المملكة العربية السعودية

أكاديمية طويق

معضلة مونتي هول (Monty Hall problem)

إعداد الطالبة:

عبير العبدالله

ندى الرويس

أفنان نمنقاني

معضلة مونتي هول ونشأتها:

في عام 1963م عرض برنامج الألعاب «لنعقد صفقة (Let's Make a Deal) » على التلفاز واســـتمر حتى عام 1977م. في كل حلقة يشـــارك مقدم البرنامج وهو المدعو بـــMonty Hall عدة ألعاب مع جمهوره تشترك جميعها في سمة واحدة وهي أنها تحتوي على جائزتين رديئتين(تقل أو تكثر) وأخرى نفيســـة. إحداها كانت قيامه بعرض ثلاثة أبواب وإخبارهم باحتواء واحد منها على سيارة واحتواء البابين الأخيرين على ماعز. يقوم اللاعب باختيار إحدى هذه الأبواب دون الإفصـــاح عما خلف هذا الباب ثم يقوم مقدم البرنامج بفتح باب(مغاير لاختيار اللاعب) خلفه ماعز ثم يطلب من اللاعب الاختيار بين أن يبقى على اختياره الأول وبين أن يستبدل بينه وبين الباب المتبقي. وهذا يجرنا إلى السؤال التالي: هل من الحسن أن يبقى على أمره الأول أم أن يعدل عنه ويختار الباب المتبقي؟

برزت المشـــكلة لأول مرة عام 1975م في مجلة «The American Statistician» الأكاديمية وهي مجلة ذو كعب عالي عند علماء الإحصـــاء، أبرزها العالم الرياضـــي Steve Selvin مستلهما هذا الإشكال من ذاك البرنامج ومنه أسمى المعضلة باسم مقدمها وعلى أن Steve Selvin لم يجانب الصـــواب في حله لهذا الإشـــكال إلا أن مناوئيه انكبوا عليه انكبابا فلم يجد بدا إلا أن يقدم حلا رياضيا آخر يعضد به رأيه. ورغم هذا ظلت المسألة في طي النسيان ولم يلتفت لها حتى أعيد إحياؤها في سبتمبر عام 1990م عندما قامت الكاتبة Marilyn vos Savant بالرد في خانتها الأسبوعية « ask Marilyn » في مجلة «Parade» على أسئلة أحد القراء:

"عزيزتي مارلين، لنفرض أنك كنت في أحد برامج العروض التليفزيونية وأعطيت الاختيار بين ثلاثة أبواب خلف أحدها سـيارة وخلف الباقيين ماعز. لنفرض أنك قمت باختيار الباب الأول ومقدم البرنامج يعرف ما هو كامن خلف هذا الباب، ولنفرض أنه قام بفتح أحد الأبواب وليكن الباب رقم ثلاثة والذي يحتوي على ماعز، ويسـألك قائلا: هل تريدين اختيار الباب رقم اثنين أم لا؟"

بادئ الرأي لا معنى للتبديل إذ احتمالية أن تكون السـيارة قابعة في الباب الأول أو الثاني هي النصف على حد سواء فلا يوجد مرجح يرجح اختيار الباب الأول على الثاني أو العكس ولكن Marilyn vos Savant أجابت بما يناقض ما يظن بداهته:

نعم، لابد من أن تبدل إذ احتمالية فوزك عندها هي الثلثين بخلاف ما إذا لزمت قرارك الأول فاحتمالية فوزك هي الثلث(1)

وعلى خلاف مجلة «The American Statistician» التي تستهدف أهل الاختصاص بمقالاتها كانت مجلة «Parade» تقرأ من قبل الجميع في كافة أرجاء الولايات المتحدة مما أعان على ذيوع المسـألة إلى حد بلغ معه أن قامت مجلة « New York Times» في وضـع الإشـكال على غلاف مجلاتها وهي مجلة نادرا ما أن تعرض المعضـلات الرياضـية فضـلا أن تستحوذ صدر صفحاتها.

ولم تكن Marilyn vos Savant أفضـل حالا من Steve Selvin فهي بالمثل قوبلت بوابل من السـخرية والتشـكيك في نجاعة مقدرتها على مثل حل هذه المسـائل فلم يكن تحقيقها للرقم القياسـي في معدلات الذكاء شـفيعا بأن يتريث في النظر إلى حلها. وكان مما شـدد وطأة هذه الاتهامات أن كانت من أناس من أهل الاختصـاص في بابي الرياضـيات والإحصاء إلى حد بلغه معه قول أحدهم لها:

(1) نقلت إجابتها مع تصرف يسير.

لقد كان صنيعك مجانبا للصواب، ولكن لننظر لحسنات هذا الأمر، إن كان جميع حملة الدكتوراة هؤلاء على خطأ فإن البلاد على أمر جلل من الزلل.[2]

بل حتى أن رياضي القرن العشرين؛ أعني به Paul Erdos لم يقتنع بمحاولات Marilyn vos Savant ولا حتى بالطرق الاحتمالية الموصلة لحلها، إلا أن محاكاة الكمبيوتر لهذه اللعبة بما يقارب 100000 ألف مرة والتي جنحت إلى صحة قول Marilyn vos Savant خففت من ارتيابه إلا أن هذه المحاكاة لم تشـــف غليله، ولم تقدم له الجواب؛ أي لماذا عند التبديل تضــعف احتمالية الفوز؟ ولم يكن Paul Erdos متفردا في نزعته الشــكية تلك رغم الأدلة الظاهرة، فلازال الدليل قائما وفي النفس شيء منها.

ونعني بالدليل بأن المسألة لم تعد مثارا للغط من جهة إثباتها رياضيا، بل امتدت حتى وجدت لنفسها موطئ قدم في باب آخر غير الباب التقليدي وأعني بهذا حوسبة الكم وسنبين هذا كله في الصفحات القادمة.

(2) ترجمت الإجابة بتصرف يسير.

برهان معضلة مونتي هولي:

ليكن لدينا تجربة عشـوائية بفضـاء احتمال [Ω, A,P,][3] وليكن B حادثا عشـوائيا حيث أن:

B ∈ A مع شـــريطة أن P(B) > 0 . وعليه احتمالية ظهور الحدث A *مع العلم بظهور الحدث* B مكتوبا *بالصيغة* P(A|B) هو:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة الشرطية في الاحتمالات وخلاصة ما تقره أن ظهور B مؤثر في احتمال ظهور A.

مثال:

إذا اختير طالبا بصورة عشوائيا من فصل يتكون طلابه بنسبة 35% من أعسري اليدين وبنسبة 50% هم طلاب السنة الثانية و 5% هم أعسروا اليدين ومن السنة الثانية في آن، فإذا كان الطالب المختار عشوائيا من السنة الثانية فما احتمالية أن يكون أعسرا؟

الحل:

لنفرض أن:

A هو الحدث الذي اختير فيه طالبا بصورة عشوائية من أعسري اليدين.

B هو الحدث الذي اختير فيه طالبا بصورة عشوائية من طلاب السنة الثانية.

---

(3) هـذه رموز متفق عليهـا في علم الإحصـــاء من أراد معرفـة مـدلولاتها فليبحث عنها في مظانها وهي باب الاحتمالات.

وعليه يتحصل لدينا:

$$P(A) = 0.35, \qquad P(B) = 0.5, \qquad P(A \cap B) = 0.05$$

ومنه يكون:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1$$

نظرية بايز:

ليكن $[\Omega, \mathbf{A}, P]$, فضاء احتمالات لتجربة عشوائية. إذا كانت $Z_1, \in \mathbf{A}$ $Z_2, \ Z_3, \ldots, Z_n$ تجزئة لفضاء الاحتمالات Ω بحيث أن $P(Z_k) = 0$ لـ

، *K= 1, 2 ,3, ...n* .

وعليه لكل $B \in A$ بحيث أن $P(B) \neq 0$:

$$P(Z_i|B) = \frac{P(Z_i)P(B|Z_i)}{\sum_k^n P(Z_k)\, P(B|Z_k)} \quad ; \ i = 0,1,2, \ldots, n$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة البيزية في الاحتمالات وهي ما سنتعمد عليه في إثبات مسألة مونتي هول.

برهان المسألة:

لنفرض أنك اخترت الباب الأول ولنفرض أن C يمثل الباب الذي تكمن خلفه السيارة

و H هو الباب الذي اختار Monty Hall *فتحه ولنفرض (دون إخلال بالعمومية) أن* H=2 ؛ أي أنه اختار الباب الثاني، وعليه يتحصل لدينا:

$$P(H = 2|C = 1) = 0.5$$
$$P(H = 2|C = 2) = 0$$
$$P(H = 2|C = 3) = 1$$

- معنى المعادلة الأولى أن احتمالية فتح مونتي للباب الثاني مع العلم بأن السيارة تكمن خلف الباب الأول هو النصف؛ لأنه يتبقى لديه بابان فيهما الماعز وهما الثاني والثالث.
- معنى المعادلة الثانية أن احتمالية فتح مونتي للباب الثاني مع العلم بأن السيارة تكمن خلف الباب الثاني هي الصفر؛ لأن من قوانين اللعبة أن مونتي لا يفتح بابا إلا وخلفه ماعز.
- معنى المعادلة الثالثة هي القطع بفتح مونتي للباب الثاني مع ضميمة العلم بأن السيارة تكمن خلف الباب الثالث(ومع ضميمة العلم باختيارك للباب الأول).

ما نود معرفته الآن هو:

$$P(C = 3|H = 2), \qquad P(C = 1|H = 2)$$

أي ما احتمالية الفوز في حالة الإبقاء وما احتمالية الفوز في حالة التبديل.

$$P(C = 3|H = 2) = \frac{P(H = 2|C = 3)P(C = 3)}{\sum_1^3 P(H = 2|C = c)P(C = c)}$$

$$= \frac{P(H = 2|C = 3)P(C = 3)}{P(H = 2|C = 1)P(C = 1) + P(H = 2|C = 2)P(C = 2) + P(H = 2|C = 3)P(3)}$$

$$= \frac{1(1/3)}{(1/2)(1/3) + 0(1/3) + 1(1/3)} = 2/3$$

$$P(C = 1|H = 2) = \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + 0(1/3) + 1(1/3)} = 1/3$$

وبهذا تم البرهان.

مسألة مونتي هول من منظور الحاسب الكمي:

تعتمد فكرة تحليل المسألة من هذا المنظور على مفهومين أساسيين من مفاهيم الحوسبة الكمية هما مفهوما الـ«Superposition» و «*Entanglement*» ولتوضيح هذا الأمر لنفرض أن: $q[0], q[1], q[2]$ هي وحداتنا الكمومية الممثلة للباب رقم:1،2،3 على التوالي. تدل حالة الوحدة الكمومية في حال تلبسها بالرقم **واحد** على احتوائها الجائزة وبالرقم **صفر** على خلوها منها.

الجائزة التي سيربحها المتسابق قد تكون في الباب الأول أو الثاني أو الثالث؛ لذا لدينا ثلاث حالات ممكنة ولغرض وضعها بصورة عشوائية على حد سواء لابد أن نضع الحالات:

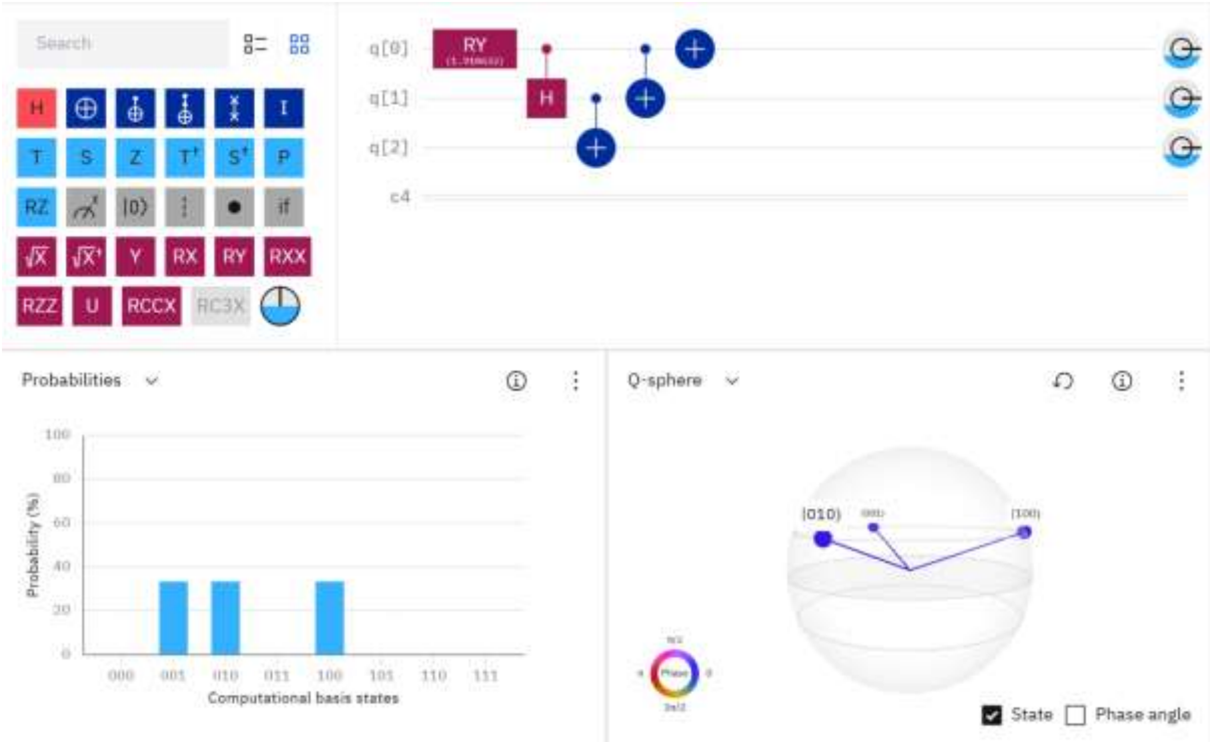
- $|001>$
- $|010>$
- $|100>$

على احتمالية واحدة وهي الثلث لكل منهما؛ أي أننا سنمثل حالة التشابك الكمومي[4]:

$$\frac{|100> + |010> + |001>}{\sqrt{3}}$$

وذلك بطريق البوابات الكمومية التالية:

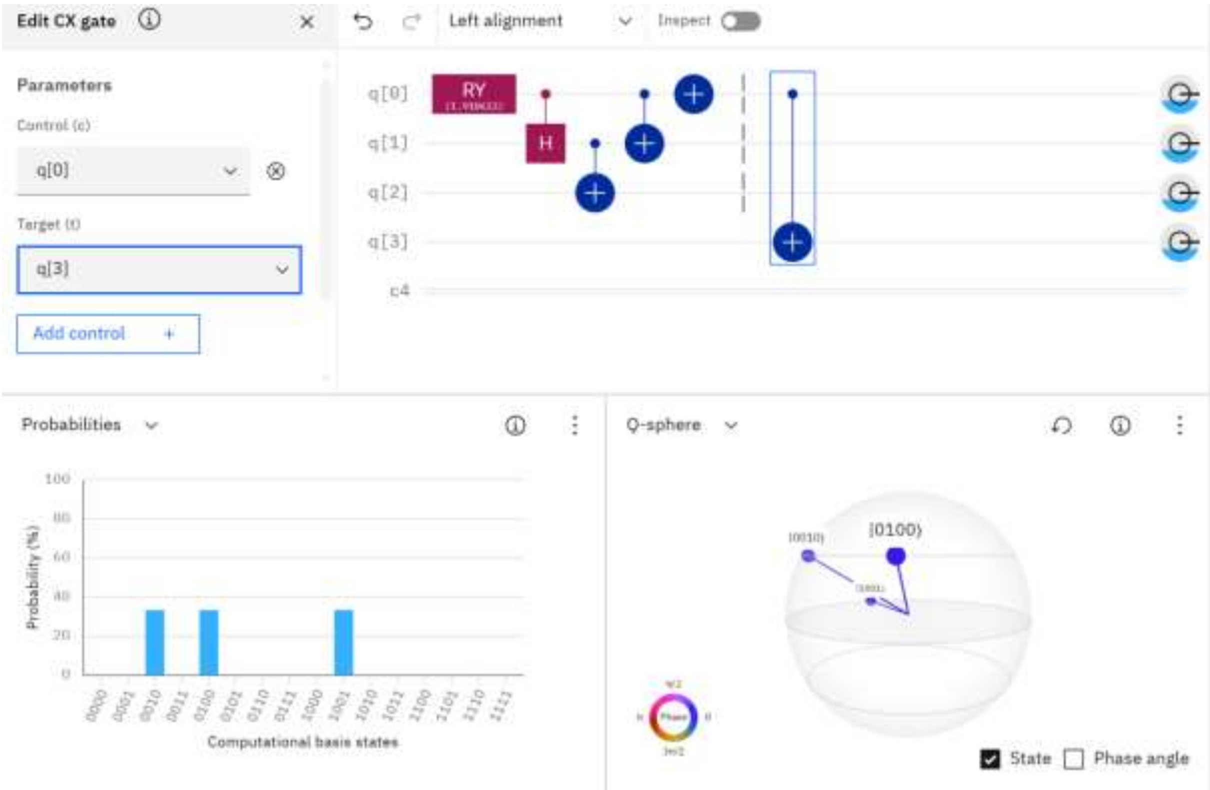
(4) تعرف هذه الحالة بحالة الـW نسبة إلى الحرف الأول من واضعها وهو Wolfgang Dur عام 2002م



وفي حالة قياسها لابد أن يكون واحدا منها متلبسا بالرقم واحد؛ أي محتويا على الجائزة.

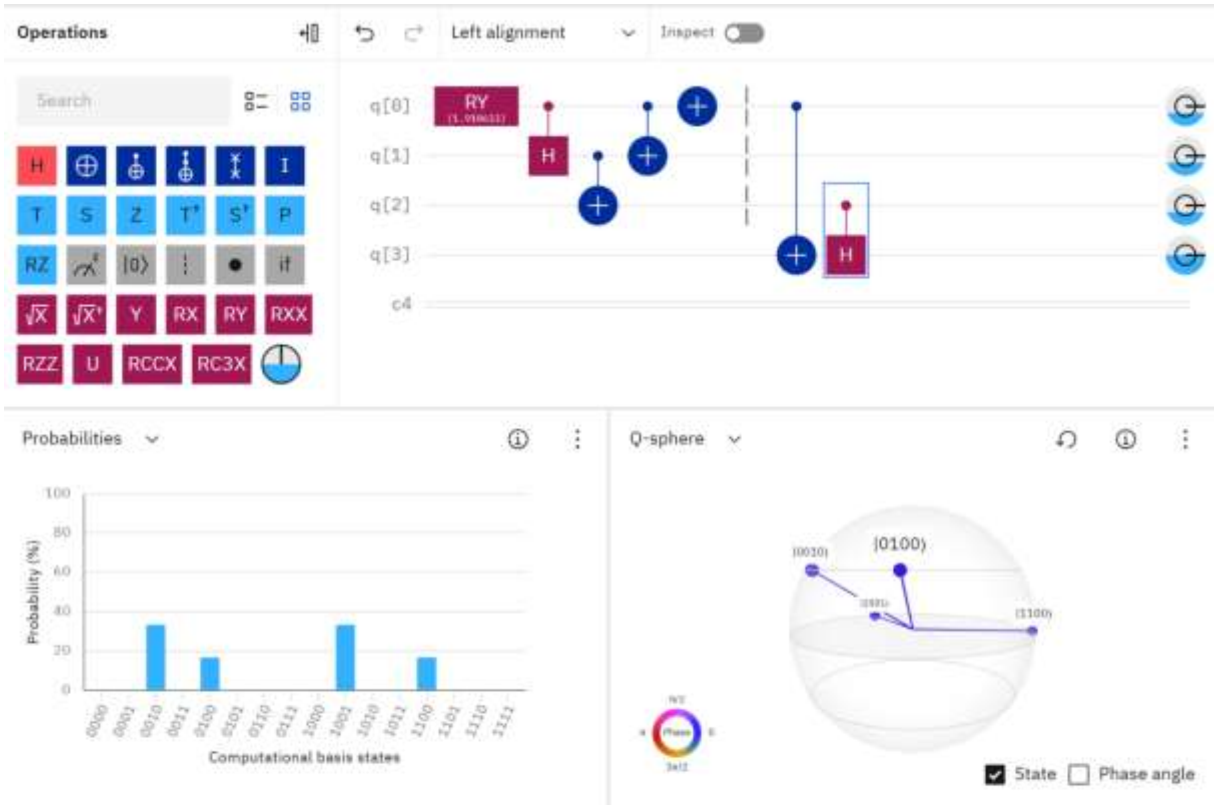
لنفرض الآن أن المتسابق اختار الباب الثالث؛ أي $q[2]$ ولتمثيل أي البابين سيفتحها Monty Hall نضيف وحدة كمومية رابعة، فإذا كانت الوحدة متلبسة بالرقم 0 فهذا معناه أنه قام بفتح الباب الأول؛ أي $q[0]$ ، وإذا كانت متلبسة بالرقم واحد فهذا معناه قيامه بفتح الباب الثاني؛ أي $q[1]$.

إذا كانت الجائزة في الباب الأول $q[0]$ أي أنه متلبس بالرقم واحد فلا يوجد خيار لمونتي هول إلا أن يفتح الباب الثاني أي $q[1]$ وعليه لابد أن تكون الوحدة الكمومية الرابعة متلبسة بالرقم واحد؛ لذلك نطبق البوابة الكمومية CX على $q[0]$ إلى $q[3]$ لغرض تحويل الوحدة الكمومية إلى الرقم واحد:

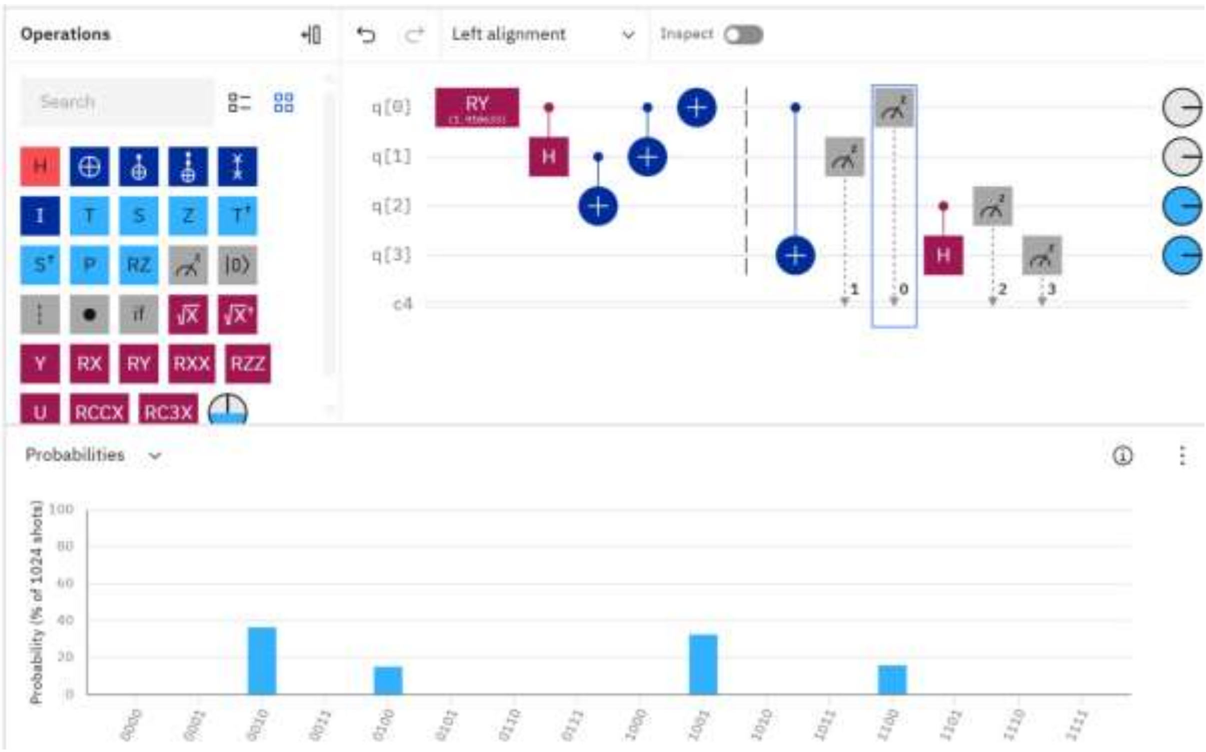


أما إذا كانت الجائزة في الباب الثاني أي $q[1]$ سيفتح مونتي هول الباب الأول أي $q[0]$ وعليه تبقى حالة الوحدة الكمومية الرابعة كما هي؛ أي حالة الصفر.

أما إذا كانت الجائزة في الباب الثالث أي أن $q[2]$ متلبسة بالرقم واحد وهو الباب الذي قام المتسابق باختياره فلدى مونتي هول إمكانية الاختيار بين الباب الأول والثاني على حد سواء (احتمالية النصف لكل منهما) لذلك نطبق البوابة الكمومية CH على $q[2]$ إلى $q[3]$:



نقوم الآن بقياس جميع الوحدات الكمومية:



نلاحظ أن احتمالية فوزك بالجائزة في حال أن أبقيت على أمرك الأول(وهو اختيارك للباب الثاني) هو مجموع احتمالية $|0010\rangle$ و $|0011\rangle$ أي الثلث على وجه التقريب واحتمالية فوزك في حال عدولك عن أمرك الأول هو مجموع احتمالية $|1001\rangle$ و $|0100\rangle$ أي الثلثان على وجه التقريب.

المراجع

- ROSEN HOUSE , J. The Monty Hall Problem. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2009 .
- Tijms ,S. Monty Hall and the 'Leibniz Illusion'(Article).
- https://youtu.be/Hd9KhRts1uw?si=PG9V3wmUx17CRitN