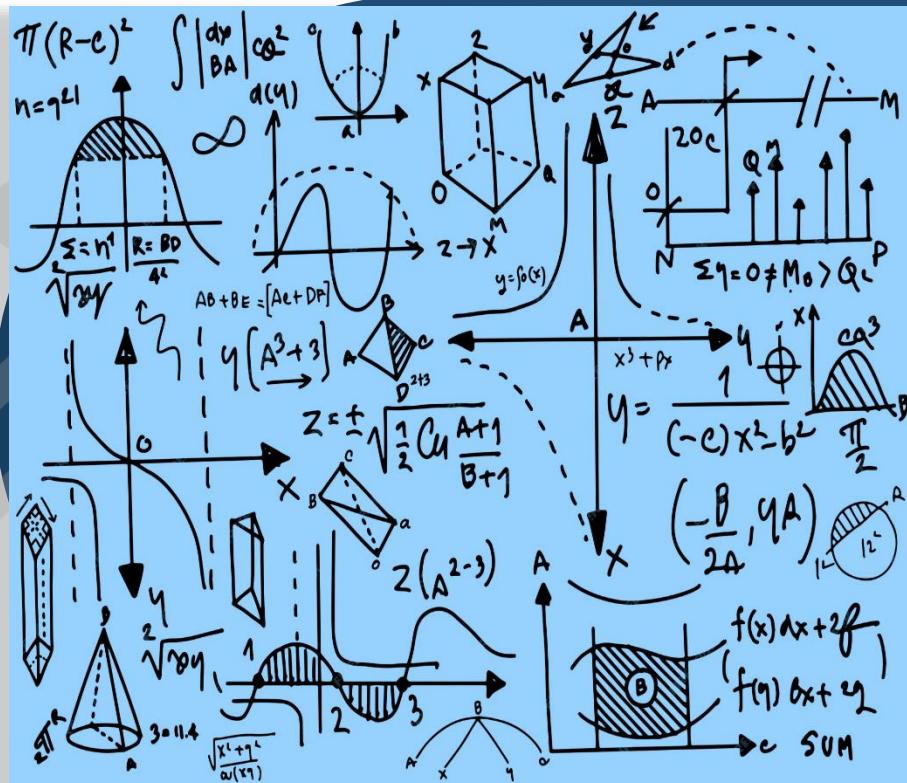




ريانابيج

تونالافولا

نحن هغل (يُعَانِصُ الْمُتَصَلِّجَات)



rd.3

وحدة الإدارة والتشغيل لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.

أولاً وحدة

إحصائيات

صفحة	موضوع	درس رقم
41	عزم القوة حول نقطة في نظام ثنائي الأبعاد	أولاً
45	نظريه العزوم	ثانية
49	عزم القوة حول نقطة في نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد	ثالث
52	محصلة قوتين متوازيتين	رابعاً
56	محصلة مجموعه من القوى المتوازية	الخامس
59	التوازن هو مجموعه من القوى المتوازية المستوية	السادس
63	الزواج	السابع
66	الزواج الناتج من (الحالة الأولى)	ثامن
70	الزواج الناتجين (الحالة الثانية والثالثة)	التاسع
73	الزواج الناتجين (الحالة الثانية والثالثة)	العاشر
76	اختبار الوحدة	الحادي عشر
78	تقدير	الثاني عشر

وحدة (1)

السكون

عزيزي الطالب، بنهاية دراسة هذه الوحدة، يجب أن تمتلك القدرات والمعرفات التالية:

- (1) التعرف على عزم القوة وإيجاده وفقاً لنقطة في الفضاء.
- (2) أوجد معيار ومتوجه القوة وفقاً لنقطة ما.
- (3) أوجد عزم القوى المستوية وفقاً لنقطة في مستواها.
- (4) التعرف على النظرية العامة للعزوم.
- (5) حل العديد من التطبيقات المتعلقة باللحظات.
- (6) التعرف على القوى المتوازية المستوية.
- (7) حدد خط عمل محصلة قوتين متوازيتين إذا كانتا في نفس الاتجاه أو في اتجاهين متعاكسيين.
- (8) إيجاد عزم مجموعة من القوى المتوازية حول نقطة ما.
- (9) أوجد محصلة مجموعة من القوى المتوازية.
- (10) استنتج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة ما يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.
- (11) استنتاج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة ما يساوي صفرأ إذا مرت المحصلة بنفس النقطة.
- (12) استنتاج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة ما يساوي صفرأ إذا كانت محصلتها تتلاشى.
- (13) التعرف على مفهوم الزوج، وإيجاد لحظة الزوج واستنتاج أن لحظة الزوج هي متوجه ثابت.
- (14) التعرف على التكافؤ والتوازن لزوجين.
- (15) أوجد محصلة عدة أزواج.
- (16) أثبتت أن مجموعة من القوى تعادل عزماً مزدوجاً باستخدام طرق مختلفة

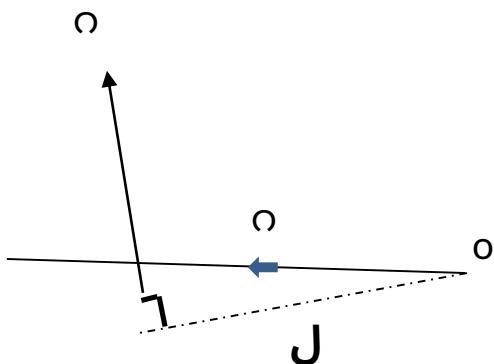
الدرس(1)

عزم القوة حول نقطة في نظام ثنائي الأبعاد

التعريف: حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين $\vec{x} = (x_1, y_1)$ ، $\vec{y} = (x_2, y_2)$ يرمز إليه بـ

$$e(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

عزم القوة e حول نقطة (0) ويرمز لها J



$$= J \times e$$

ملحوظات :

1-المقياس الجبري للحظة:

@ لو J إذا كان الدوران حول (0) عكss اتجah عقارب الساعة، فإن المقياس الجبري هو إيجابي .

@ لو J إذا كان الدوران حول (0) باتجاه عقارب الساعة، فإن المقياس الجibri هو سلبي .

2-الوضع الراهن:

$$L = \left\| \vec{M} \right\| = \left\| \vec{L} \right\|$$

حيث: L هو طول العمود النازل من (0) إلى خط عمل J

3-عزم القوة حول نقطة على خط تأثيرها = صفر

وحدة الإدارة والتشغيل لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.

مثال(1):

القوة $\vec{v} = \vec{v}$ تؤثر عند النقطة (2,-1) A وأوجد عزمها حول النقطة (0,2) B، ثم أوجد طول العمود النازل من B على خط فعل \vec{v} .

حل

$$(3,2) = (2,0) - (1,2) \quad \vec{v} = ?? = \vec{v} - ?? = \vec{v}$$

$$?? = (3,1) \times (2,3) \quad \vec{v} = ??$$

$$= \frac{7}{10\sqrt{10}} \text{ وحدة الطول}$$

مثال(2):

القوة $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j}$ يؤثر عند النقطة (3,1) A إذا كانت لحظة المسافة حول النقطة (4,0) B هي m . أوجد قيمة m .

حل

$$m = \vec{v} \cdot \vec{r} = (6,0) \cdot (5, -3) = 6$$

$$k = 3 \quad \leftarrow \quad 5k = 15 \quad \leftarrow \quad 6 = 5k - 9$$

مثال(3):

القوة $\vec{v} = \vec{v}$ أثبت أن متجه العزم عند النقطة (2,2) A يؤثر على \vec{v} إذا كان المتجه حول نقطة الأصل هو المتجه الصفرى، فاشرح الإجابة.

حل

$$0 = (1,2) \times (2,2) = (1,2) \cdot (2,2)$$

خط عمل \vec{v} يمر بنقطة الأصل.

مثال(4):

القوتين؟؟ $\omega_1 = \omega - \omega_2 + 2$ = التأثير عند النقطتين (A, 3, 0) و (B, 0, 3)
حدقيمة الثابت m بحيث يكون مجموع عزوم القوتين حول نقطة الأصل مساوياً للصفر.

حل

$$\begin{aligned} 0 &= m \times 1 \times 2 + m \times 2 \times 1 \\ 0 &= (2, 0) \times (3, 1) + (1, 1) \times (0, 3) \\ 0 &= 3m - 3 \\ 3 &= 3m \\ m &= 1 \end{aligned}$$

التمرين(1)

1) القوة $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ إذا أثّرت القوة عند النقطة (A, 3, 0)، فأوجد متجه عزم القوة بالنسبة للنقطة (-2, 4, B)، ثم أوحد طوا، العمود.

من النقطة ب إلى خط عمل القوة؟

A)-1,2=تصريف عند النقطة (2) الفوتان، 1؟؟؟

أو جد متوجه العزم للقوتين بالنسبة للنقطة (B) 0,7

(3) القوانين؟؟، $\sigma_1 = 5^+$ ، $\sigma_2 = -\sigma + 2$ إذا كان التأثير عند النقطة (A)، فأوجد متحف عزم القوتين بالنسبة للنقطة (B).

ـ 15) القوة $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ عند النقطة A إذا كان عزمها حول نقطة الأصل يساوي F ومحاذتها حول النقطة B تساوي F ؟؟

أوجدقيم الثوابت m و n ؟

5) القوة $\vec{F} = 6 \hat{i} + 8 \hat{j}$ عند النقطة A(-1,2) أوجد متجه عزم القوة بالنسبة للنقطة (2,5)

الدرس(2)

نظرية العزوم

مجموع المقاديس الجبرية لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.

ملحوظات:

1- إذا $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$ ثم خط عمل $\Sigma M_A = \Sigma M_A$

2- إذا $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$ ثم خط عمل $\Sigma M_A = \omega_1 M_A + \omega_2 M_A + \dots + \omega_n M_A$

مثال(1):

إذا كان المؤثر عند النقطة A، فأوجد مجموع عزوم القوة حول نقطة الأصل، ثم طول العمود النازل من نقطة الأصل على خط عمل المحصلة؟

حل

مجموع عزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما = عزم المحصلة حول نفس النقطة

$$\sqrt{13} = \sqrt{9 + 4R} = (2,3) = 3 + 2\cos + 1\sin = 5$$

$$R = (3,2) \times (2,-2) = -16$$

طول العمود النازل من نقطة الأصل إلى خط عمل المحصلة = $\frac{16}{\sqrt{13}}$

مثال(2):

أثبت أن خط عمل المحصلة يمر عبر النقطة A $(-10,2)$ إذا $\omega_1 = (2,1), \omega_2 = (3,-6), \omega_3 = (4,0)$

حل

وحدة الإدارة والتشغيل لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.

(1-، 5-) = ٤٤

$$44 = 44(10 - 10) = (1 - 5-) \times (2 - 10) \Rightarrow x = 5$$

: يمر خط عمل المحصلة عبر النقطة A

مثال(3):

القوة $\sigma_3 - \sigma_2 = 0$ أثر باستخدام العزوم عند النقطة A (1,1)

خط عمل $\sigma // \sigma$

خط عمل σ يقسم σ_d

مع العلم أن $B(2,4), D(2,7), C(4,7)$

حل

$$\sigma_d = (3 - 2-) \times (3 - 1) \Rightarrow x = 0$$

$$\sigma_d = (3 - 2-) \times (6 - 3) \Rightarrow x = 0$$

$\sigma // \sigma$.. خط عمل σ يقسم σ_d

$$\sigma_d = (3 - 2-) \times (0 - 1) \Rightarrow x = 0$$

.. خط عمل σ يقسم σ_d

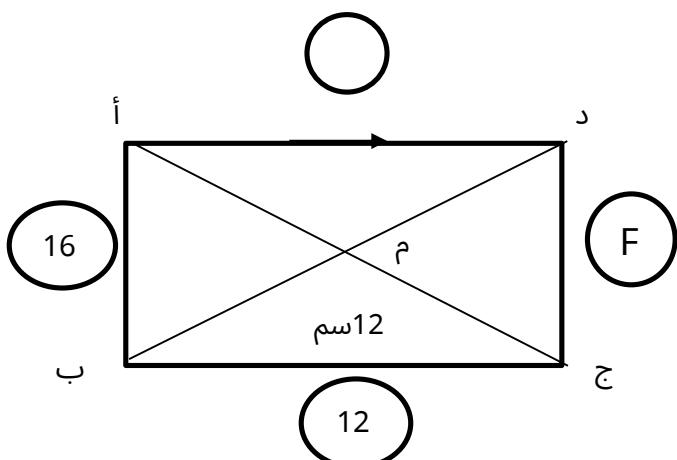
مثال(4):

سم، والقوى 16 و 14 و 12 سم AB = BC act at ABCD ف، فيه مستطيل

على التوالي إذا كان مجموع القياس الجبri لعزوم القوى المؤثرة على كل من النقطة C ومركز المستطيل تساوي صفرأ. أوجد فـ ك

وحدة الإدارة والتشغيل لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.

حل



$$\sigma = ?? \text{ ج}$$

$$- 16 \times 12 + k \times 8 = 0$$

$$K = 24 \text{ غراماً} \quad 8K = 192$$

$$\sigma = ?? \text{ م}$$

$$- 16 \times 6 - F \times 6 + 12 \times 4 + k \times 4 = 0$$

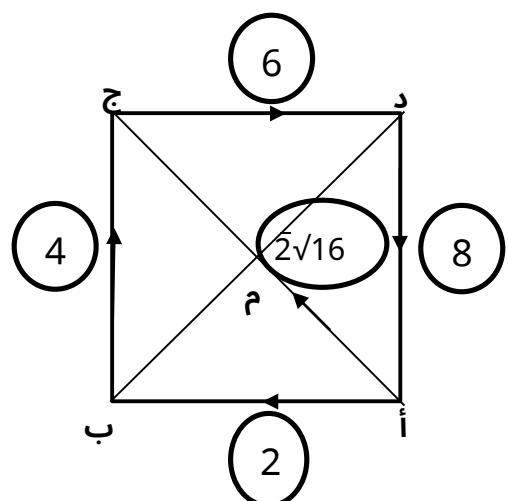
$$0 = 4 \times 24 + 4 \times 12 + 6 \times 16 -$$

$$48 - 6F = 0$$

$$F = 8 \text{ جم. الوزن} \quad 6F = 48 \therefore$$

مثال (5):

مربع طول ضلعه 6 سم، وقوى مقدارها 2 و 4 و 6 و 8 نيوتن يعزم في على التوالي، احسب مجموع القياس الجبري لعزم القوى **نوبة الرأس B**؟



حل

$$(\text{نظرية فيثاغورس}) \quad 2\sqrt{6} = =$$

$$- 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{16} - 6 \times 8 + 6 \times 6 = ?? \text{ ب}$$

$$96 - 84 =$$

$$12 = - \text{ نيوتن. سم}$$

∞
 \exists

التمرين(2)

1. القوتان؟؟؟، إذا كان التأثير عند النقطة (A, 2,5) = $\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma$ ، فأوجد متجه عزم محصلة القوتين بالنسبة للنقطة (B, 1,1)، ثم أوجد طول العمودي من النقطة B إلى خط عمل المحصلة.

2. القوتان؟؟؟، قم بالتأثير عند نقطة الأصل، وأثبت أن خط عمل المحصلة يمر عبر النقطة (A, 3,4)، ثم أوجد متجه عزم المحصلة بالنسبة للنقطة (B, 2,-5).

3. ABCD مستطيل فيه $AB = BC = 8$ سم، القوى $F_1 = 12$ و $F_2 = 10$ و $F_3 = 3$ نيوتن تؤثر على النقطة K على التوالي، إذا كان مجموع القوى الجبri لعزم القوى يتلاشى حول كل من A و C، فأوجد F و K.

4. ABCD مربع تقاطع أقطاره عند النقطة M، القوى $F_1 = 3$ و $F_2 = 3$ و $F_3 = 3$ نيوتن ت العمل في K على التوالي، إذا كان مجموع القوى الجبri لعزم القوى يتلاشى حول كل من B و M، فأوجد F و K.

الدرس(3)

عزم القوة حول نقطة في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

لو : $\tau = \tau_x, \tau_y, \tau_z$ فـ τ يؤثر عند النقطة $(A)_{L,m,n}$

$$\begin{array}{c} \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z \\ | \quad m \quad n \\ \text{ج} \end{array} \quad \text{ثم } \tau_x = x | \quad \tau_y = y | \quad \tau_z = z |$$

مثال(1):

القوة $\tau = 2\tau_x - \tau_y + 3\tau_z$ إذا كان التأثير عند النقطة $(A)_{-3,1,2}$. فأوجد عزم الدوران.
قومة τ حول النقطة $B_{2,2,-1}$. ثم أوجد طول العمودي من B إلى خط عمل القوة؟

حل

$$21\tau_x + 7\tau_z = | \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \quad 1 - \quad 1 - \quad \tau_x = -5x | \quad \tau_y = | \quad \tau_z = | \quad \text{إي}$$

$$\text{وحدة الطول } \overline{35} = \sqrt{\frac{27+21+20}{23+2(1-)+22}} = \sqrt{\frac{78}{43}}$$

مثال(2):

القوة Ω - $\Omega + 4\Omega = \Omega$ يؤثر عند النقطة A متوجه موضعه بالنسبة إلى نقطة الأصل هو (1, 2, 2) ومركبة العزم Ω إذا كانت المسافة حول المحور Z تساوي 7 وحدات عزم، فأوجد قيمة K، ثم أوجد طول العمود من (0) إلى خط عمل Ω

حل

$$1 \cdot \Omega - (-1 - 2(7\Omega +)4 - 2(??_+ -)) = | \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & K \end{array} | \quad \Omega = x = \Omega_{??}$$

وحدة الطول

$$\frac{2 \cdot 4 = (2-)+27+2(10-)}{2(1-)+24+23} = \sqrt{L} =$$

(التمرين 3)

1. إذا كانت القوة $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ إذا كانت الأفعال عند النقطة (A, 1, -4)، فأوجد:

في اللحظة t حول نقطة الأصل.

في اللحظة t حول النقطة (B, 1, -3, 2)، ثم استنتج طول

عمودي من النقطة B على خط عمل القوة.

2. إذا كانت القوة $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j}$ يؤثر عند النقطة (A, 0, -2, 4) ولحظة t حول نقطة الأصل يساوي L . ما قيمة L ؟

3. إذا كانت القوة $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j}$ تؤثر عند النقطة (A, -2, -3, 1) و

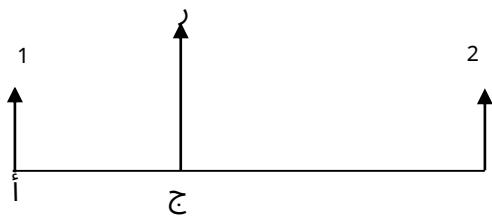
مكون من مكونات لحظة t إذا كانت المسافة حول المحور X تساوي 3 وحدات عزم، فأوجد قيمة b ، ثم أوجد طول العمودي من نقطة الأصل إلى خط عمل القوة.

4. قوة $\vec{F} = 15\vec{i} - 25\vec{j} + 40\vec{k}$ إذا كان يؤثر عند النقطة (A, 2, -3, -3)، فأوجد
مركبة عزم الدوران τ حول المحور الصادي

لدرس (4)

نتيجة لقوى متوازيتين

المحصلة الأولى لقوى متوازيتين في نفس الاتجاه :



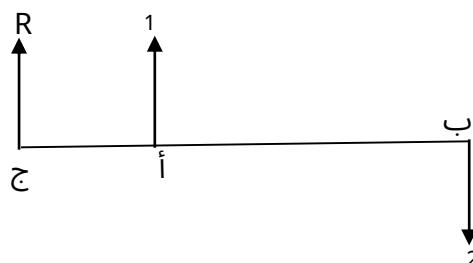
$$2 + 1 = R$$

ثم:

$$2 = 1$$

ثانياً: محصلة قوى متوازيتين في اتجاهين متعاكسين:

نفترض أن $1 < 2$



$$2 - 1 = R$$

ثم:

$$2 = 1$$

لاحظ أن:

إذا كان معيار المحصلة أقل من واحد من قوى، فإن القوى تكونان في اتجاهين متعاكسين.

مثال(1):

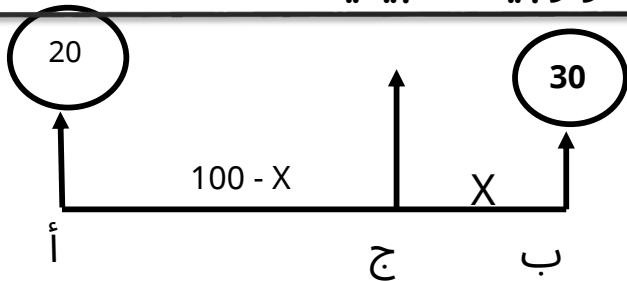
قوى متوازيتان في نفس الاتجاه، مقدارهما 20 و 30 نيوتن، تؤثران عند النقطة A وج مقدار واتجاه محصلة القوى عند نقطتين A و B على التوالي، والمسافة بين نقطة تأثيرهما B والنقطة A.

مع العلم أن $AB = 100$ سم

حل

$$R = 30 + 20 = 50 \text{ نيوتن} \quad (\text{وفي نفس اتجاه القوى})$$

وحدة الإدارة والتشغيل لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.



مقدار المحصلة 50 نيوتن في اتجاه القوتين عند 40 سم من ب.

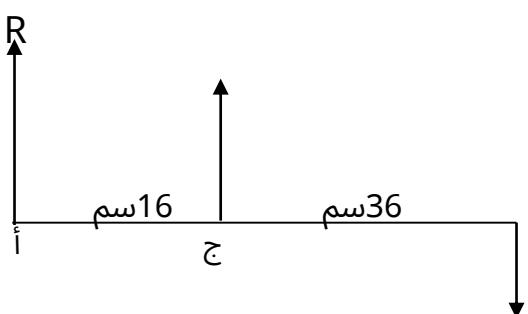
مثال(2):

ف₂ هناك قوتان متواليان في اتجاهين متعاكسين تؤثران على النقطتين A و B على التوالي.

إذا كانت قيمة محصلة القوتين تساوي 90 كجم وتؤثر عند النقطة

النقطة ج حيث $AB = 36$ سم، $AC = 16$ سم، أوجد 1، ف₂

حل



$$(1)$$

$$2- 1 R =$$

$$90 = 2- 1 \therefore$$

$$(2)$$

$$52 \times 2 \times 16 = 1$$

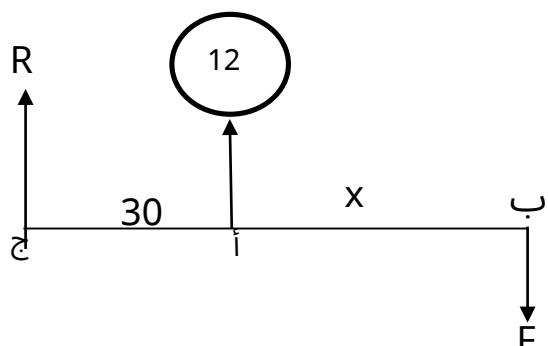
بحل المعادلتين (1) و (2)

$130 = 1 \therefore$ 40 كيلوجول.

مثال(3):

قوتان متواليان مقدارهما 12 نيوتن، ومحصلتهما 3 نيوتن، وخط عملهما يبعد 30 سم عن خط عمل القوة الأولى، أثبت أن F لها قيمتان، وأوجد المسافة بين خطي عمل القوتين في الحالتين.

حل



تكون المحصلة أقل من إحدى القوتين:

القوتان في اتجاهين متعاكسين و

$$12 < F \quad \underline{\text{أولاً}}$$

$$R = 12 - F$$

$$F = 9 \text{ نيوتن}$$

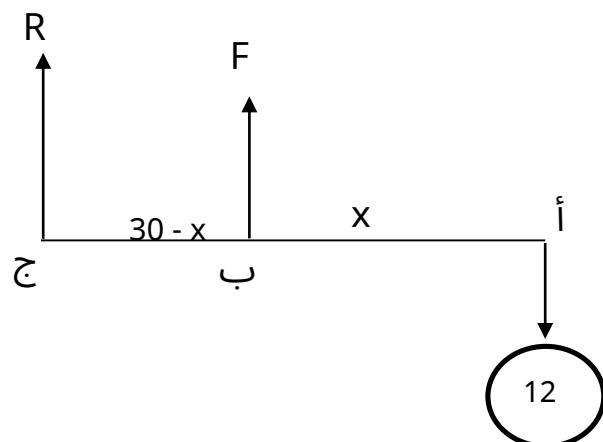
$$3 = 12 - F$$

$$\text{س} = 10 \text{ سم}$$

$$30 \times 12 = 30(9)$$

وحدة الإدارة والتشغيل لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.

ثم القوة (F) ذات المقدار 9 نيوتن وعلى بعد 10 سم من القوة الأولى.



$$12 < F \quad \underline{\text{ثانية:}}$$

$$R = F - 12$$

$$3 = F - 12$$

$$F = 15 \text{ نيوتن}$$

$$30 \times 12 = 30(15) \text{ س} = 30 \text{ سم}$$

$$\text{س} = 6 \text{ سم}$$

ثم القوة (F) التي تبلغ قوتها 15 نيوتن وعلى بعد 6 سم من القوة الأولى.

التمرين(4)

1-قوتان متوازيتان مقدارهما 4 و 6 نيوتن تعملان في نفس الاتجاه و قمبتأثير النقطتين A و B حيث $AB = 25$ سم. أوجد محصلة القوتين.

2-أوجد محصلة قوتين متوازيتين في اتجاهين متعاكسين إذا كانتا تبلغ المقادير 7 و 12 نيوتن وتؤثر عند A و B حيث $AB = 20$ سم.

- 3-قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما 350 نيوتن، مقدار إحدى القوتين 500 نيوتن وتأثر على مسافة 51 سم ومن المحصلة، أوجد القوة الثانية والمسافة بين الخطين تأثير القوتين إذا كانت القوة المعطاة هي الفعل الناتج:

أولاً: في نفس الاتجاه **ثانياً:** في اتجاهين متعاكسين

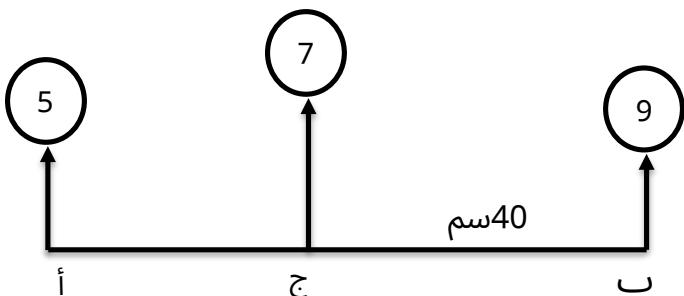
4-قوتان متوازيتان في اتجاهين متعاكسين، مقدارهما 7 و12 نيوتن
أوجدهما مقدار محصلتهما.

5-قوتان متوازيتان في نفس الاتجاه، مقدار كل منهما 7 و10 نيوتن، تؤثران عند النقطتان A و B حيث:

إذا كان طول AB يساوي 51 سم، وأوجد طول AC عند النقطة C ، فأوجد محصلة أفعالهما عند النقطة C

الدرس(5)

ناتج عن مجموعة من القوى المتوازية



مثال(1):

في الشكل المقابل: أوجد مقدار واتجاه المحصلة؟

حل

وحدة القوة (للأعلى)

$$R = 5 + 7 + 9 = 21$$

مجموع العزوم حول النقطة A = عزم المحصلة حول النقطة A

$$70 \times 9 - 30 \times 7 -$$

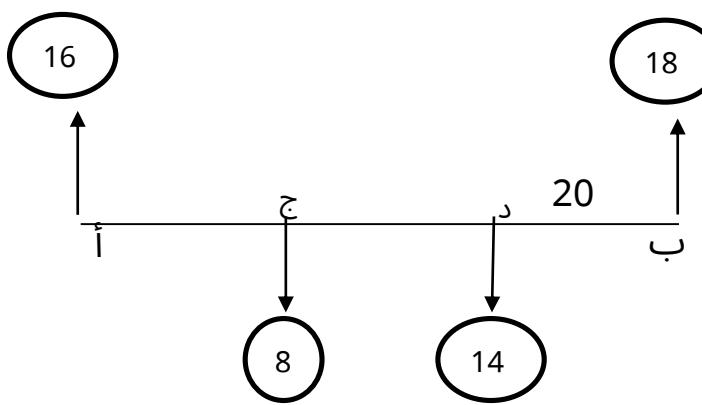
$$\therefore s = 40 \text{ سم}$$

مقدار المحصلة هو 21 وحدة قوة لأعلى إلى يسار (A) وعلى بعد 40 سم

بعيد عنها.

مثال(2):

في الشكل المقابل:
أوجد مقدار واتجاه المحصلة؟



حل

وحدة القوة (للأعلى)

$$R = 16 + 18 - 8 - 14 = 12$$

مجموع العزوم حول النقطة B = عزم المحصلة حول النقطة B

وحدة الإداره والتسيير لمدارس التكنولوجيا التطبيقية.

$$12 \times س = 60 \times 16 + 40 \times 8 - 20 \times 14 -$$

$$\therefore س = 30 \text{ سم}$$

مقدار المحصلة هو 12 وحدة قوة لأعلى إلى يمين (B) وعلى بعد 30 سم منه.

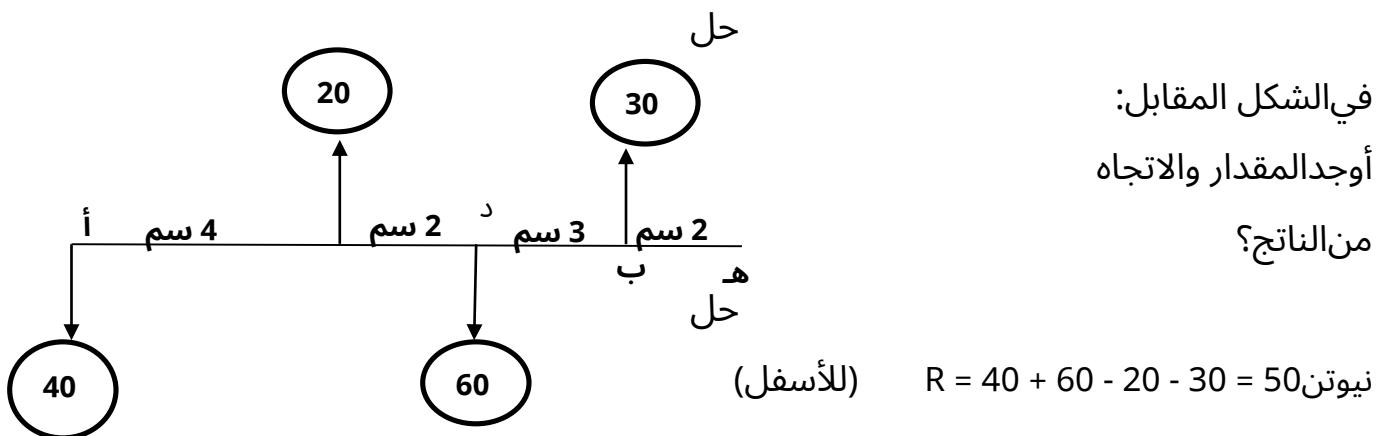
مثال(3):

النقاط A و B و C و D و E هي خمس نقاط تقع على خط مستقيم حيث: $AB = 4 \text{ سم}$, $BC = 2 \text{ سم}$, $CD = 3 \text{ سم}$, $DE = 2 \text{ سم}$, $AE = 3 \text{ سم}$.

تأثير قوتان مقدارهما 20 و 30 نيوتن عمودياً لأعلى عند النقطتين 2

أوجد C و A والقوتين 40 و 60 نيوتن تؤثران عمودياً لأسفل عند النقطتين D و B

مقدار واتجاه المحصلة ونقطة تأثير المحصلة.



مجموع عزوم القوى حول النقطة E = عزم المحصلة حول النقطة E

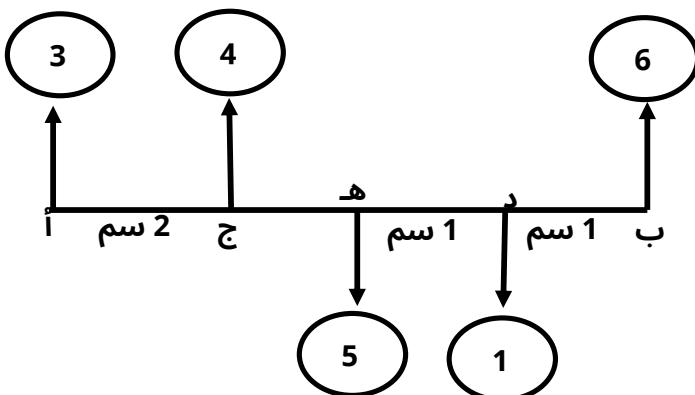
$$= 2 \times 30 + 7 \times 20 + 5 \times 60 - 11 \times 40 -$$

$$\therefore س = 10.8 \text{ سم}$$

مقدار القوة المحصلة هو 12 نيوتن إلى أسفل يسار (E)

وعلى مسافة 10.8 سم منه

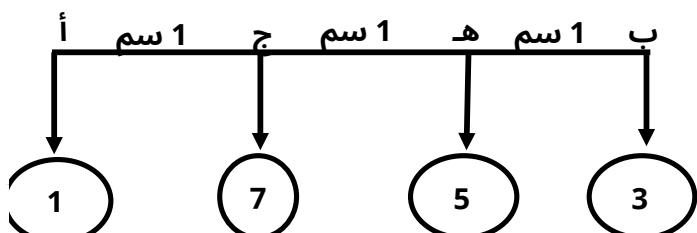
التمرين(5)



1-في الشكل المقابل :
مجموعه من القوى المتوازية
عمودية على ؟؟
أوجد المقدار والاتجاه و
ما هي نقطة تأثير المحصلة؟

2-النقاط A و B و C و D و E و BC = 6 سم، AB = 4 سم، BC = 2 سم
، CD = 8 سم

و DE = 10 سم، تؤثر القوى 60، 30، 50، 80، 40 جم عند النقاط A، BC، D، E على
التوازي، وهي عمودية على ؟؟، بحيث تكون القوى الثلاث الأولى في نفس الاتجاه والقوتين
الأخريين في الاتجاه المعاكس، حدد ممحصلة مجموعة القوى؟



3-في الشكل المقابل:
أربعة أوزان بمقادير 1، 5، 7، 3 غرام.
يتم وضعها على قضيب إضاءة. حدد
ما هي نقطة التعليق التي تحافظ على استواء القضيب؟

الدرس(6)

التوازن هو مجموعة من القوى المتوازية المستوية

إذا كان الجسم في حالة اتزان تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية، فإن:

- مجموع القياسات الجبرية للقوى يساوي صفرأ
- مجموع المقاييس الجبرية لعزم القوى حول أي نقطة في مستواها

يساوي صفرأ

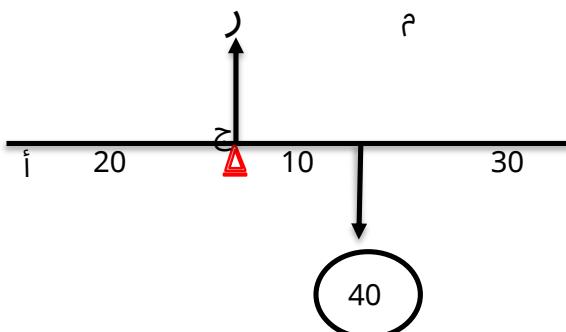
تعابير توضح حالة التوازن:

على وشك التحرك - على وشك الدوران - دون الإخلال بالتوازن -

أقل وزن يمكن تعليقه - أقصى وزن يمكن تعليقه مثل (1):

ـ بقضيب منتظم طوله 60 سم وزنه 40 جم، يستند على دعامة على بعد 20 سم من النقطة A. يحافظ على توازن القضيب أفقياً بواسطة خيط رأسى خفيف متصل بنهايته B. أوجده مقدار الشد في الخيط ورد فعل الدعامة.

حل



$$r + T = 40$$

مجموع عزم القوى حول النقطة C يساوي صفرأ

$$40 \times 10 - T \times 40 = 0$$

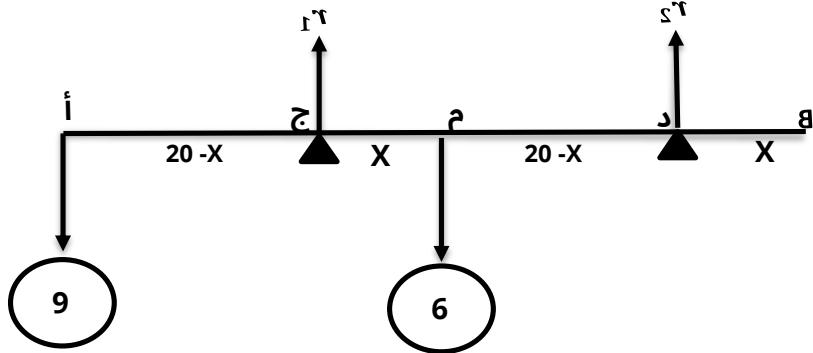
∴ الوزن = 10 جم

$$r = 30 \text{ جم. wt.}$$

مثال(2):

؟ب قضيب منتظم طوله 40 سم وزنه 6 كجم يستقر أفقياً على دعامتين عند النقطتين C وD، والمسافة بين الدعامتين 20 سم، ووجد أن القضيب على وشك الدوران إذا تم تعليق وزن 9 كجم من النقطة A. أوجد المسافة بين الدعامتين.

حل



عندما يتم تعليق وزن مقداره 9 كجم من النقطة A، فإن القضيب على وشك الدوران

$$\therefore R_2 = 0$$

مجموع عزوم القوى حول النقطة C = 0

$$9 \times 20 - 6 \times s = 0$$

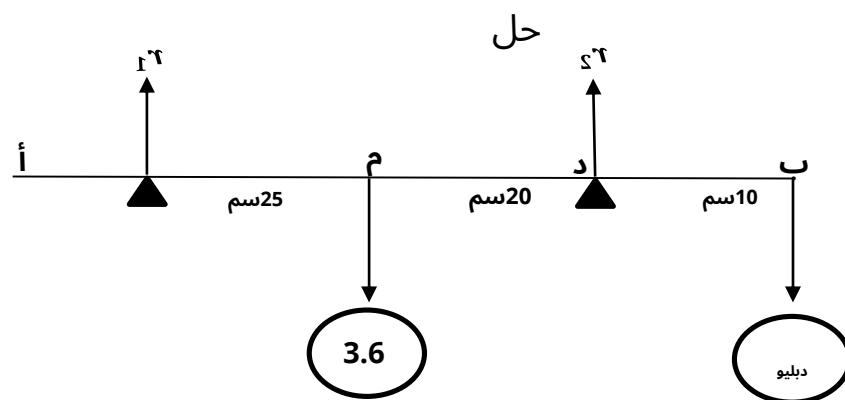
$$\therefore s = 12 \text{ سم} \quad 6X - 180 + 9X = 0$$

المسافة بين الدعامة C والنقطة A = 8 سم

المسافة بين الدعامة D والنقطة B = 12 سم

مثال(3):

؟ب قضيب منتظم طوله 60 سم وزنه 3.6 كجم، يستند أفقياً على دعامتين، إحداهما تبعد 5 سم عن النقطة A والأخرى تبعد 10 سم عن النقطة B. أوجد الضغط الواقع على الدعامتين، ثم ما هو أقصى وزن يمكن تعليقه من الطرف B دون الإخلال بتوازن القضيب؟



$$R_1 = 2 + 3.6$$

مجموع عزوم القوى حول 0 = 0

$$0 \times 45 - 25 \times 3.6$$

$\therefore R_2 = 2$ كجم وزن

$$R_1 = 1.6 \text{ كجم}$$

للحظان :

عند تعليق الوزن عند النقطة ب

$$R_1 = 0$$

مجموع عزوم القوى حول النقطة D = 0

$$W \times 10 - 3.6 \times 20 = 0$$

$$\therefore \text{الوزن} = 7.2 \text{ كجم}$$

التمرين(6)

1- دعامتان عند النقطتين A و B على مسافة 20 سم من طرفٍ لوح خشبي طوله 200 سم وزنه 16 كجم. يعمل عند منتصفه ويحمل صندوقاً وزنه 24 كجم على بعد 60 سم من الدعامة (أ).

ما مقدار الضغط الواقع على الدعامتين؟

والأخرى عند نقطة أخرى A عبارة عن لوح خشبي منتظم كتلته 10 كجم وطوله 4 أمتار، ويستقر في وضع أفقي على دعامتين، إحداهما عند النقطة 2-AB

على بعد متر واحد من النقطة B، وضح المسافة التي يقف عندها طفل وزنه 50 كجم على اللوح لجعل ردود الفعل على الدعامتين متساوية.

3- قضيب AB طوله 90 سم وزنه 50 نيوتن، ويؤثر عند منتصفه، يستقر في وضع أفقي على دعامتين، إحداهما عند النقطة A والأخرى عند النقطة C

على بعد 30 سم من النقطة B ويحمل وزناً مقداره 20 نيوتن عند نقطة تبعد 15 سم عن B، حدد قيم الضغط على كل دعامة، واحسب أيضاً مقدار الوزن الذي يجب تعليقه من الطرف B لجعل القضيب على وشك الدوران.

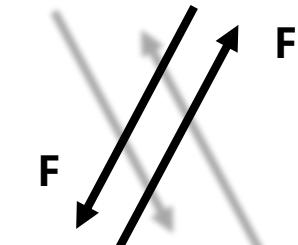
4- قضيب منتظم طوله متراً وكتلته 75 كجم يستقر في وضع أفقي إذا كان القضيب مثبتاً على دعامتين عند طرفيه، وعلقَ وزن مقداره 15 كجم من نقطة على القضيب تبعد 50 سم عن أحد طرفيه، فأوجد رد الفعل على كل دعامة.

الدرس السابع

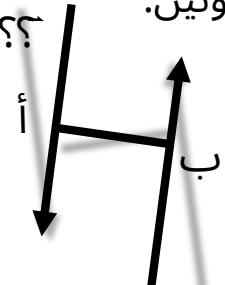
زوج

تعريف:

العزم المزدوج: نظام من قوتين متساويتين في المقدار وفي اتجاهين متعاكسين، وتعمل في مسارات عمل مختلفة. نظرية:



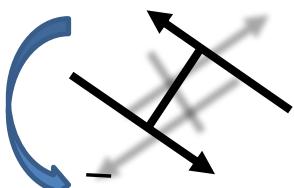
عزم الأزدواج هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التي نحسب عندها عزوم القوتين.



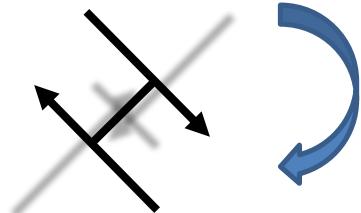
$$M = F \times r$$

- معيار لحظة الزوجين =

مقدار أحدي القوتين \times المسافة العمودية بين؟؟ في خط عمل قوتين



$$M = F \times r$$



- تكون إشارة العزم الجبري للزوج سالبة إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

- تكون إشارة العزم الجبري للزوج موجبة إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة.

تعريف:

- إذا كان الزوجان في حالة توازن، فإن مجموع عزميهما يساوي صفرأ.

$$\sum M = 0$$

- إذا كان الزوجان متكافئين، فإن $M_1 = M_2$

مثال:

قوتان O_1 و O_2 يشكلان زوجاً. أوجد a و b

حل

$$\therefore \vec{r} = 1\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{تشكل القوتان عزماً مزدوجاً :}$$

$$2- \quad b = 5$$

المثال الثاني:

إذا كان مقدار عزم ازدواج القوة 350 نيوتن.متر، ومقدار إحدى القوتين 70 نيوتن، فما هو طول

ذراع اللحظة.

حل

$$\therefore = 5 \quad \text{إذن } 70 = 350 \text{ ر} \quad M = F \times r$$

المثال 3:

$$\text{قوتان } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ تتشكل} \quad \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\text{أوجد قيمة } a + b + c \text{ زوجان.}$$

حل

$$\therefore + + = 1 \quad \therefore 3 = 9, 5, 1 \quad b = 9, 5, 1$$

المثال 4:

لو $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تشكل قوتان ازدواجاً حيث $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ي العمل في النقطة A (1, 1) إذا كان التأثير عند النقطة B (-2, -1)، فأوجد عزم الأزدواج وطول العمود المرسوم من A على خط عمل \vec{c} .

حل

$$\therefore \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2, -1) + (1, 1) + (3, -2) = (2, 0)$$

$$\therefore \text{وحدة الطول} = \sqrt{13}$$

$$M = F \times r$$

التمرين(7)

1. قوتان Ω_1 ، Ω_2 = 3 Ω - Ω ، يشكلان زوجاً. أوجد (Ω ، ب)

2. يتكون عزم الدوران من قوتين، كل منهما مقدارها 12 نيوتن، وطولها

المسافة العمودية بينهما 8 سم تعادل عزم قوتين

المسافة العمودية بينهما 6 سم. أوجد مقدار كل منهما

قوتان

3. إذا $\Omega_1 = \Omega_2 = 4 \Omega$ - ب، يجا - 5 جا يشكلان زوجاً. أوجد Ω + ب

4. إذا $\Omega_1 = \Omega_2 = 20$ ك، ثم: ابحث $\Omega_1 - \Omega_2$ هما زوجان متوازنان و

5. إذا $\Omega_1 = \Omega_2 = 20$ ك، هناك قوتان تؤثران عند النقطتين (A) و (B) على التوالي

ويشكلان عزماً، ويكون متجه عزمهما $\Omega_1 = 20$ ك، $\Omega_2 = 10$ ك، يجد

1

الدرس(8)

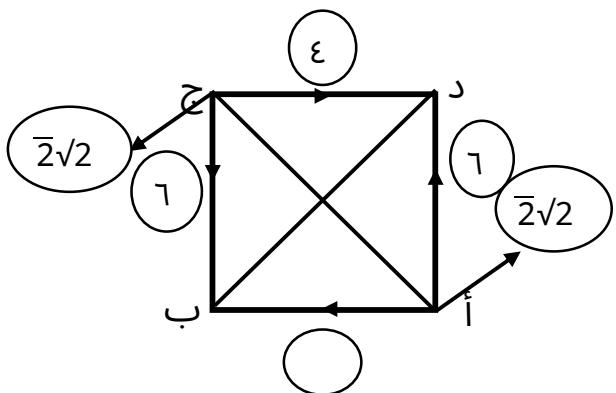
الزوجان الناتجان (الحالة الأولى)

الحالة الأولى:

إذا شكلت مجموعة من القوى العديدة من الأزواج، فإن المجموعة تعادل زوجاً محسلاً.

عزمها = مجموع القياس الجبri لعزم هذه الأزواج. مثال (1)

مربع طول ضلعه 30 سم، وتأثر عليه قوى مقدارها 6، 4، 6، 4 نيوتن عند A, B, C, D على التوالي وقوتين، كل منهما بمقدار $\sqrt{2}$ نيوتن عند النقاطين A و B في اتجاه $\angle B$ على التوالي. أوجد القياس الجبri لعزم الأزدواج الذي يكافيء النظام.



- تشكل القوتان (4, 4) عزماً مزدوجاً $\therefore m_1 =$

$$= 30 \times 4 = 120 \text{ نيوتن.سم}$$

- تشكل القوتان (6, 6) عزماً مزدوجاً $\therefore m_2 =$

$$= 30 \times 6 = 180 \text{ نيوتن.سم}$$

- القوتين ($\sqrt{2}, \sqrt{2}$) شكلوا زوجين

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \text{ نيوتن.سم}$$

\therefore النظام مكافئ لعزم دوران، وقياس عزمه الجبri = $120 - 180 = -60$ نيوتن.سم

- تذكر ذلك:

- قطر المربع متعمدان ومتساويان في الطول وينصف كل منهما الآخر.

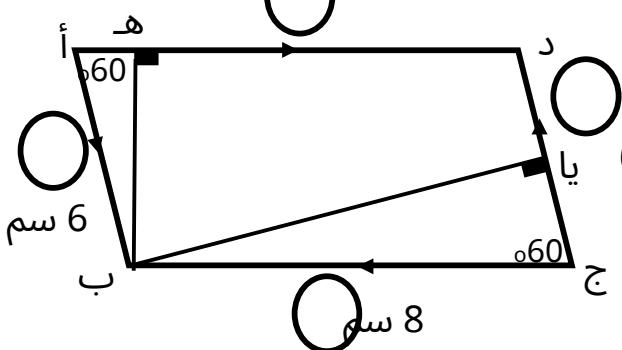
- طول قطر $= \sqrt{2}L$ هو طول الضلع L حيث L

مثال(2)

م، سم $AB = 6$ ، سم $BC = 8$ ، سم $CD = 6$ ، سم $DA = 9$. القوى الموزن $6, 6, 9$ غرامات، تعمل عند $\alpha = 60^\circ$. أثبت على التوالي أن النظام مكافئ لعزم الدوران، ثم أوجد عزمه.

حل

- القطران ليسا متساوين، وليسوا متعامدين، ولا ينصف أحدهما الآخر.
 - كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتتساويان في الطول.



$$\bar{\mu} \omega 3\sqrt{3} = \bar{\mu} BE = 6 \sin 60$$

$$\omega 3\sqrt{3} = \text{BO} = 8 \sin 60$$

- تشكل القوتان (6، 6) عزماً مزدوجاً .

$$\text{الوزن بالграмм/سم}^3 = 3\sqrt{24} - 3\sqrt{4} \times$$

- تشكل القوتان (٩، ٩) عزماً مزدوجاً ∴

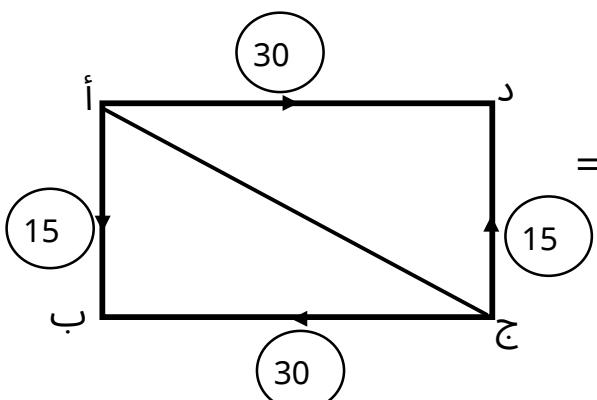
$$\text{الارتفاع} = \sqrt{3} \times 9 = 3\sqrt{3} \text{ سم}$$

- .::النظام يعادل زوجاً من الأزواج،

المقياس الجبرى لعزمها = $\sqrt{3}$ الوزن الإجمالى سم

مثال(4)

سم. قوى مقدارها $AB = 30$ سم و $BC = 40$ سم مستطيل فيه $ABCD$ قانون نيوتن $15, 30, 15, 30$ ، أثبت، على التوالي، أن النظام مكافئ لعزم دوران، ثم أوجد عزمه، ثم أوجد قوتين تعملان بشكل عمودي على \vec{J} عند النقطتين A و C اللتين تجعلان النظام في حالة توازن.



حل

- تشكل القوتان (15، 15) عزماً مزدوجاً . \therefore

$$600 \text{ نیوتن.سم} = 40 \times 15$$

- تشكل القوتان (30، 30) عزماً مزدوجاً

$\therefore M_2 = 30 \times 30 = 900$ نيوتن.سم.
النظام مكافئ لعزم دوران.

المقياس الجبري لعزمها = 300 نيوتن.سم

$F \times AC - 300 = 0$ صفر ← لجعل النظام في حالة توازن -

القوتان هما 6 و 6 نيوتن ← $F = 6$ نيوتن -

تذكّر ذلك:

- قطر المستطيل متساويان في الطول، وليس

متعمدان وينصف كل منهما الآخر

- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان في الطول.

- جميع ملائكتها متساوون في القياس، كل واحد منهم قياسه ٩٠°

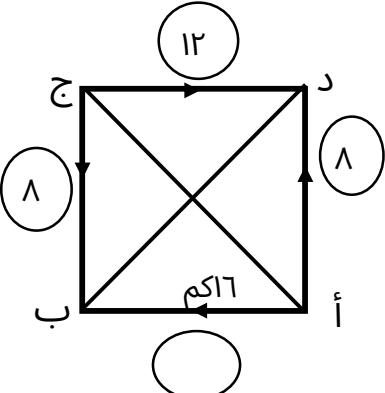
التمرين(8)

1. في الشكل المقابل:

مربع ABCDI

أوجد المقياس الجبri لعزم

زوج من قوى النظام الموضحة في الشكل.



وخط علماهما في ،C و A سم. تؤثر قوتان مقدار كل منهما 39 نيوتن عند نقطتين 5

،سم 12 = AB مستطيل فيه 2. ABCD =

اتجاه؟؟د، ؟؟ب. حدد معيار لحظة الزوجين

سم. قوى BC = 40 سم، و AB = 30 سم

قوة مقدارها 15، 30، 15، 30 نيوتن تؤثر على ؟؟أ، ؟؟ج، ؟؟ج، ؟؟ج، على التوالي،

المقياس الجبri لعزم القوى المعطاة. إذا أثّرت قوتان عند نقطتين

النقطتان A و C عموديتان على ؟؟ج مما يجعل النظام في حالة توازن

أوجد القوتين.

. m) 60 ج = 4. ABCD = 6 سم، AD = 8 سم، CD = 6 سم متوازي أضلاع فيه .

تؤثّر قوى مقدارها 8، 10، 8، 10 غرامات عند ؟؟، ؟؟، ؟؟، ؟؟ على التوالي

أثبت أنّ النظام مكافئ لعزم دوران، ثم أوجد عزمه.

٢٣

الدرس(9)

الزوج الناتج (الثاني والثالث)

الحالة الثانية:

يقال إن نظام القوى المستوية مكافئ لعزم دوران إذا تحققت الشروط التالية معاً:

1. مجموع المكونات الجبرية للقوى في أي اتجاه = صفر.

2. مجموع عزم القوى حول أي نقطة ≠ 0

الحالة الثالثة:

إذا كان مجموع القياس الجبري لعزم نظام من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقاط غير متوازية في مستواها ثابتاً ولا يساوي الصفر، فإن هذا النظام المكافئ لعزم الدوران يساوي هذا الثابت.

:مثال(1)

$$= 3\sigma - 6\sigma\omega \quad = -6\sigma + \sigma_3 \quad = \sigma + 2\sigma\omega \quad = 2\sigma + 3\sigma_1 \quad \text{قوى}\sigma$$

قم بالتأثير عند النقاط A(2,-4), B(3,2), C(1,2), D(1,1).

أثبت أن النظام مكافئ لعزم ثنائي، ثم أوجد عزمه.

حل

$$\sigma = (6-, 3) + (6, 1-) + (1, 2) + (2, 3) = ??$$

$$??\sigma = (6-, 3) \times (1, 1) + (6, 1-) \times (1, 2) + (1, 2) \times (3, 2) + (2, 3) \times (2, 4)$$

$$= ??6 - ??9 + ??4 + ??2 - ??13$$

النظام يعادل زوجاً

المقياس الجبري لعزمها = 6 وحدة عزم

مثال(2):

A) 1, 2, B)-3, 4 = فعلى 3 - 4 0, 01 القوتين على التوالي. أثبت أنهما يشكلان زوجاً، ثم أوجد معيار لحظته.

حل

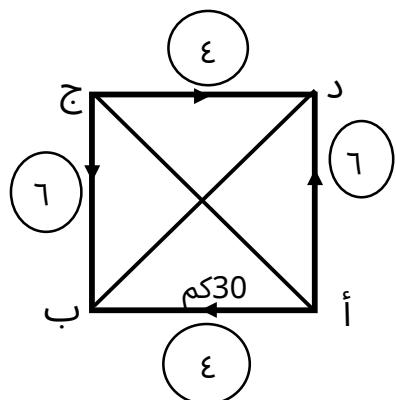
$$0 = (4, 3-) + (4-, 3) = ??$$

$$?? = ?? \times 10- = (4-, 3) \times (2-, 4) = ??$$

النظام مكافئ لعزم دوران معياره = 10 وحدة عزم مثال (3):

مربع طول ضلعه 30 سم، وقوى مقدارها 8, 10, 8, 10 نيوتن يعزم في على التوالي. أوجد المقياس الجibri لعزم

الازدواج الذي يكافيء النظام.



حل

$$= -6 \times 30 + 4 \times 30 = -60 . ??$$

$$= -6 \times 30 + 4 \times 30 = -60 . ??$$

$$= -6 \times 30 + 4 \times 30 = -60 . ??$$

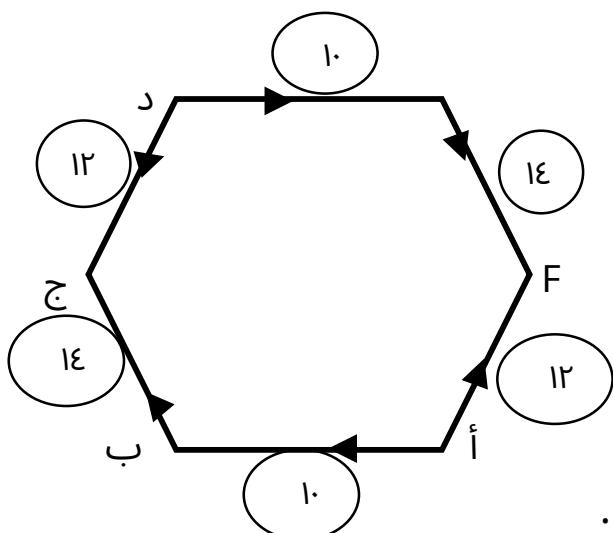
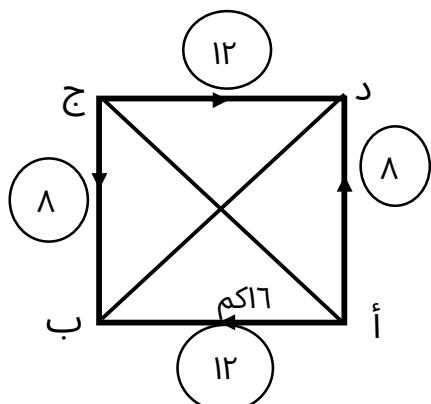
النظام المكافئ للزوج،

المقياس الجيري لعزمها = -60 نيوتن. سم

لاحظ ما يلي:

يمكن حل هذا المثال باستخدام الحالة الأولى.

التمرين (9)



1. في الشكل المقابل:
باستخدام الحالة الثالثة

أوجد المقياس الجبري للعزم
من الزوج المكافئ للنظام المعطى.

2. في الشكل المقابل: ABCDEF هو شكل
سداسي منتظم طول ضلعه 10 سم.

باستخدام الحالة الثالثة
أوجد المقياس الجibri للعزم

من الزوجين المكافئين للنظام المعطى. لاحظ ما يلي:

المسافة العمودية بين أي ضلعين متوازيين في الشكل المنتظم

الشكل السداسي الذي طول ضلعه L هو $\sqrt{3}$

القوى 3. على التوالي (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0) = التصرف عند النقاط

A(1, 0), B(2, 1), C(3, 2).

أثبت أن النظام مكافئ لزوج، ثم أوجد معيار عزمه.

الدرس(10)

الحالة الرابعة:

إذا أثرت ثلاث قوى متساوية على جسم صلب وتم تمثيلها بالكامل بأضلاع مثلث مأخوذة بنفس الطريقة، فإن هذا النظام يعادل عزماً مزدوجاً.

$$\text{مقدار عزمه} = 2 \times \text{مساحة المثلث} \times \text{حجم}$$

تمثل القوة وحدة الطول

- تعمم هذه القاعدة لتشمل أكثر من ثلاث قوى. مثال (1):

المثلث ABC هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 10 سم، وقوى متساوية فيه قوته مقدارها 2 نيوتن تؤثر على ?? ، ?? ، ?? على التوالي. أوجد مقدار عزم الأزدواج المكافئ للنظام.

حل

$$\frac{5}{5} \quad \frac{1}{10}^2 = \frac{1}{h}$$

القوى في ترتيب دوري واحد

$$= 1 \times 10 \sin 60^\circ \times 10 \times \frac{1}{2}$$

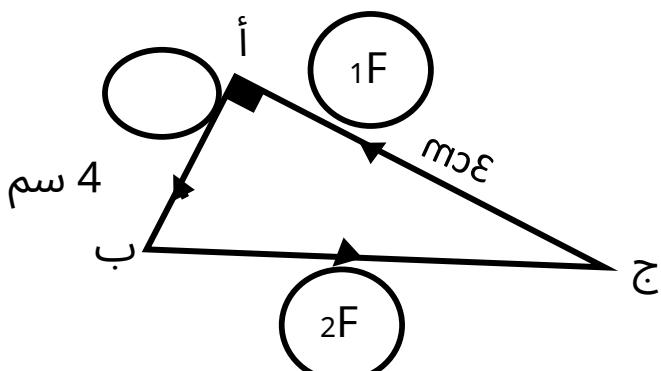
$$\text{مقدار عزمه} = 2 \times$$

مثال (2):

المثلث ABC قائم الزاوية عند النقطة A، حيث AB = 4 سم و AC = 3 سم كما هو موضح

تمثيل جوانب الـ

المثلث. أوجد قيمة $F_1 + F_2$.



حل

سم(نظرية فيثاغورس) $BC = 5$
القوى في ترتيب دوري واحد وممثلة بالكامل بأضلاع المثلث.

$$= 10 \quad 2 = 6 \quad , \quad 1 \therefore - \quad - \frac{2}{5} = 1 \frac{8}{34} \therefore$$

16 نيكوين = 2+ 1∴

مثال(3):

هي نقطة المنتصف لـ ?? ٠ سم، و $AB = 9$, $BC = 24$ مستطيل فيه $ABCD$, تؤثر قوى مقدارها 18 و 48 و 30 و 24 غراماً عند ??, ??, ??, ?? على التوالي. أثبت أن النظام يكافئ عزماً مزدوجاً، ثم أوجد مقدار عزمه.

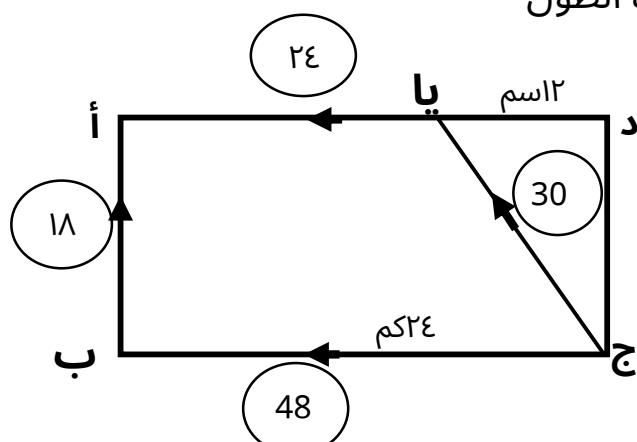
حل

سم(نظرية فيثاغورس) $CO = 15$
القوى في ترتيب دوري واحد وممثلة بالكامل بأضلاع المثلث.

$\therefore \frac{2}{12} = \frac{24}{24} = \frac{48}{48} = \frac{1}{9}$: النظام يعادل زوجاً

مقدار عزمه = $2 \times$ مساحة المثلث \times حجم

تمثل القوة وحدة الطول



مقدار عزمه =

$$= 2 \times 9 \times (24 + 12) \times 2 \frac{1}{2} \text{ غ/كم}^2$$

(التمرين 10)

1. المثلث ABC فيه $AB = AC = 13$ سم، وقوى $BC = 24$ سم، تؤثر زلازل بقوة 39 و 72 و 39 نيوتن على جسم، أثبت أن النظام يكافئ عزماً مزدوجاً، ثم أوجد مقدار عزمه.

2. ABCD هي نقطة المنتصف X، $AB = 9$ سم، $BC = 24$ سم مستطيل فيه تؤثر قوى بمقادير 27 و 36 و 45 نيوتن عند على التوالي. أثبت أن النظام مكافئ لعزم دوران، ثم أوجد مقدار عزمه.

3. المثلث ABC هو مثلث فيه $AB = 7$ سم، $BC = 8$ سم، $m(\angle A) = 120^\circ$ ، تؤثر قوى مقدارها 17.5 و 20.5 و 32.5 نيوتن عند على التوالي، إذا كان النظام مكافئ لعزم دوران، فأوجد مقدار عزمه.

4. ثلات قوى مقدارها 10.5 و 12 و 19.5 نيوتن ممثلة تمثيلاً كاملاً بواسطة قطعة الخط الموجه على التوالي على المثلث ABC حيث $AC = 13$ سم، ثم

هو شبه منحرف فيه $F_0 = 90$ سم، قوى مقدارها $F_1 = 15$ ، $F_2 = 26$ ، $F_3 = 10$ ، $AD = 12$ سم، أثبت قانون نيوتن بشأن

إذا كان النظام مكافئ لعزم دوران، فأوجد قيمة $F_1 + F_2 + F_3$ على التوالي.

امتحان

السؤال الأول

مثلث فيه $AB = 7 \text{ m}$, $BC = 8 \text{ m}$, $AC = 120 \text{ N}$ مقدارها 17.5 N و 20.5 N نيوتن على \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} على التوالي، إذا كان النظام مكافئاً لعزم دوران، فأوجد مقدار عزمه.

النقطة 2. إذا كان التأثير عند النقطة A , فأوجد عزم الدوران. حول النقطة B (2, 5).

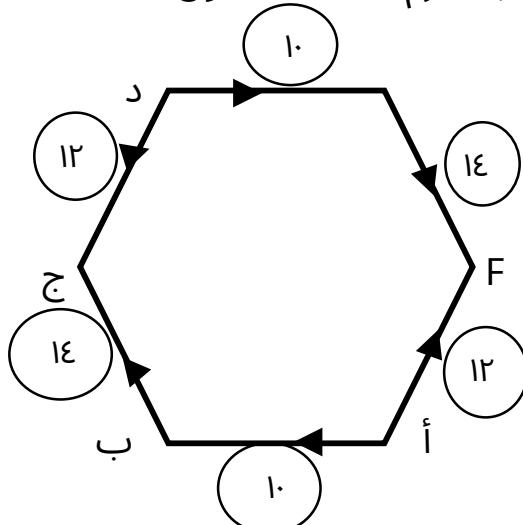
السؤال الثاني:

قوتان O_1 و O_2 = $5 \text{ N} - 4 \text{ N}$, O_3 = $4 \text{ N} - 4 \text{ N}$, O_4 = $4 \text{ N} - 4 \text{ N}$ قم بالتصرف عند نقطة الأصل، وأثبت أن يمر خط عمل محصلة القوى بالنقطة A (3.4). أوجد متجه عزم المحصلة حول النقطة B (5, 2).

في الشكل المقابل:

هو شكل سداسي منتظم طول ضلعه 10 سم $ABCDEF$

أوجد المقياس الجبري لعزم الأزدواج المكافئ للنظام المعطى.



السؤال الثالث:

إذا كانت القوة $\vec{F}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ يؤثر عند النقطة A , لحظة t , حول نقطة الأصل يساوي $16 + 2\vec{i} + 3\vec{j}$, ثم أوجد قيمة

. $m = 8$ سم، $AD = 8$ سم، $CD = 6$ سم متوازي أضلاع فيه $ABCD$. $\angle D = 60^\circ$.

تؤثر قوى مقدارها 8، 10، 8، 10 غرامات عند $???$ على التوالي

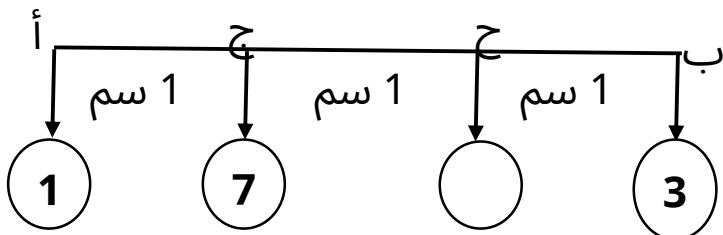
أثبت أن النظام مكافئ لعزم دوران، ثم أوجد عزمه.

السؤال الرابع:

1. قوتان متوازيتان مقدارهما 4 و 6 نيوتن تؤثران عند النقطتين A و B في نفس الاتجاه، $AB = 25$ سم، أوجد محصلة القوتين.

2. عزم الدوران الذي يتكون من قوتين، مقدار كل منهما 12 نيوتن، والمسافة العمودية بينهما تساوي 8 سم، يكفي عزم دوران آخر يتكون من قوتين والمسافة العمودية بينهما

أوجدها مقدار القوتين عند مسافة 6 سم.



السؤال الخامس:

1. في الشكل المقابل: وضعت أربعة أوزان مقدارها 1، 5، 7، 3 كجم على قضيب خفيف. حدد نقطة التعليق التي تجعل القضيب في وضع أفقي.

2. أب قضيب منتظم طوله 40 سم وزنه 6 كجم، يستند على دعامتين عند النقطتين C و D في وضع أفقي، والمسافة بين الدعامتين 20 سم. إذا علق وزن مقداره 9 كجم عند النقطة A، فإن ذلك يجعل القضيب على وشك الدوران. جد موضع الدعامتين.

تقييم