Student name: Abao Zhang (张宝)

Student number: 12332459

Homework 4

Question 1

(a)

可以使用数学归纳法证明：

- 当$k=1$时，$f^{(1)}=\frac{1}{1+x}=(-1)^{1-1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$成立，
- 假设$k=i$时成立，则有：

$$f^{(i)}(x)=(-1)^{i-1}\frac{(i-1)!}{(1+x)^i}$$

而$k=i+1$ 时

$$\begin{aligned}f^{(i+1)}(x)=\frac{d\left(f^{(i)}(x)\right)}{dx}&=(-1)^{i-1}\frac{(i-1)!}{(1+x)^{i+1}}(-i)\\&=(-1)^i\frac{i!}{(1+x)^{i+1}}\end{aligned}$$

故$k=i+1$时也成立。故$f(k)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$成立，命题得证。

(b)

根据泰勒展开式可知：

$$P_{N(x)}=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

当$x_0=0$，代入$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}((k-1)!)$ 和$f(0)=0$：

$$P_{N(x)}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{(-1)^{N-1}x^N}{N}$$

Question 2

(a)

$$P(4) = -0.02 \cdot 4^3 + 0.1 \cdot 4^2 - 0.2 \cdot 4 + 1.66 = 1.18$$

(b)

$$P'(x) = -0.06x^2 + 0.2x - 0.2$$

代入$x = 4$，求得$P'(4) = -0.36$

(c)

$$\begin{aligned}\int_1^4 P(x)dx &= \int_1^4 (-0.02x^3 + 0.1x^2 - 0.2x + 1.66)dx \\ &= \left(-0.005x^4 + \frac{0.1x^3}{3} - 0.1x^2 + 1.66x\right)|_1^4 \\ &= 6.855\end{aligned}$$

(d)

$$P(5.5) = -0.02 \cdot 5.5^3 + 0.1 \cdot 5.5^2 - 0.2 \cdot 5.5 + 1.66 = 0.66$$

(e)

不妨假设$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$，代入四个点，即可组成关于$a_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ 的方程组，简写为$AX = B$，A为范德蒙行列式，必有唯一解。可以直接通过解方程组的方式解出对应系数。

Question 3

(a)

首先计算三个插值点的值

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$$
$$y_1 = f(x_1) = f(1.25) \approx 1.32$$
$$y_2 = f(x_2) = f(1.5) \approx 1.84$$

由拉格朗日插值法：

$$P_{n(x)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{i=0, j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

代入三个插值点

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{(x-1.25)(x-1.5)}{(-0.25)\cdot(-0.5)} + y_1 \frac{(x-1)(x-1.5)}{0.25\cdot(-0.25)} + y_2 \frac{(x-1)(x-1.25)}{0.5\cdot 0.25} \\ &= 1.55x^2 - 2.20x + 1.65 \end{aligned}$$

上面相关系数相关系数已经四舍五入保留了两位小数，这部分手动计算（分配律）比较复杂，可以使用我编写的脚本 `question-3.py` 进行验证。

(b)

使用$P_2(x)$作为$f(x)$估计计算$[1, 1.5]$上的均值为：

$$\frac{\int_1^{1.5} P_2(x)dx}{1.5 - 1} \approx 1.35$$

这里使用代码进行计算了，具体如下

```
def IP(x):
    return (1.54951318788779 * x**3 / 3 - 2.1995483555447 * x**2 / 2 +
1.65003516765691 * x)
print("均值:", (IP(1.5) - IP(1)) / (1.5 - 1))
```

(c)

有题意可知，此时$h = 0.25$，下面计算M_3

$$\begin{aligned} &|f^{(N+1)}(x)| \leq M_{N+1} \\ &M_3 = \max|f^{(3)}(x)| = \max \frac{d(x^x)}{dx} = \max x^x \left((\ln(x)+1)^3 + 3\frac{\ln(x)+1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

根据f^x性质可以知道，其在$x = 1.5$上取得极值，故$M_3 \approx 9.45$ 最后计算误差

$$|E_2(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}} \approx 0.01$$

使用 `question-3.py` 计算，可以得到$E_2(x) = 0.009469975837730113$这一较精确的值

Question 4

对于本题，简单代入三个点的值组成方程组即可，本质是一个解关于A, B, C方程组，这里使用 `question-4.py` 进行计算

(a)

代入几个值

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解得$\begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=4 \end{cases}$

(b)

代入几个值

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解得$\begin{cases} A=3.5 \\ B=-2.5 \\ C=1.5 \end{cases}$

(c)

代入几个值

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解得$\begin{cases} A\approx 7.33 \\ B\approx -1.33 \\ C\approx 0.33 \end{cases}$，结果保留了两位小数

(d)

不能，因为线性方程组无解，也就是$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$的行列式值为 0。故无法找到对应的A, B, C

Question 5

根据牛顿插值多向式编写脚本，使用 question-5.py 进行计算，下面给出代码：

```
import numpy as np
from functools import reduce
import sympy as sp

def f(x):
    return np.exp(-x)

def newton(f, x):
    N = len(x)
    fx = f(x)
    print(fx)
    next_fx = fx
    f_f = []
    for i in range(2, N + 1):
        next_fx = np.array(
            [
                (next_fx[j + 1] - next_fx[j]) / (x[j + i - 1] - x[j])
                for j in range(N - i + 1)
            ]
        )
        f_f.append(next_fx)
        print(next_fx)

    X = sp.Symbol("x")
    Pi = fx[0]
    for i in range(N - 1):
        Pi = Pi + f_f[i][0] * reduce(
            lambda a, b: a * b, [(X - xi) for xi in x[: i + 1]]
        )
        print(f"P_{i+1}=", Pi.expand())

newton(f, np.array([0, 1, 2, 3, 4]))
print("增加 x=0.5, 1.5 之后")
newton(f, np.array([0, 1, 2, 3, 4, 0.5, 1.5]))
```

(a)

k	x_k	$f[x_k]$	First divided difference	Second divided difference	Third divided difference	Fourth divided difference
0	0	1.				
1	1	0.36787944	−0.63212056			
2	2	0.13533528	−0.23254416	0.1997882		
3	3	0.04978707	−0.08554821	0.07349797	−0.04209674	
4	4	0.01831564	−0.03147143	0.02703839	−0.01548653	0.00665255

(b)

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) = 1 - 0.63212056x \\
P_2(x) &= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 0.199788200446864x^2 - 0.831908759275422x + 1.0 \\
P_3(x) &= -0.0420967429712745x^3 + 0.326078429360688x^2 - \\
&\quad 0.916102245217971x + 1.0 \\
P_4(x) &= 0.00665255417296605x^4 - 0.0820120680090708x^3 + \\
&\quad 0.399256525263314x^2 - 0.956017570255767x + 1.0
\end{aligned}
$$

(c)

增加$x = 0.5, 1.5$两个采样点后，可以额外计算P_5, P_6

$$
\begin{aligned}
P_5(x) &= -0.00165758860494877x^5 + 0.0232284402224537x^4 - \\
&\quad 0.140027669182278x^3 + 0.482135955510753x^2 - \\
&\quad 0.995799696774538x + 1.0 \\
P_6(x) &= 0.000276960893235427x^6 - 0.00456567798392075x^5 + \\
&\quad 0.0343068759518708x^4 - 0.158722529475669x^3 + \\
&\quad 0.495707039279288x^2 - 0.999123227493363x + 1.0
\end{aligned}
$$

(d)

根据泰展展开公式$f(x) = P_{n(x)} + R_n(x)$ 可以知道：

$$
f(x) - P_6(x) = R_6(x) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}x^7 = -\frac{e^{-c}}{7!}x^7
$$

其中$R_6(x)$为拉格朗日余项，$c \in (-\infty, \infty)$， 也就是说$\begin{cases} f(x) > P_6(x) \text{ if } x < 0 \\ f(x) = P_6(x) \text{ if } x = 0 \\ f(x) < P_6(x) \text{ if } x > 0 \end{cases}$

Question 6

本文编写了 question-6.py 与前一问采用相同的 newton(f, x)函数，容易得到：

$$P_2(x) = -0.0696792757761424x^2 - 0.386739660114694x + 1.0$$

其多项式误差$E_2(x)$表示为如下，其中$c, x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} |E_2(x)| &= \left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!} \prod_{i=0}^{2} (x - x_i)\right| \\ &= \left|x^3 \frac{\sin(c)}{6} - 0.785398163397448x^2 \sin(c) + 0.822467033424113x \sin(c)\right| \end{aligned}$$

提取$\sin(c)$可以发现

$$\begin{aligned} |E_2(x)| &\leq \left|\frac{x^3}{6} - 0.785398163397448x^2 + 0.822467033424113x\right| \\ &\leq 0.248631697054710 \end{aligned}$$

在计算中，我使用了如下代码

```python
def f(x):
    if isinstance(x, sp.Symbol):
        return sp.cos(x)
    return np.cos(math.pi * x)

def E(f, X):
    N = len(X)
    x = sp.Symbol("x")
    c = sp.Symbol("c")
    Y = f(X)

    Enx = (
        reduce(lambda a, b: a * b, [x - xi for xi in X])
        * sp.diff(f(c), c, N)
        / math.factorial(N)
    )
    print(f"E_{N-1}(x)=", Enx.expand())
    print(f"E_{N-1}(x)<=", sp.maximum(Enx.subs(c, np.pi / 2), x, sp.Interval(0,
np.pi)))


newton(f, np.array([0, np.pi / 2, np.pi]))
E(f, np.array([0, np.pi / 2, np.pi]))
```

可以得到如下输出：

```
$ python homework4/question-6.py
[ 1.          0.22058404 -0.90268536]
[-0.49619161 -0.71509551]
[-0.06967928]
P_1= 1.0 - 0.496191610557587*x
P_2= -0.0696792757761424*x**2 - 0.386739660114694*x + 1.0
E_2(x)= x**3*sin(c)/6 - 0.785398163397448*x**2*sin(c) + 0.822467033424113*x*sin(c)
E_2(x)<= 0.248631697054710
```

Question 7

根据拉格朗日插值多项式公式

$$P_{N(x)} = \sum_{i=0}^{N} y_i L_{N,i}(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}
L_{2,0}(x) &= \prod_{j=0, j\neq 0}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \\
&= \frac{(x-0)\left(x - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 0\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)} \\
&= -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3} \\
L_{2,1}(x) &= \prod_{j=0, j\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \\
&= \frac{\left(x - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\left(x - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\left(0 - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\left(0 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)} \\
&= 1 - \frac{4x^2}{3} \\
L_{2,2}(x) &= \prod_{j=0, j\neq 2}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \\
&= \frac{\left(x - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)(x-0)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 0\right)} \\
&= \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2x^2}{3} \\
&= \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2x^2}{3}
\end{aligned}$$

Question 8

已知帕德近似如下：

$$R_{N,M}(x)=\frac{P_{N(x)}}{Q_{M(x)}}=\frac{\sum_{j=0}^{N}p_jx^j}{\left(1+\sum_{k=1}^{M}q_kx^k\right)}$$

代入$m=2,n=2$，于是有

$$R_{2,2}(x)=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{p_0+p_1x+p_2x^2}{1+q_1x+q_2x^2}$$

为了计算$R_{2,2}$，是可以使用$f(x)Q_{M(x)}-P_{N(x)}=Z(x)$，右侧$Z(x)$是$x^5$的同阶无穷小

$$\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-...\right)(1+q_1x+q_2x^2)-(p_0+p_1x+p_2x^2)=0x+0x^2+0x^3+0x^4+c_1x^5+c_2x^6+...$$

根据对应系数相等可以列出方程组：

$$\begin{aligned}1-p_0&=0\\-p_1+q_1-\frac{1}{2}&=0\\-p_2-\frac{q_1}{2}+q_2+\frac{1}{3}&=0\\\frac{q_1}{3}-\frac{q_2}{2}-\frac{1}{4}&=0\\-\frac{q_1}{4}+\frac{q_2}{3}+\frac{1}{5}&=0\end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases}p_0=1\\p_1=\frac{7}{10}\\p_2=\frac{1}{30}\\q_1=\frac{6}{5}\\q_2=\frac{3}{10}\end{cases}$$

故

$$R_{2,2}(x)=\frac{1+\frac{7}{10}x+\frac{1}{30}x^2}{1+\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}x^2}$$

解方程部分可以参考 `question-8.py`

(b)

联立两个方程组

$$\begin{cases}f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\\f(x)\approx R_{2,2}(x)=\frac{1+\frac{7}{10}x+\frac{1}{30}x^2}{1+\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}x^2}\end{cases}$$

即可得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{x} &\approx \frac{1+\frac{7}{10}x+\frac{1}{30}x^2}{1+\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}x^2} \\
\ln(1+x) &\approx \frac{x\left(1+\frac{7}{10}x+\frac{1}{30}x^2\right)}{1+\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}x^2} = \frac{30x+21x^2+x^3}{30+36x+9x^3}
\end{aligned}
$$

即命题成立

Question 9

这题我使用 python 重写了算法，采用了与题目三类似的方法计算，核心代码如下

```
from functools import reduce
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

def fit(f, X):
    N = len(X)
    Y = f(X)
    x = sp.Symbol("x")
    Pn = reduce(
        lambda a, b: a + b,
        [
            Y[i]
            * reduce(
                lambda a, b: a * b,
                [(x - X[j]) / (X[i] - X[j]) for j in range(N) if j != i],
            )
            for i in range(N)
        ],
    )

    def inference(val):
        return Pn.subs(x, val)

    return np.vectorize(inference)

# input 为采样点，也就是 x_i
input = np.array([0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1])

# plot_x 会绘制曲线的间隔点
plot_x = np.linspace(-1, 2, 10, endpoint=True)
```

这里使用了 sympy 库进行多项式表达，并定义了采样点，绘图仅仅绘制$x \in [-1, 2]$中的曲线，并将采样点使用蓝色小点进行标识。

总体而言，拟合效果在$x \in [-1, 2]$中都比较不错。

(a)

绘制代码如下：

```
f = np.exp
plt.plot(plot_x, fit(f, input)(plot_x), label="P(x)")
plt.plot(plot_x, f(plot_x), label="f(x)")
plt.scatter(input, f(input))
plt.legend()
plt.savefig("figure-exp.png")
plt.show()
```

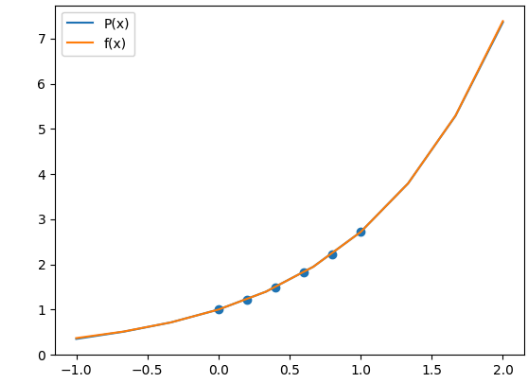

Figure 1: $f(x) = e^x$及其拉格朗日近似$P(x)$

(b)

绘制代码如下：

```
f = np.sin
plt.plot(plot_x, fit(f, input)(plot_x), label="P(x)")
plt.plot(plot_x, f(plot_x), label="f(x)")
plt.scatter(input, f(input))
plt.legend()
plt.savefig("figure-sin")
plt.show()
```

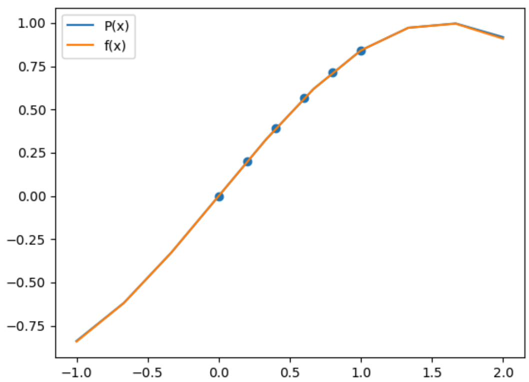

Figure 2: $f(x) = \sin(x)$及其拉格朗日近似$P(x)$

(c)

绘制代码如下：

```
f = np.vectorize(lambda x: (x + 1) ** (x + 1))
plt.plot(plot_x, fit(f, input)(plot_x), label="P(x)")
plt.plot(plot_x, f(plot_x), label="f(x)")
plt.scatter(input, f(input))
plt.legend()
plt.savefig("figure-x+1")
plt.show()
```

这里略有不同，预先定义了函数$f(x) = (1 + x)^{1+x}$。

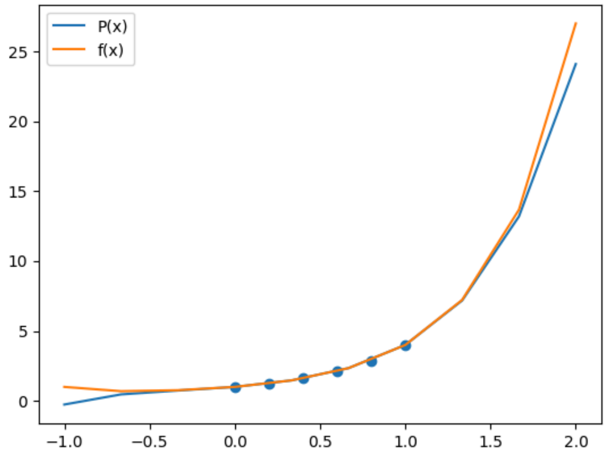

Figure 3: $f(x) = (x + 1)^{x+1}$及其拉格朗日近似$P(x)$