Student name: Abao Zhang (张宝)

Student number: 12332459

Homework 4

Question 1

(a)

可以使用数学归纳法证明：

- 当$k = 1$时，$f^{(1)} = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1-1} \frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$成立，
- 假设$k = i$时成立，则有：

$$f^{(i)}(x) = (-1)^{i-1} \frac{(i-1)!}{(1+x)^i}$$

而$k = i + 1$ 时

$$\begin{aligned} f^{(i+1)}(x) = \frac{d\left(f^{(i)}(x)\right)}{dx} &= (-1)^{i-1} \frac{(i-1)!}{(1+x)^{i+1}}(-i) \\ &= (-1)^i \frac{i!}{(1+x)^{i+1}} \end{aligned}$$

故$k = i + 1$时也成立。故$f(k) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$成立，命题得证。

(b)

根据泰勒展开式可知：

$$P_{N(x)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

当$x_0 = 0$，代入$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}((k-1)!)$ 和$f(0) = 0$：

$$P_{N(x)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{N-1} x^N}{N}$$

Question 2

(a)

$$P(4) = -0.02 \cdot 4^3 + 0.1 \cdot 4^2 - 0.2 \cdot 4 + 1.66 = 1.18$$

(b)

$$P'(x) = -0.06x^2 + 0.2x - 0.2$$

代入$x = 4$，求得$P'(4) = -0.36$

(c)

$$\begin{aligned}\int_1^4 P(x)dx &= \int_1^4 (-0.02x^3 + 0.1x^2 - 0.2x + 1.66)dx \\ &= \left(-0.005x^4 + \frac{0.1x^3}{3} - 0.1x^2 + 1.66x\right)|_1^4 \\ &= 6.855\end{aligned}$$

(d)

$$P(5.5) = -0.02 \cdot 5.5^3 + 0.1 \cdot 5.5^2 - 0.2 \cdot 5.5 + 1.66 = 0.66$$

(e)

不妨假设$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$，代入四个点，即可组成关于$a_i, i \in \{0,1,2,3\}$ 的方程组，简写为$AX = B$，A为范德蒙行列式，必有唯一解。可以直接通过解方程组的方式解出对应系数。

Question 3

(a)

首先计算三个插值点的值

$$
\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) = f(1) = 1 \\
y_1 &= f(x_1) = f(1.25) \approx 1.32 \\
y_2 &= f(x_2) = f(1.5) \approx 1.84
\end{aligned}
$$

由拉格朗日插值法：

$$
P_{n(x)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{i=0, j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}
$$

代入三个插值点

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{(x-1.25)(x-1.5)}{(-0.25)\cdot(-0.5)} + y_1 \frac{(x-1)(x-1.5)}{0.25\cdot(-0.25)} + y_2 \frac{(x-1)(x-1.25)}{0.5\cdot 0.25} \\
&= 1.55x^2 - 2.20x + 1.65
\end{aligned}
$$

上面相关系数相关系数已经四舍五入保留了两位小数，这部分手动计算（分配律）比较复杂，可以使用我编写的脚本 `question-3.py` 进行验证。

(b)

使用$P_2(x)$作为$f(x)$估计计算$[1, 1.5]$上的均值为：

$$
\frac{\int_1^{1.5} P_2(x)dx}{1.5 - 1} \approx 1.35
$$

这里使用代码进行计算了，具体如下

```
def IP(x):
    return (1.54951318788779 * x**3 / 3 - 2.1995483555447 * x**2 / 2 +
1.65003516765691 * x)
print("均值:", (IP(1.5) - IP(1)) / (1.5 - 1))
```

(c)

有题意可知，此时$h = 0.25$，下面计算M_3

$$
\begin{aligned}
&|f^{(N+1)}(x)| \leq M_{N+1} \\
&M_3 = \max|f^{(3)}(x)| = \max \frac{d(x^x)}{dx} = \max x^x \left((\ln(x)+1)^3 + 3\frac{\ln(x)+1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)
\end{aligned}
$$

根据f^x性质可以知道，其在$x = 1.5$上取得极值，故$M_3 \approx 9.45$ 最后计算误差

$$
|E_2(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}} \approx 0.01
$$

使用 `question-3.py` 计算，可以得到$E_2(x) = 0.009469975837730113$这一较精确的值

Question 4

对于本题，简单代入三个点的值组成方程组即可，本质是一个解关于A, B, C方程组，这里使用 `question-4.py` 进行计算

(a)

代入几个值

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解得$\begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=4 \end{cases}$

(b)

代入几个值

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解得$\begin{cases} A=3.5 \\ B=-2.5 \\ C=1.5 \end{cases}$

(c)

代入几个值

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解得$\begin{cases} A\approx 7.33 \\ B\approx -1.33 \\ C\approx 0.33 \end{cases}$，结果保留了两位小数

(d)

不能，因为线性方程组无解，也就是$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$的行列式值为 0。故无法找到对应的$A, B, C$

Question 5

使用 `question-5.py` 进行计算

(a)

k	x_k	$f[x_k]$	First divided difference	Second divided difference	Third divided difference	Fourth divided difference
0	0	1.				
1	1	0.36787944	−0.63212056			
2	2	0.13533528	−0.23254416	0.1997882		
3	3	0.04978707	−0.08554821	0.07349797	−0.04209674	
4	4	0.01831564	−0.03147143	0.02703839	−0.01548653	0.00665255

(b)

下面结果均为 `question-5.py` 的输出

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) = 1 - 0.63212056x \\
P_2(x) &= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 0.199788200446864x^2 - 0.831908759275422x + 1.0 \\
P_3(x) &= -0.0420967429712745x^3 + 0.326078429360688x^2 - \\
&\quad 0.916102245217971x + 1.0 \\
P_4(x) &= 0.00665255417296605x^4 - 0.0820120680090708x^3 + \\
&\quad 0.399256525263314x^2 - 0.956017570255767x + 1.0
\end{aligned}
$$

(c)

这部分依然使用 `question-5.py` 进行计算。增加$x = 0.5, 1.5$两个采样点后，可以额外计算 P_5, P_6

$$
\begin{aligned}
P_5(x) &= -0.00165758860494877x^5 + 0.0232284402224537x^4 - \\
&\quad 0.140027669182278x^3 + 0.482135955510753x^2 - \\
&\quad 0.995799696774538x + 1.0 \\
P_6(x) &= 0.000276960893235427x^6 - 0.00456567798392075x^5 + \\
&\quad 0.0343068759518708x^4 - 0.158722529475669x^3 + \\
&\quad 0.495707039279288x^2 - 0.999123227493363x + 1.0
\end{aligned}
$$

(d)

根据泰展展开公式$f(x) = P_{n(x)} + R_{n(c)}$ 可以知道：

$$
f(x) - P_6(x) = R_6(c) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}c^7 = -\frac{e^{-c}}{7!}c^7
$$

其中$R_6(x)$为拉格朗日余项，$c \in (-\infty, \infty)$，该值可能为正号，也可能为符号，故无法比较。

Question 6