a :

$$VAN_1(0.28) = -70000 + \frac{30000}{1.28} + \frac{45000}{(1.28)^2} + \frac{40000}{(1.28)^3} = \boxed{-23.19\ €}$$

Le projet n'est donc plus rentable avec un taux de 28%.