Métodos Numéricos 2020

Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Facultad de Ingeniería (FIng), Universidad de la República (UdelaR)

Obligatorio 2

28 de octubre de 2020

1. Aplicación de diferencias finitas de la ecuación de calor unidimensional

En un sistema unidimensional, con coordenada cartesiana x, llamaremos $u(x,t)$ al perfil de temperaturas en función del tiempo. La modelización de la ecuación del calor en este esquema está dada por la Ecuación 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in (a,b), t > 0 \tag{1}$$

Donde μ es un coeficiente dado que representa la conductividad térmica del material, y f es una función que representa la tasa de producción de calor en el material.

Se consideran condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas $u(a,t) = u(b,t) = 0$ para cualquier $t > 0$ y condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ para $x \in [a,b]$. Se denota por $u_j(t)$ una aproximación de $u(x_j,t)$, con $j = 1,2,\ldots,N$.

La Ecuación 2 es una *semidiscretización* de la Ecuación 1.

$$\begin{cases} \frac{du_j(t)}{dt} - \frac{\mu}{h^2}\left(u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)\right) = f_j(t), \quad j = 1,2,\ldots,N-1 \\ \\ u_0(t) = u_N(t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1. Si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es suficientemente regular en un entorno de un punto genérico $\bar{x} \in (a,b)$, probar que $\delta u^2(\bar{x})$, donde

   $$\delta u^2(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x}-h)}{h^2} \tag{3}$$

   proporciona una aproximación de segundo orden de $u''(\bar{x})$ con respecto a h.

2. Deducir que la Ecuación 2 produce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma.

   $$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) = -\frac{\mu}{h^2}\mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t > 0 \\ \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) \end{cases} \tag{4}$$

Donde $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{N-1}(t))^T$, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{N-1}(t))^T$, $\mathbf{u}_0 = (u_0(x_1), u_0(x_2), \ldots, u_0(x_{N-1}))^T$. Explicitar la forma de la matriz $\mathbf{A}$.

3. Verificar que los autovalores de $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{(N-1)\times(N-1)}$ son

$$\lambda_j = 2\left(1 - \cos\left(j\frac{\pi}{N}\right)\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{5}$$

mientras que los correspondientes autovectores son

$$\mathbf{q}_j = \left(\sin\left(j\frac{\pi}{N}\right), \sin\left(2j\frac{\pi}{N}\right), \ldots, \sin\left((N-1)j\frac{\pi}{N}\right)\right)^T \tag{6}$$

Un esquema popular para la integración con respecto al tiempo del sistema de ecuaciones expuesto en la Ecuación 4 es el llamado θ-*método*. Sea $\Delta t > 0$ un paso de tiempo constante, y denotamos por v^k el valor de una variable v referida al nivel de tiempo $t^k = k\Delta t$. Entonces la Ecuación 7 corresponde a la aplicación del θ-*método* aplicado al problema de la ecuación de calor unidimensional.

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k}{\Delta t} = -\frac{\mu}{h^2}\mathbf{A}\left(\theta\mathbf{u}^{k+1} + (1-\theta)\mathbf{u}^k\right) + \theta\mathbf{f}^{k+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^k, \quad k = 0, 1, \ldots \\ \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \end{cases} \tag{7}$$

La Ecuación 7 puede escribirse equivalentemente mediante la Ecuación 8.

$$\left(I + \frac{\mu}{h^2}\theta\Delta t\mathbf{A}\right)\mathbf{u}^{k+1} = \left(I - \frac{\mu}{h^2}\Delta t(1-\theta)\mathbf{A}\right)\mathbf{u}^k + \mathbf{g}^{k+1} \tag{8}$$

Donde $\mathbf{g}^{k+1} = \Delta t\left(\theta\mathbf{f}^{k+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^k\right)$ e I es la matriz identidad de tamaño $(N-1)\times(N-1)$.

4. A partir de los resultados obtenidos en la parte 3, deducir que la matriz D, definida como

$$\mathbf{D} = I + \frac{\mu}{h^2}\theta\Delta t\mathbf{A}$$

es invertible.

5. Considere una barra de longitud 1 sometida a un perfil de temperaturas inicial dado por $u_0(x) = 1000x(1-x)\left(1 + \frac{3}{2}x^3\right)$, donde $t = 0$. Las condiciones de borde están dadas por $u(0,t) = u(1,t) = 0, \forall t$. Se conoce además que el sistema está inmerso en una fuente de generación calorífica modelada por $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 1000\sqrt{|1-t|}$.
   a) Obtener el sistema de ecuaciones diferenciales de la Ecuación 4 para este problema en particular.
   b) Obtener una estimación de la solución mediante el comando *lsode* de *Octave*. Incluir en la presentación de resultados una representación gráfica de la barra, junto con su perfil de temperaturas inicial y su correspondiente evolución temporal.

c) Escribir un algoritmo que implemente el θ-método de la Ecuación 8 para el problema descrito. El algoritmo debe incluir como parámetros de entrada: θ, N, Δt y K, donde $K\Delta t$ es el máximo nivel de tiempo alcanzado en la simulación; y como parámetros de salida el perfil de temperaturas $\mathbf{u}(t), \forall t = 1, 2, \ldots$.

d) Aplicar el algoritmo anterior en el problema de estudio tomando $\theta = \frac{3}{4}$, $N = 500$, $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ y $K = 500$. Incluir en la presentación de resultados una representación gráfica de la barra, junto con su perfil de temperaturas inicial y su correspondiente evolución temporal.

e) Comparar los resultados con los obtenidos en la parte 5*b*.

Si en el esquema presentado en la Ecuación 8 consideramos $\theta = 0$ y $\mathbf{f}^k = 0$, con $k = 1, 2, \ldots$, se tiene que la solución discreta es de la siguiente forma.

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{E}^k \mathbf{u}^0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Donde

$$\mathbf{E} = \left(I - \frac{\mu}{h^2} \Delta t \mathbf{A} \right)$$

6. *a*) De los resultados obtenidos de la parte 3, deducir que

$$\rho\left(\mathbf{E}\right) < 1 \Leftrightarrow \Delta t < \frac{h^2}{2\mu} \tag{10}$$

Donde ρ es el radio espectral.

b) Deducir que en estas condiciones el esquema es asintóticamente estable, es decir, que se verifica la siguiente condición.

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{u}^k = \mathbf{0} \tag{11}$$

c) Considerar el problema de la parte 5, suprimiendo la fuente de generación externa. Implementar el algoritmo desarrollado tomando $\theta = 0$ y conservando los valores de los demás parámetros. Comentar los resultados.

7. *a*) Investigar cuál es el orden del error del θ-*método* respecto a Δt (con x y t fijos).

b) Comprobar que en el caso particular en que $\theta = \frac{1}{2}$, el θ-*método* coincide con el Método del Trapecio.

c) Escribir un algoritmo que resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales de la Ecuación 4 empleando el Método del Trapecio.

d) Aplicar el algoritmo anterior en el problema de estudio abordado en la parte 5.

8. *a*) Para los cuatro métodos de resolución abordados anteriormente (partes $5b$, $5d$, $6c$ y $7d$), estudiar (experimentalmente) cómo evoluciona el error de las estimaciones en $x = \frac{1}{2}$ y un instante de tiempo t fijo ($t \neq 0$), al disminuir Δt.

   b) Analizar los resultados anteriores y compararlos con el orden previsto teóricamente.