

Obligatorio 2 Métodos Numéricos Grupo 92

Joaquín Torres (5589832-3), Ramiro Pombo (4725542-8),
Gabriel Martínez (5170794-0), Facundo García (5428344-6)
Tutor : Franco Robledo

Métodos Numéricos 2020
Instituto de Matemática y Estadística
Facultad de Ingeniería. universidad de la República
Montevideo, uruguay

Abstract

La ecuación de calor es una ecuación diferencial que describe las variaciones de temperatura en una región a lo largo del tiempo. La teoría de la ecuación de calor fue desarrollada por Joseph Fourier en 1822 con el propósito de modelar cómo una cantidad como el calor se difunde a través de una región dada.

En este informe estaremos trabajando en algoritmos que permitan resolver dichas ecuaciones. Se estudiarán previamente varias propiedades en la aplicación de diferencias finitas de la ecuación de calor unidimensional para luego crear los algoritmos que permitan resolver el problema dado.

1 Introducción

La estimación de las propiedades térmicas de los materiales es de suma importancia en los procesos industriales que involucran intercambio de calor. El diseño y operación de equipos de intercambio y de disipación, así como de otros sistemas mecánicos y procesos termoeléctricos, son ejemplos en donde se requeriría del conocimiento de la conductividad térmica de los materiales con los que se está operando y de los perfiles de temperatura generados en éstos.

¹ Emails: {rpombobarca, joatorresyic, promero, gabymb1997}@gmail.com

En este caso estudiaremos la ecuación de calor dada por:

$$\frac{\delta u(x, t)}{\delta t} - \mu \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta^2} = f(x, t), \quad x \in (a, b), \quad t > 0 \quad (1)$$

Luego se genera la siguiente semidiscretización de la ecuación anterior:

$$\begin{cases} \frac{du_j(t)}{dt} - \mu(u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)) = f_j(t), & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_0(t) = u_N(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Y a partir de esta ecuación comprobaremos varias propiedades que luego se utilizarán para realizar los 2 algoritmos que se piden en este informe.

1.1 Método del trapecio para ecuaciones diferenciales.

El método del trapecio es un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias derivado de la regla del trapecio para calcular integrales. La regla trapezoidal es un método implícito de segundo orden, que puede considerarse como un método de Runge-Kutta.

Se desea resolver la siguiente ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. La regla trapezoidal viene dada por la fórmula $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$ donde $h = t_{n+1} - t_n$. Este es un método implícito: el valor y_{n+1} aparece en ambos lados de la ecuación, y para calcularlo realmente, hay que resolver una ecuación que será generalmente no lineal. Un método posible para resolver esta ecuación es el método de Newton. Se puede utilizar el método de Euler para obtener una estimación bastante buena para la solución.

2 Problema a Resolver

2.1 Aproximación de Derivada

Deseamos probar que $u_{x-h}(t) - 2u_x(t) + u_{x+h}(t)$ es una aproximada adecuada de $u''_x(t)$.

Para esto tomaremos el desarrollo de Taylor de segundo orden para $u_{x+h}(t)$ y para $u_{x-h}(t)$.

$$\begin{aligned}
u_{x+h}(t) &= u_x(t) + h * u'_x(t) + (h^2/2) * u''_x(t) + r_1 \\
u_{x-h}(t) &= u_x(t) - h * u'_x(t) + (h^2/2) * u''_x(t) + r_2
\end{aligned}$$

(Donde r_1 y r_2 son restos de grado 3).

Al sumar ambas ecuaciones nos presenta la ecuación:

$$u_{x-h}(t) + u_{x+h}(t) = 2u_x(t) + h^2 * u''_x(t) + (r_1 + r_2)$$

Despejamos:

$$\frac{u_{x-h}(t) - 2u_x(t) + u_{x+h}(t)}{h^2} = u''_x(t) + (r_1 + r_2)$$

Por tanto $u''_x(t)$ tiene una diferencia de $(r_1 + r_2)$ con respecto de $\frac{u_{x-h}(t) - 2u_x(t) + u_{x+h}(t)}{h^2}$. Dado que r_1 y r_2 son restos de orden 3 del algoritmo de Taylor es posible descartarlos y decir que $\frac{u_{x-h}(t) - 2u_x(t) + u_{x+h}(t)}{h^2}$ es una buena aproximación de $u''_x(t)$.

2.2 Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = \frac{\mu}{h^2} * Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u_0 = u(0) \end{cases} \quad (3)$$

La matriz A que se nos pide buscar es una matriz tridiagonal en cual todos los elementos son 0 exceptuando los elementos de la diagonal y aquellos que están a su izquierda y derecha de la misma. En este caso la matriz A debe tener los elementos 2 en la diagonal y en los otros campos son -1 ya que se busca resolver la ecuación 3 debemos pasar para la derecha el termino $\frac{\mu}{h^2}(u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t))$ y para mantener el negativo adelante los términos de la matriz deben cambiar de signo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & .. \\ -1 & 2 & -1 & 0 & .. \\ 0 & -1 & 2 & -1 & .. \\ 0 & 0 & -1 & 2 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

2.3 Valores y vectores propios de A

Para realizar el calculo de los valores y vectores propios de A se observo que dicha matriz es una matriz de Toeplitz[2]. Con ese conocimiento se pueden aplicar las propiedades de dichas matrices para calcular los valores propios y los vectores propios.

2.3.1 Valores propios

Para calcular los valores propios de A se observa que dicha matriz no es solo una matriz tridiagonal sino también que los valores de las 3 diagonales no cambian en ningún momento por lo que lo hace una Matriz de Toeplitz. Dicha matrices cumple la siguiente propiedad para el calculo de las diagonales.

$$a - 2\sqrt{bc}\cos(k\frac{\pi}{n+1}), k = 1, ..., n \quad (4)$$

Demostración : Sea

$$U = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & .. \\ c & a & b & 0 & .. \\ 0 & c & a & b & .. \\ 0 & 0 & c & a & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \text{ si tomo } U_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{bc}} & \frac{b}{\sqrt{bc}} & 0 & 0 & .. \\ \frac{c}{\sqrt{bc}} & \frac{a}{\sqrt{bc}} & \frac{b}{\sqrt{bc}} & 0 & .. \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{bc}} & \frac{a}{\sqrt{bc}} & \frac{c}{\sqrt{bc}} & .. \\ 0 & 0 & \frac{c}{\sqrt{bc}} & \frac{a}{\sqrt{bc}} & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Los valores propios de U_1 están relacionas con los valores propios de U por la ecuación:

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{bc}}$$

Ahora como el producto (entrada por entrada) de las diagonales laterales es igual a 1, queda una recursión polinomial de Chebyshev[3] de segundo tipo. Esta es :

$$p_{n+2} = \left(\frac{a}{\sqrt{bc} - \gamma_k} \right) p_{n+1} - p_n$$

Las raíces de estos polinomios satisfacen:

$$\frac{a}{\sqrt{bc}} - \gamma_k = -2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

entonces

$$\gamma_k = \frac{a}{\sqrt{bc}} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

sustituyendo

$$\lambda_k = a - 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Y así obtenemos los valores propios de una matriz como U, que es la forma más común de expresar los valores propios de una matriz de Toeplitz c a b .

□

Donde a es elemento de la diagonal principal(en este caso 2) y $b = c = -1$ ya que son los elementos de las otras 2 diagonales de la matriz. Sustituyendo y sacando factor común 2 obtenemos $2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1}))$ y luego haciendo el cambio final de k por el j especificado obtenemos:

$$\lambda_j = 2(1 - \cos(j\frac{\pi}{N})) , j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5)$$

2.3.2 Vectores propios

Para calcular los vectores propios también usamos otra propiedad de las matrices de Toeplitz que dice lo siguiente:

$$q_j = \left(\left(\sqrt{\frac{b}{c}} \right)^j \sin\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \right)_{j=1}^n , k = 1, \dots, n \quad (6)$$

Nuevamente en nuestro caso tenemos que $b = c = -1$ lo que hace que la raíz

cuadrada se cancele y obtenemos que:

$$q_j = \left(\sin\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \right), \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

Que es lo que se buscaba. Si el lector desea saber como se demuestra dicha propiedad dejamos un apartado en las referencias al final.[2]

2.4 θ – método

En esta sección buscamos verificar que el determinante de la matriz D dada por $D = I + \frac{\mu}{\hbar^2} \theta \Delta t A$ donde I es la matriz identidad de tamaño $(N-1) \times (N-1)$, $0 < \theta < 1$ y $\Delta t > 0$ son los descritos en el θ método y A es la matriz planteada en 2.2. Para esto usaremos las propiedades de los determinantes para separar en 2 determinantes distintos $|(D)| = |I| + |\frac{\mu}{\hbar^2} \theta \Delta t A|$. Ahora sabemos que el determinante de I es 1 y solo faltaría comprobar que el determinante de $\frac{\mu}{\hbar^2} \theta \Delta t A$ es distinto de 1 para que la matriz D sea invertible. Para esto observamos $|\frac{\mu}{\hbar^2} \theta \Delta t A| = \frac{\mu}{\hbar^2} \theta \Delta t |A|$, calculamos el determinante de A usando una relación de recurrencia de tres términos donde se genera una secuencia f_i que se llama continuante.

El continuo n -ésimo se define recursivamente por $K_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} K_0 = 1 \\ K_1(x_1) = x_1 \\ K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Una definición generalizada toma la continuante con respecto a tres secuencias a, b, c de modo que $K(n)$ es un polinomio de $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}, c_1, \dots, c_{n-1}$. En este caso la relación se convierte en:

$$\begin{cases} K_0 = 1 \\ K_1 = a_1 \\ K_n = a_n K_{n-1} + b_{n-1} c_{n-1} K_{n-2} \end{cases}$$

Para nuestro caso $a_j = 2$ y $b_j = c_j = -1$, $\forall j \in \mathbb{N}$ podemos sustituir resultando $K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$ lo que queda una función recursiva que simplemente va subiendo de a un elemento por iteración resultando que el determinante de A es igual a $N-1$. Por lo tanto el determinante de $\frac{\mu}{\hbar^2} \theta \Delta t A$ es distinto de 1 lo que verifica que la matriz

D es invertible.

2.5 Ecuación particular

Tomado los valores planteados por la letra podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = -\frac{1}{h^2} * Au(t) + (1000 \sqrt{|1-t|}) \\ u_0(x) = 1000x(1-x)(1 + \frac{3}{2}x^3) \end{cases} \quad (8)$$

Siguiendo la ecuación previamente planteada, usando una función auxiliar para calcular el primer elemento de U y la funcionalidad de octave de lsode obtuvimos la siguiente gráfica

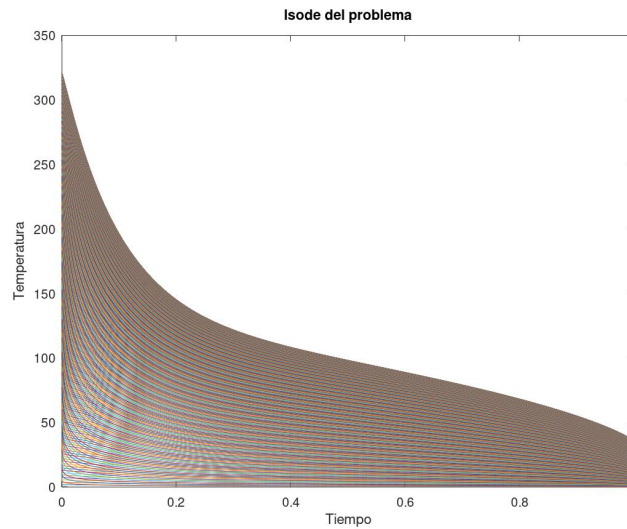


Fig. 1. lsode de la ecuación (7)

A la hora de hacer el algoritmo se tuvieron que ver varios temas sobre el problema como por ejemplo que no nos interesaban los elementos borde ya que estos siempre van a 0 para cualquier tiempo.

Usando que la matriz D es invertible se puede multiplicar ambos lados de la

ecuación

$$(I + \frac{\mu}{h^2} \theta \Delta t A) u^{k+1} = (I + \frac{\mu}{h^2} \Delta t (1 - \theta) A) u^k + g^{k+1} \quad (9)$$

para despejar u^{k+1} en función de u^k y g^{k+1} que fue lo que se hizo en el algoritmo. Calculando un u_1 y un g_1 inicial luego se aplicó esa ecuación recursiva para calcular el siguiente elemento de u y g y se guardan los resultados para luego mostrarlos con el comando "plot". Este fue el resultado de graficar nuestro algoritmo.

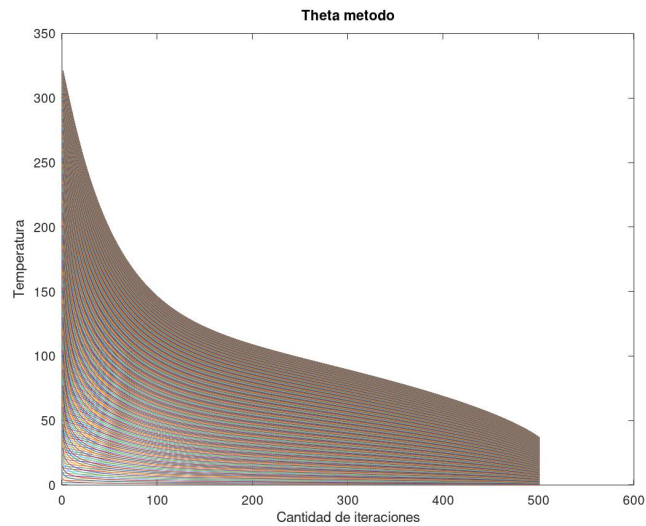


Fig. 2. Resultados del algoritmo

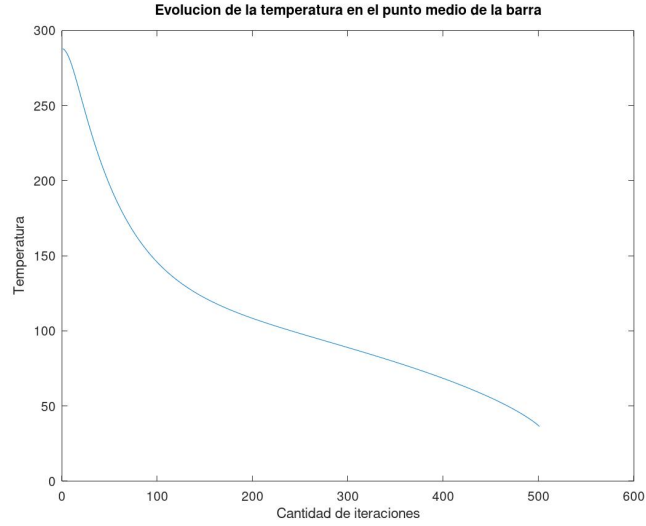


Fig. 3. Resultados del punto medio

En la figura 2 cada linea representa el avance de la temperatura de un punto en función del tiempo. Para ver un punto en particular se puede usar también el comando "plot"(2.5) ya que formamos una matriz con los resultado. En principio los resultados muestran que los puntos tienden a aumentar su temperatura hasta cierto momento y luego disminuir hasta llegar a 0. También se observa que cerca de los extremos de la barra los puntos tienden a estar más fríos que en el centro, esto se debe a como es el perfil de temperatura en dicha barra. Aunque a simple viste ambas gráficas se vean iguales, al usar el comando "==" para comparar las entradas nos devuelve que todas las entradas son distintas esto se debe al error de este método.

2.6 Relación con radio espectral

2.6.1 Demostración

Vamos a probar que si $\rho(E) < 1 \Leftrightarrow \Delta t < \frac{h^2}{2\mu}$. Sabemos que:

$$\rho(E) = \lambda_E = \max\{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$$

Donde λ_i son los autovalores de E. Por la propiedad planteada anteriormente:

$$\lambda_E \leq |\lambda_I + (-\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A)|$$

$$\lambda_I = 1$$

$$\lambda_A < 4$$

Donde λ_I es el máximo autovalor de I y λ_A es el máximo autovalor de A.

Directo:

$$\text{H) } \rho(E) = \lambda_E < 1$$

$$\lambda_E \leq |\lambda_I + (-\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A)|$$

$$\text{Si } (\lambda_I + (-\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A) < 0):$$

$$1 > -1 + (\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A)$$

$$2 > \frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A$$

$$\text{Dado que } \lambda_A < 4 \Rightarrow \lambda_A/2 < 2$$

$$\frac{h^2}{2\mu} > \Delta t$$

$$\text{Si } (\lambda_I + (-\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A) > 0):$$

$$1 < 1 + (-\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A)$$

$$0 < \frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A$$

$$0 \neq \Delta t$$

$$\text{Dado que } \Delta t > \frac{h^2}{2\mu} > 0 \Rightarrow \Delta t > \frac{h^2}{2\mu}$$

Reciproco:

$$\text{H) } \Delta t < \frac{h^2}{2\mu}$$

$$\lambda_E \leq |\lambda_I + (-\frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A)|$$

$$\frac{\mu}{h^2} * \Delta t < 1/2$$

$$\alpha = \frac{\mu}{h^2} * \Delta t * \lambda_A < 2$$

$$\lambda_E \leq |1 + (-\alpha)|$$

$$\lambda_E \leq |1| \lambda_E \leq 1 \rho(E) = \lambda_E < 1$$

2.6.2 Estabilidad asintótica

Para demostrar que u^k es asintóticamente estable vasta con probar que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = 0$$

Para esto podemos expresar a u en su forma canónica de Jordán: $u = VJV^{-1}$, por lo tanto $u^k = VJ^kV^{-1}$ con:

$$J = \begin{pmatrix} J_{m1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m2}(\lambda_2) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{m3}(\lambda_3) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{m4}(\lambda_4) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & J_{ms}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

donde:

$$J_{mi}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$J^k = \begin{pmatrix} J_{m1}^k(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m2}^k(\lambda_2) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_{m3}^k(\lambda_3) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{m4}^k(\lambda_4) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & J_{ms}^k(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

La potencia k de un bloque Jordan $m_i \times m_i$, para $k \leq m_{i1}$:

$$J_{mi}^k(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Dado que $\rho(u) < 1 \Rightarrow \lambda_i < 1 \forall i$
Si $(k \rightarrow +\infty)$:
 $\Rightarrow \lambda^k \rightarrow 0 \Rightarrow J^k \rightarrow 0 \Rightarrow u^k \rightarrow 0$
Por lo tanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = 0$$

2.6.3 Método de Euler ($\theta = 0$)

Cuando $\theta = 0$ podemos sacar como resultado teórico que el θ – método es funcionalmente idéntico a Euler hacia atrás. Pero al momento de utilizar el algoritmo en el problema con el cambio de θ y la supresión de la fuente de calor

nuestro algoritmo no resulto eficaz al calcular una estimación de u dado que nos devuelve una matriz con valores constantemente incrementales los cuales superan los valores que puede representar la maquina. Por lo tanto entendemos que nuestro algoritmo no es capaz de hacer Euler hacia atrás con este problema en particular.

2.7 Método del Trapecio

2.7.1 Error de θ

Si usamos Taylor obtenemos:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - h[\theta f(t_n, y(t_n)) + (1 + \theta)f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] =$$

$$(\theta - \frac{1}{2})h^2 y''(t_n) + \frac{1}{2}(\theta - \frac{2}{3})h^3 y'''(t_n) + O(h^4)$$

Por lo cual se puede ver que si $\theta = \frac{1}{2}$ el método es de orden 2 y es 1 en los demás θ . Esto se debe que con $\theta = \frac{1}{2}$ se cancela el y'' mientras que con el resto no.

2.7.2 Coincidencia con $\theta = \frac{1}{2}$

En su forma regular el método del trapecio estipula:

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y^{k+1} = y^k + \frac{1}{2}\Delta t(g(t_k, y_k) + g(t_{k+1}, y_{k+1})) \end{cases}$$

Si tomamos nuestra expresión:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= -\frac{1}{h^2} * Au^t + f^t \\ y' &= \frac{du}{dt}(t) \\ g(t, y) &= -\frac{1}{h^2} * Au^t + f^t \end{aligned}$$

La aplicación del método del trapecio nos dice:

$$u^{k+1} = u^k + \frac{1}{2}\Delta t(-\frac{1}{h^2}Au^t + f^k - \frac{1}{h^2}Au^{k+1} + f^{k+1}) \Rightarrow$$

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{2h^2}\Delta t A(u^t + f^k + u^{k+1} + f^{k+1})$$

En nuestro caso sabemos:

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t} = -\frac{1}{h^2}A(\theta u^{k+1} + (\theta - 1)u^k) + \theta f^{k+1} + (\theta - 1)f^k$$

si tomamos $\theta = \frac{1}{2}$:

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t} = -\frac{1}{h^2}A\left(\frac{1}{2}u^{k+1} + \frac{1}{2}u^k\right) + \frac{1}{2}f^{k+1} + \frac{1}{2}f^k$$

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t} = -\frac{1}{2h^2}A(u^{k+1} + u^k + f^{k+1} + f^k)$$

$$u^{k+1} = u^k - \Delta t \frac{1}{2h^2}A(u^{k+1} + u^k + f^{k+1} + f^k)$$

Por lo tanto si $\theta = \frac{1}{2}$ el método del trapecio y θ – *método* son equivalentes.

Este fue nuestro resultado al aplicar el método :

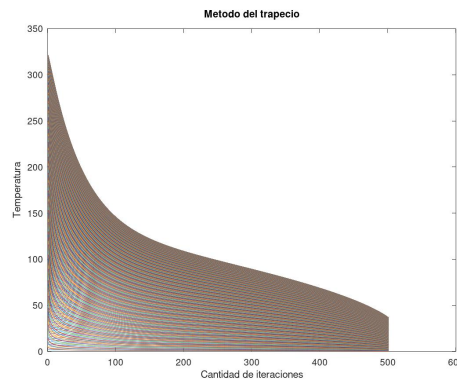


Fig. 4. Resultados del punto medio

2.8 Evolución de los errores

En esta sección se evaluó la evolución del error al disminuir Δt en el punto $x = 1/2$, para ello decidimos elegir el instante de tiempo $t = 0.5$ y estos fueron nuestros resultados:

Δt	5d	6c	7d
1/500	0.19196	NaN	0.16067
1/750	0.16832	NaN	0.091830
1/1000	0.16056	NaN	0.062215

Las diferencias en la evolución del error de cada uno de los métodos que se muestran en la tabla anterior se hallaron en comparación a los resultados

obtenidos mediante el comando `lsode` en octave.

3 Conclusiones

Como se puede notar en la evaluación de los errores, la diferencia entre los valores reales y nuestros estimadores se reduce a medida que el Δt disminuye. Esto se encuentra en concordancia con nuestro entendimiento teórico y a su vez respeta el orden de convergencia del error que se estudio en secciones anteriores.

Logamos realizar los algoritmos de manera satisfactoria y entender como el θ método es un caso general de otro método estudiados en el curso. También se pudo observar como los distintos métodos se aproximan al resultado con tasas de errores distintas. Pero a la hora de decidir el uso de un método no solo se debe tomar en cuenta lo anterior ya que dependiendo del problema a tratar conviene usar otros métodos más eficaces.

References

- [1] Métodos Numéricos (2016). Apuntes de teórico. Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL). Facultad de Ingeniería. universidad de la República.
- [2] Böttcher, Albrecht; Grudsky, Sergei M. (2012), Matrices de Toeplitz, Álgebra lineal asintótica y Análisis funcional , Birkhäuser, ISBN 978-3-0348-8395-5
- [3] Mémoires des Savants étrangers présentés à l'Académie de Saint-Pétersbourg, vol. 7, pag. 539–586.