سوال اول)

الف) نمایش گراف

۱. ماتریس همسایگی

مقدار صفر نشان دهنده عدم وجود یال و اعداد دیگر نشان دهنده وزن یال بین دو راس هستند.

راس	۰	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰
۰	۰	٤	۰	۰	٤	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	٤	۰	۲	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۲	۰	۳	٦	۰	۰	۰	۰	۰	۲
۳	۰	۲	۳	۰	۰	۳	۰	٦	۰	۰	۰
٤	٤	۰	٦	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	٥
٥	۰	۰	۰	۳	۰	۰	۳	۰	۰	۳	۳
٦	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۰	۲	۳	۰	۰
۷	۰	۰	۰	٦	۰	۰	۲	۰	۲	۰	۰
۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۲	۰	۰	۰
۹	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۰	۰	۰	۰	۲
۱۰	۰	۰	۲	۰	٥	۳	۰	۰	۰	۲	۰

۲. لیست همسایگی

در این بخش، همسایه های هر راس به همراه وزن یال آنها داخل پرانتز به صورت (همسایه، وزن) مشخص شده و دیگز برای آن، ستونی از بلوک ها رسم نکردم چون مثل هم هستند:

- راس ۰: (۱, ٤) -> (٤, ٤)
- راس ۱: (۰, ٤) -> (۲, ۲) -> (۳, ۲)
- راس ۲: (۱, ۲) -> (۳, ۳) -> (٤, ٦) -> (۱۰, ۲)
- راس ۳: (۱, ۲) -> (۲, ۳) -> (٥, ۳) -> (۷, ٦)
- راس ٤: (۰, ٤) -> (۲, ٦) -> (۱۰, ٥)
- راس ٥: (۳, ۳) -> (٦, ۳) -> (۹, ۳) -> (۱۰, ۳)
- راس ٦: (٥, ۳) -> (۷, ۲) -> (۸, ۳)
- راس ۷: (۳, ٦) -> (٦, ۲) -> (۸, ۲)
- راس ۸: (٦, ۳) -> (۷, ۲)
- راس ۹: (٥, ۳) -> (۱۰, ۲)
- راس ۱۰: (۲, ۲) -> (٤, ٥) -> (٥, ۳) -> (۹, ۲)

ب) پیمایش گراف (شروع از راس ۰ و اولویت با شماره راس کمتر)

۱. ترتیب ملاقات رئوس در پیمایش اول عمق (DFS):

۰ -> ۱ -> ۲ -> ۳ -> ٥ -> ٦ -> ۷ -> ۸ -> ۹ -> ۱۰ -> ٤

۲. ترتیب ملاقات رئوس در پیمایش اول سطح (BFS):

۰ -> ۱ -> ٤ -> ۲ -> ۳ -> ۱۰ -> ٥ -> ۷ -> ۹ -> ٦ -> ۸

پ) همبندی گراف

۱. یک مولفه (چون گراف کاملا یکپارچه است)

۲. اگر یال بین راس ۳ و ۵ حذف شود، گراف همچنان همبند باقی می ماند. چون مسیرهای جایگزین دیگری برای ارتباط بین دو بخش چپ و راست گراف وجود دارد (به عنوان مثال هنوز مسیر ارتباطی از طریق رئوس ۲ به ۱۰ و سپس ۵ برقرار است و گراف دو تکه نمی شود

ت) نقاط برش

۱. نقاط محوری:

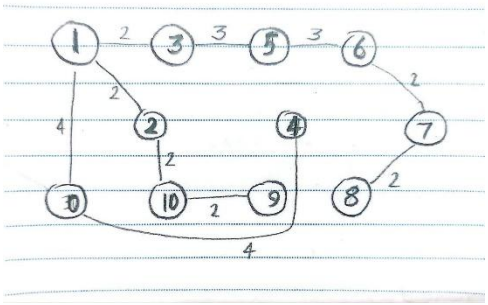
این گراف هیچ نقطه برشی ندارد چون با حذف هر کدام از رئوس این گراف، بقیه رئوس همچنان به هم متصل باقی می ماند و گراف چند تکه نمی شود.

۲. حذف راس ۳ و تمام یال های متصل به آن:

اگر راس ۳ حذف شود، گراف باقیمانده شامل ۱ مولفه همبند خواهد بود.

ث) درخت پوشای کمینه (MST) به روش Kruskal

۱. انتخاب یال ها در عکس و یال های حذف شده به دلیل ایجاد دور:



- بررسی یال (۲, ۳) با وزن ۳ ← حذف می شود (چون دور ۳-۲-۱ ایجاد می‌کند)
- بررسی یال‌های دیگر با وزن ۳ مثل (۵,۹)، (۵,۱۰) و (٦,۸) ← همگی حذف می‌شوند (ایجاد دور می‌کنند)

۲. وزن نهایی درخت پوشای کمینه:

۲۶ ۴ + ۴ + ۳ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ =

سوال دوم

الف) تکمیل جدول مقادیر dfn و low

راس	low	dfn
۰	۱	۱
۱	۲	۱
۳	۳	۱
٤	٤	٤
۲	٥	٥
٦	٦	٦

توضیح مراحل محاسبه:

پیمایش از ریشه ۰ آغاز می‌شود. ۳ دارای یک یال برگشتی به راس ۰ است، بنابراین مقدار low آن برابر با dfn راس ۰ یعنی ۱ می شود. این مقدار کمینه به رئوس ۱ و ۰ نیز منتقل می شود. رئوس ۴، ۲ و ۶ یال برگشتی به سطوح بالاتر ندارند، بنابراین low آن‌ها برابر با dfn خودشان باقی می ماند.

ب) مشخص کردن نقاط محوری (برش) گراف

با استفاده از مقادیر جدول، نقاط محوری گراف رئوس ۰، ۱ و ۲ هستند.

دلایل انتخاب:

- راس ۰ : ریشه درخت DFS است و دارای ۲ فرزند مستقل (رئوس ۱ و ۲) در درخت می باشد
- راس ۱ : یک راس غیرریشه است و فرزندی به نام راس ۴ دارد که شرط low[4] >= dfn[1] برای آن برقرار است
- راس ۲ : یک راس غیرریشه است و فرزندی به نام راس ۶ دارد که شرط low[6] >= dfn[2] برای آن برقرار است

ج) پاسخ به سوالات تحلیلی

۱. چرا تمام یال های غیردرختی در گراف های بدون جهت، یال برگشتی هستند؟

در گراف های بدون جهت، وقتی الگوریتم DFS یک راس را ملاقات می کند، باید تمام همسایه های آن در همان مولفه را پیش از اتمام کار بررسی کند. بنابراین هر یال غیردرختی حتما به راسی متصل است که قبلا در مسیر پیمایش (به عنوان جد) باز شده و هنوز بسته نشده است. در نتیجه این یال، یک یال برگشتی (به سمت اجداد) خواهد بود.

۲. چرا یال متقاطع (Cross Edge) در این گراف ها وجود ندارد؟

یال متقاطع یعنی دو راس در دو شاخه کاملا مجزا به هم وصل باشند. در گراف بدون جهت، اگر چنین یالی وجود داشته باشد، به محض اینکه DFS در شاخه اول به یک سر یال برسد، از طریق همان یال به سر دیگر می رود و آن را همسایه یا فرزند خود می کند؛ بنابراین آن دو شاخه هیچوقت مجزا باقی نمی ماند

د) حذف راس ریشه

۱. تعداد مولفه های همبند:

گراف به ۲ مولفه همبند مجزا تقسیم می شود

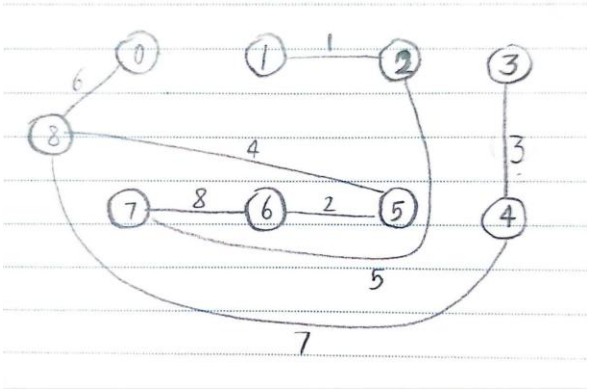
۲. تحلیل بر اساس فرزندان ریشه:

از آنجا که ریشه (راس ۰) دارای ۲ فرزند در درخت DFS است و هیچ یال متقاطعی بین این دو شاخه وجود ندارد، خود ریشه تنها عامل اتصال این دو بخش است. با حذف ریشه، ارتباط زیردرخت سمت چپ (رئوس ۱، ۳، ۴) با زیردرخت سمت راست (رئوس ۲، ۶) قطع می شود.

سوال سوم)

الف) درخت پوشای کمینه به روش Kruskal

۱. ترتیب انتخاب یال ها بر اساس وزن (از کوچک به بزرگ):



وزن کل درخت = ۳۶

۲. یال های حذف شده به دلیل ایجاد دور:

- یال (۰, ۱) با وزن ۹
- یال (۰, ۳) با وزن ۱۰
- یال (۲, ۵) با وزن ۱۱
- یال (٤, ٦) با وزن ۱۲

۳. معیار انتخاب و خاصیت حریصانه:

معیار کراسکال، انتخاب کوچکترین وزن یال در کل گراف است، به شرطی که دو سر آن در یک مولفه نباشند (دور ایجاد نکند). این انتخاب حریصانه است زیرا در هر مرحله بدون در نظر گرفتن ساختار نهایی، بهترین و ارزانترین گزینه موجود در همان لحظه انتخاب می شود

ب) درخت پوشای کمینه به روش پریم (Prim)

ترتیب انتخاب یال‌ها در الگوریتم پریم:

(۰, ۸) ← (۸, ۵) ← (۵, ٦) ← (۸, ٤) ← (٤, ۳) ← (٦, ۷) ← (۷, ۲) ← (۲, ۱)

تحلیل تفاوت دیدگاه پریم و کراسکال:

• الگوریتم پریم: درخت را به صورت پیوسته و متصل از یک راس آغازین رشد می دهد. در هر مرحله، یالی انتخاب می شود که یک سر آن درون درخت و سر دیگر آن بیرون از درخت باشد (راس محور)

• الگوریتم کراسکال: یال ها را در کل گراف صرفا بر اساس وزن مرتب کرده و به صورت پراکنده انتخاب می کند تا در نهایت مولفه ها به هم وصل شوند (یال محور)

ج) تحلیل عدم انتخاب یال‌های سبک به دلیل ایجاد دور

در الگوریتم کراسکال، اگر دو راس قبلا از طریق مسیرهایی با یال های کوتاه تر به یکدیگر متصل شده باشند، اضافه کردن یک یال جدید بین آنها یک دور ایجاد می کند. از آنجا که ساختار درخت باید بدون دور باشد و این یال جدید هیچ راس جدیدی را به شبکه وصل نمی کند، قرار دادن آن در درخت پوشای کمینه اشتباه است و وزن کل را بیهوده افزایش می دهد.

د) تحلیل متمایز بودن وزن یال‌ها

۱. نشان دهید درخت پوشای کمینه یکتا است:

اگر فرض کنیم دو درخت پوشای کمینه متفاوت وجود داشته باشد، با اضافه کردن یک یال متمایز از درخت اول به درخت دوم، یک دور ایجاد می شود. چون تمام وزن های گراف متمایز هستند، وزن یال های این دور با هم برابر نیستند. با حذف یال سنگین تر در آن دور، درختی سبک تر به دست میاید که این موضوع با فرض کمینه بودن درخت ها تناقض دارد.
بنابراین درخت پوشای کمینه حتما یکتا است

۲. چرا انتخاب یال جایگزین در هیچ مرحله ای ممکن نیست؟

چون تمام وزن های یال ها متمایز هستند، در هیچ گامی از الگوریتم های پریم و کراسکال با دو یال هم وزن مواجه نمی شویم. در نتیجه در هر مرحله یال کاندید برای ورود به درخت کاملا منحصربفرد است و هیچ راه یا انتخاب جایگزینی وجود ندارد.