Notación y Diferenciación

Velázquez Ramírez Carlos Raúl

l0-11-2025

Notación de la derivada

Si $y = f(x)$, su derivada en el punto x_0 se denota por

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}|_{x=x_0} = D(x_0)$$

Si la derivada no se evalúa, simplemente

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D(x)$$

Derivación de orden superior:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Exampli gratia;

1) Muestre que f es diferenciable.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x| \to c, \ c \text{ es fijo}$$

Demostración:

Sea $f(x) = c$, entonces $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

$$\therefore f \text{ es diferenciable}$$

2) Muestre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ es diferenciable en $\mathbb{R}$.

Demostración: Sean x, $x_0 \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{(x - x_0)}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

Debido a que

$$x^1 - y^1 = (x-y) \cdot 1$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = nx_0^{n-1}$$

Así, f es diferenciable y $f'(x) = nx^{x-1} \forall x \in \mathbb{R}$.