WIKIPEDIA

线性映射

维基百科，自由的百科全书

在数学中，**线性映射**（有的书上将“**线性变换**”作为其同义词[1]，有的则不然[2]）是在两个向量空间（包括由函数构成的抽象的向量空间）之间的一种保持向量加法和标量乘法的特殊映射。线性映射从抽象代数角度看是向量空间的同态[3]，从范畴论角度看是在给定的域上的向量空间所构成的范畴中的态射。

“线性算子”也是与“线性映射”有关的概念。但是不同数学书籍上对“线性算子”的定义存在区别。在泛函分析中，“线性算子”一般被当做“线性映射”的同义词。[4][5]而有的书则将“线性算子”定义为“线性映射”的自同态子类（详见下文）。为叙述方便，本条目在提及“线性算子”时，采用后一种定义，即将线性算子与线性映射区别开来。

目录

定义和基本性质

设V和W是在相同域K上的向量空间。法则$f : V \to W$被称为是线性映射，如果对于V中任何两个向量x和y与K中任何标量a，满足下列两个条件：

可加性： $$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

齐次性： $$f(ax)=af(x)$$

这等价于要求对于任何向量$x_1, ..., x_m$和标量$a_1, ..., a_m$，方程

$$f(a_1x_1+\cdots+a_mx_m)=a_1f(x_1)+\cdots+a_mf(x_m)$$

成立。

偶尔地，V和W可被看作在不同域上的向量空间。那么必须指定哪些基础域要被用在“线性”的定义中。如果V和W被看作前面的域K上的空间，我们谈论的就是K-线性映射。例如，复数的共轭是**R**-线性映射**C** → **C**，而不是**C**-线性映射。

从向量空间V到数域K的线性映射有一个特别的名字，叫做“线性泛函”。线性泛函分析就是将空间维度增加到无穷维（包括不可数无穷维）的高等线性代数。线性泛函分析是泛函分析最成熟的分支，但泛函分析最早研究的是有关向量空间V上的实值函数（它们一般是非线性映射）的变分学问题。

从定义立即得出$f(0) = 0$。因此线性映射有时叫做**均匀线性映射**(参见线性泛函)。

不同作者的术语差异

“线性变换”和“线性算子”是与“线性映射”有关的名称。但不同作者会按个人喜好对“线性变换”和“线性算子”下不同的定义。这导致这2个概念与“线性映射”的关系比较乱，没有统一的标准。

从向量空间A内的向量映射到同一个空间A内的线性映射是一类重要的线性映射，而且是一种自同态。是否给它一个特殊的术语作为名称就导致了不同作者做法的分歧。比如Axler的书将“线性映射”和“线性变换”当做同义词[1]，但“线性算子”则用于定义这种线性映射中特殊的自同态映射[6]。龚昇的书也将“线性算子”定义为线性的自同态映射。[7]李尚志的书则将线性自同态映射称为“线性变换”。[2]而泛函分析教材中一般将“线性变换”和“线性算子”都当做“线性映射”的别称，彼此不加区别。[4][5]

为避免词义混乱，本条目暂将“线性算子”视作在同一空间内的“线性映射”（即认为二者存在区别），并将“线性变换”当做“线性映射”的同义词。认定“线性算子”仅指从向量空间A内的向量映射到同一个空间A内的线性映射。即“线性算子”只是“线性映射”的其中一种。“线性算子”是从向量空间到其自身的线性映射(自同态)，而“线性映射”则只是一般的同态（不一定是自同态）。

注意

- 本条目所定义的“线性”与“函数图像是一条直线”是有区别的（可见下文的举例说明）。请勿混淆。
- 同一空间内不同的线性算子（注意本条目将线性算子定义为将向量映射到原空间内的线性映射）可以复合，但一般不能随便交换算子（哪怕是线性的算子）复合的先后顺序。即线性算子的代数不满足乘法交换律。比如“给函数乘上x^2”和“对函数进行微分”都是线性算子（可见下文的举例说明），但对一个函数“先乘上x^2再进行微分”和“先进行微分再乘上x^2”所得到的结果一般是不一样的。[8]
- 由“可加性”不可能推导出“齐次性”，由“齐次性”也不可能推导出“可加性”，所以这2条件对于“线性”的定义缺一不可。[9]

例子

- 恒等映射和零映射是线性的。[10]
- 对于实数，映射x\ma不是线性的。
- 如果A是$m×n$实矩阵，则A定义了一个从 $\mathbf{R}^n$到 $\mathbf{R}^m$的线性映射，这个映射将列向量$x \in \mathbf{R}^n$映射到列向量$Ax \in \mathbf{R}^m$。反过来说，在有限维向量空间之间的任何线性映射都可以用这种方式表示；参见后面章节。
- 积分生成从在某个区间上所有可积分实函数的空间到**R**的线性映射。这只是把积分的基本性质（“积分的可加性”和“可从积分号内提出常数倍数”）用另一种说法表述出来。[10]
- 微分是从所有可微分函数的空间到所有函数的空间的线性映射。[10]
- “给函数乘上x^2”是一种线性映射。[10]设C是由全体连续函数所组成的函数空间，则此运算也是空间C中的算子。

- 后向移位（backward shift）运算是一种线性映射。即把无穷维向量{\displaystyle 的第一个坐标划去：{\displaystyle \operatorname {T} 。[10]
- 如果V和W为在域F上的有限维向量空间，则从线性映射$f: V \to W$到在后面所描述的$\dim_F(W) \times \dim_F(V)$矩阵的函数也是线性映射。[10]
- 一次函数{\displaystyle 仅在b=0时才是一种线性变换。容易验证一次函数仅在b=0时，线性变换的基本性质f(0)=0才能成立。（尽管b≠0时其图像也是一条直线，但**这里所说的线性不是指函数图像为直线**）同理，平移变换一般也不是线性变换（平移距离为零时才是线性变换）。[11][12]

矩阵

如果V和W是有限维的，并且在这些空间中有选择好的基，则从V到W的所有线性映射可以被表示为矩阵。反过来说，矩阵生成线性映射的例子：如果A是实数的$m \times n$矩阵，则规定$f(x) = Ax$描述一个线性映射$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (参见欧几里得空间)。

设\ 是V的一个基。则在V中所有向量v是唯一的由在

c_{1}v_{1}+\cd

的系数 确定的。如果$f: V \to W$是线性映射，

f(c_{1}v_{1}+\cdots

这蕴涵了这个函数f是完全由

f(v_{1}),\cdots

的值确定的。

现在设\ 是W的基。则可以表示每个f(v 的值为

f(v_{j})=a_{{1j}}w_{1}+\cd。因此函数f是完全由 的值确定的。

如果把这些值放置到$m \times n$矩阵M中，则可以方便的使用它来计算f对在V中任何向量的值。如果我放置 的值到n×1矩阵C，我们有$MC = f(v)$。

一个单一的线性映射可以由很多矩阵表示。这是因为矩阵的元素的值依赖于选择的基。

用矩阵表示线性映射的原因和好处

1. 把线性映射写成具体而简明的2维数阵形式后，就成了一种矩阵。进而由线性映射的加法规则和复合规则来分别定义矩阵的加法规则和乘法规则是很自然的想法。[13]当空间的基变化（坐标系变换）时，线性映射的矩阵也会有规律地变化。在特定的基上研究线性映射，就转化为对矩阵的研究。利用矩阵的乘法，可以把一些线性系统的方程表达得更紧凑（比如把线性方程组用矩阵表达和研究），也使几何意义更明显。矩阵可以分块计算，可以通过适当的变换以"解耦"（把复杂的变换分解为一些简单变换的组合）。要求出一个线性变换的秩，先写出其矩阵形式几乎是不可避免的一个步骤。
2. 遇到y=x+3这样的加上了1个常量的非线性映射可以通过增加1个维度的方法，把变换映射写成2×2维的方形矩阵形式，从而在形式上把这一类特殊的非线性映射转化为线性映射。这个办法也适用于处理在高维线性变换上多加了一个常向量的情形。这在计算机图形学和刚体理论（及其相关机械制造和机器人学）中都有大量应用。
3. 对角化的矩阵具有诸多优点。线性映射在写成矩阵后可以进行对角化（不能对角化的矩阵可以化简成接近对角矩阵的准对角矩阵），从而可以获得对角化矩阵拥有的独特优势（极大地简化乘法运算，易于分块，容易看出与基的选取无关的不变量）。比如，对于作用于同一个空间的可对角化的方形矩阵A，要求出A自乘n次后的结果 ，一个一个慢慢地乘是很麻烦的事情。而知道对角化技巧的人会发现，在将这矩阵对角化后，其乘法运算会变得格外简单。实际应用中有很多有意思的问题或解题方法都会涉及到矩阵自乘n次的计算，如1阶非齐次线性递推数列通项公式的线性代数求解法和马尔可夫链的极限状态（极限分布）的求解。线性代数及矩阵论的一个主要问题就是寻找可使矩阵对角化的条件或者可使矩阵化简到含很多个0的条件[14]，以便简化计算（这是主要原因之一）。

线性映射的矩阵的例子

二维空间$\mathbf{R}^2$的线性变换的一些特殊情况有：

- 逆时针旋转90度：

  A= {\begin{bma

- 逆時針旋轉θ度[15]：

  A= {\begin{bmatrix}\cos(\tl

- 针对*x*轴反射：

  A= {\begin{bma

- 在所有方向上放大2倍：

  A= {\begin{bn

- 垂直错切：

  A= {\begin{bm

- 挤压：

  A= {\begin{bmat

- 向*y*轴投影：

  A= {\begin{bn

从给定线性映射构造新的线性映射

两个线性映射的复合映射是线性的：如果$f : V \to W$和$g : W \to Z$是线性的，则$g \circ f : V \to Z$也是线性的。

若线性映射可逆，则该线性映射的逆也是线性映射。

如果$f_1 : V \to W$和$f_2 : V \to W$是线性的，则它们的和$f_1 + f_2$也是线性的(这是由 $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$定义的)。

如果$f : V \to W$是线性的，而a是基础域K的一个元素，则定义自$(af)(x) = a\ (f(x))$的映射af也是线性的。

所以从V到W的线性映射的集合$L(V,W)$自身形成在K上的向量空间，有时指示为$\mathrm{Hom}(V,W)$。进一步的说，在V=W的情况中，这个向量空间(指示为$\mathrm{End}(V)$)是在映射复合下的结合代数，因为两个线性映射的复合再次是线性映射，所以映射的复合总是结合律的。

给定有限维的情况，如果基已经选择好了，则线性映射的复合对应于矩阵乘法，线性映射的加法对应于矩阵加法，而线性映射与标量的乘法对应于矩阵与标量的乘法。

自同态线性映射

自同态的线性映射在泛函分析和量子力学中都有很重要的地位。按前文约定，我们用“线性算子”来简称它。（注意泛函分析中所说的“线性算子”不一定是自同态(endomorphism)映射，但我们为了照顾不同书籍的差异以及叙述的方便，暂用“线性算子”来称呼这种自同态。）

自同态和自同构

线性算子$f : V \to V$是V的自同态；所有这种自同态的集合$\mathrm{End}(V)$与如上定义的加法、复合和标量乘法一起形成一个结合代数，带有在域K上的单位元(特别是一个环)。这个代数的乘法单位元是恒等映射$\mathrm{id} : V \to V$。

若V的自同态也剛好是同构則稱之為自同构。两个自同构的复合再次是自同构，所以V的所有的自同构的集合形成一个群，V的自同构群可表为$\mathrm{Aut}(V)$或$\mathrm{GL}(V)$。因为自同构正好是那些在复合運算下擁有逆元的自同态，所以$\mathrm{Aut}(V)$也就是在环$\mathrm{End}(V)$中的可逆元群。

如果V之维度n有限，则$\mathrm{End}(V)$ 同构於带有在K中元素的所有$n\times n$矩阵構成的结合代数，且V的自同态群同构于带有在K中元素的所有$n\times n$可逆矩阵構成的一般线性群$\mathrm{GL}(n, K)$。

量子力学应用

核、像和秩-零化度定理

如果$f : V \to W$是线性的，我们定义f的**核**和**像**（或称**值域**）为

解析失败 (未知函数“\Ker”): {\displaystyle \operatorname{\Ker}(f)=\{\,x\in V:f(x)=0\,\}}

{\displaystyle

$\ker(f)$是V的子空间，而$\mathrm{im}(f)$是W的子空间。下面的叫做秩-零化度定理的维度公式经常是有用的：

解析失败 (未知函数“\Ker”): {\displaystyle \dim(\Ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V) \,}

$\dim(\mathrm{Im}(f))$的数也叫做“f的秩”(rank)并写为$\mathrm{rk}(f)$，有时写为$\rho(f)$；$\dim(\mathrm{Ker}(f))$的数也叫做“f的零化度”(nullity)并写为$\nu(f)$。如果V和W是有限维的，基已经选择好并且f被表示为矩阵A，则f的秩和零化度分别等于矩阵A的秩和零化度。

推广

多重线性映射是线性映射最重要的推广，它也是格拉斯曼代数和张量分析的数学基础。其特例为双线性映射。

参见

- 线性方程
- 反线性映射
- 变换矩阵
- 连续线性算子
- 神经网络
- 计算机图形学
- 线性系统

脚注与参考资料

脚注

1. 见 Axler 2009，第38页(位于第3章“线性映射”第1节“定义与例子”)。
2. 李尚志. 第6章“线性变换”第4节“线性变换”. 线性代数 第1版. 高等教育出版社. 2006: 326. ISBN 7-04-019870-3. “则V到自身的线性映射称为V的线性变换(linear transformation)。”
3. 见 Lax 2010，第7页(位于第2章“线性映射”第1节“线性映射生成的代数”)。
4. 见 Lax 2010，第131页(位于第15章“有界线性映射”的开头部分)。原文为“线性映射也称为线性算子或线性变换”。
5. A·H·柯尔莫哥洛夫，佛明(С. В. Фомин). 第4章“线性泛函与线性算子”第5节“线性算子”. Элементы теории функций и функционального анализа [函数论与泛函分析初步]. 俄罗斯数学教材选译. 段虞荣 (翻译)，郑洪深 (翻译)，郭思旭 (翻译) 原书第7版，中译本第2版. 高等教育出版社. 2006年: 162. ISBN 7-04-018407-9.
6. 见 Axler 2009，第57页(位于第3章“线性映射”第4节“可逆性”)。
7. 见龚昇《线性代数五讲》第1讲第10页。
8. 见 Axler 2009，第41页(位于第3章“线性映射”第1节“定义与例子”)。
9. 见 Axler 2009，第59页(位于第3章“线性映射”末尾习题旁的说明)。
10. 见 Axler 2009，第38-39页(位于第3章“线性映射”第1节“定义与例子”)。
11. 见 Artin 2010，第156页。(位于第6章“Symmetry”第1节“Symmetry of the Plane Figures”)
12. Walter Rudin. 第1章“Topological Vector Spaces”中的“Linear mappings”一节. Functional Analysis [泛函分析]. Higher mathematics series. McGraw-Hill Book Company. 1973: 13.
13. 见 Axler 2009，第51页(位于第3章“线性映射”第3节“线性映射的矩阵”)。
14. 见 Axler 2009，第82页(位于第5章“本征值与本征向量”第3节“上三角矩阵”)。
15. 其证明只需要用到三角函数的基础知识，在网上很容易找到证明过程。也可参见Feynman第11章“Vectors”第3节“Rotations”。

脚注所引资料

- Michael Artin. *Algebra* [代数] 第2版. Pearson. 2010. ISBN 978-0132413770.
- 谢尔顿·阿克斯勒. *Linear Algebra Done Right* [线性代数应该这样学]. 图灵数学•统计学丛书. 杜现昆 (译者)，马晶 (译者). 人民邮电出版社. 2009年. ISBN 9787115206145（中文（中国大陆））.
- Peter D. Lax. Functional Analysis [泛函分析]. 图灵数学·统计学丛书. 侯成军 (翻译)，王利广 (翻译). 人民邮电出版社. 2010年. ISBN 978-7-115-23174-1.
- Richard Feynman. *The Feynman Lectures on Physics* [费曼物理学讲义] **卷1**. Addison-Wesley. 1999. ISBN 978-0201021165.

其它参考资料

- Halmos, Paul R., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, (1993). ISBN 0-387-90093-4.