

## Правила интегрирования и таблица неопределенных интегралов

Обычно при нахождении интегралов сначала используют правила интегрирования, а затем – таблицу интегралов.

### Правила интегрирования:

1)  $\int k u dx = k \int u dx$ , где  $k - const$

– постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;

2)  $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$  – интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждой функции в отдельности;

3)  $\int u dv = uv - \int v du$  – правило интегрирования по частям.

### Таблица неопределенных интегралов:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \text{ где } C - const, \text{ в частности: } \int dx = \int x^0 dx = x + C$$

Самая ходовая формула, с помощью которой интегрируются многие (но не все!) корни, например:  $\sqrt[3]{x^5}$ ,  $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$ ,  $\frac{1}{x^5}$ . Для этого их нужно представить в виде  $x^{\frac{a}{b}}$  (как именно – см. Приложение **Полезные формулы**).

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (\text{случай } n = -1)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \text{ в частности: } \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0), \text{ в частности: } \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad (a \neq 0) \text{ «высокий логарифм»}$$

**Примечание:** часто данную формулу можно встретить немного в другом виде, например:  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$ , но первый вариант, на мой взгляд, удобнее.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C \quad (A \neq 0) \text{ «длинный логарифм»}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0), \text{ в частности: } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

Интегралы от гиперболических функций:

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

И ещё пара формул, которые иногда включают в «классическую» таблицу:

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C \quad (A \neq 0)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + C \quad (a > 0)$$

Однако эти интегралы крайне желательно решить подробно – см. урок [http://mathprofi.ru/slozhnye\\_integrals.html](http://mathprofi.ru/slozhnye_integrals.html) (в настоящий курс они не вошли)

**! Важно!** Иногда встречаются очень большие таблицы интегралов (порядка 100 штук). Их я рекомендую использовать только для самопроверки или в самом крайнем случае, так как интегралы от «других функций» на самом деле являются следствием правил и приёмов интегрирования. И, соответственно, подобное «решение» может сильно не понравиться рецензенту.

Типичный пример такого «табличного» интеграла:  $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

В действительности, для того, чтобы найти интеграл от логарифма, необходимо применить правило интегрирования по частям и подробно расписать ход решения.

**А вот некоторые неберущиеся неопределённые интегралы:**

$\int e^{-x^2} dx$  – интеграл Пуассона;

$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$  – интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x}$  – интегральный логарифм;

$\int \frac{e^x dx}{x}$  – интегральная экспонента;

$\int \frac{\sin x dx}{x}$  – интегральный синус;

$\int \frac{\cos x dx}{x}$  – интегральный косинус.

Встретятся – не мучайтесь, в ответе достаточно указать, что интеграл не берётся. А если подобные интегралы появятся *в ходе решения* какого-либо примера, значит, либо Вы ошиблись, либо интеграл заведомо является неберущимся, либо, что вероятнее всего, в условии допущена опечатка.