



Высшая математика – просто и доступно!

Интенсивный курс
«Как найти частные производные?»»

*Этот небольшой курс позволяет буквально за пару часов научиться находить частные производные функций двух и трёх переменных. Методичка предназначена для читателей с начальным уровнем подготовки, в частности, для **студентов заочных отделений**.*

Внимание! *Чтобы освоить данный материал, нужно уметь находить производные функции одной переменной!*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Частные производные функции двух переменных	3
2. Частные производные функции трёх переменных	18
3. Решения и ответы	29

1. Частные производные функции двух переменных

Начнём с самого понятия функции двух переменных. Такая функция имеет следующий вид:

$z = f(x; y)$, при этом переменные x, y называются *независимыми переменными* или *аргументами*, а буква z – *зависимой переменной* или *функцией*.

Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x; y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u .

И, как нетрудно догадаться, у функции двух переменных есть **две** частные производные *первого порядка*. **Обозначения:**

z'_x или $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»;

z'_y или $\frac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек».

В ходу больше обозначение со штрихом, но составители учебников, задачников и методичек любят использовать и громоздкие обозначения – так что не теряйтесь!

Пожалуйста, откройте или распечатайте *Приложение Правила дифференцирования и таблица производных*. Оно должно быть перед глазами.

Потому что

для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций.

Есть только пара небольших отличий, с которыми мы познакомимся прямо сейчас:

Пример 1

Найти частные производные функции двух переменных

$$z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$$

Решение: такая формулировка, как правило, подразумевает производные 1-го порядка. В первую очередь обычно находят z'_x .

Правило: когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом).

Здесь и далее я буду приводить решение сразу, а комментарии записывать ниже:

$$\begin{aligned}
z'_x &= (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x = \\
&= 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x = \\
&= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 = \\
&= 4xy^3 + 12x^3
\end{aligned}$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**.

Внимание, важно! Подстрочные индексы по ходу решения НЕ ТЕРЯЕМ. В данном случае, если Вы где-нибудь нарисуете «штрих» без $_x$, то преподаватель, как минимум, может поставить рядом с заданием \pm (сразу откусить часть балла за невнимательность).

(2) Используем *свойство линейности* $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(4) Упрощаем, или, как я люблю говорить, «причёсываем» ответ.

Теперь найдём z'_y .

Правило: когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x **считается константой (постоянным числом)**.

$$\begin{aligned}
z'_y &= (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y = \\
&= 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y = \\
&= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5
\end{aligned}$$

(1) Используем те же правила $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.

(2) Используем таблицу производных элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки».** То есть данная таблица **равно справедлива и для y (да и вообще почти для любой буквы)**. В частности, используемые нами формулы выглядят так: $(C)' = 0$ и $(y^n)' = ny^{n-1}$.

Чуть-чуть потренировавшись на подобных примерах, вы будете сразу видеть **ответ**
 $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$, $z'_y = 6x^2y^2 + 5$

И, не отходя от кассы, разберёмся с частными производными *второго порядка*. Часто требуются. Напоминаю, что **вторая производная – это производная от первой производной**. И поскольку **каждую** производную z'_x, z'_y можно продифференцировать либо по «икс», либо по «игрек», то всего существует 4 производные второго порядка.

Обозначения:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»;

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – вторая *смешанная* производная по «икс, игрек»;

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»;

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – вторая *смешанная* производная по «игрек, икс».

В практических примерах можно ориентироваться на равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ – грубо говоря, *смешанные* частные производные должны совпасть. Незамедлительно проверим этот факт на конкретном примере. Дифференцируем по «игрек» частную производную $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$

и выполняем «зеркальное» действие с производной $z'_y = 6x^2y^2 + 5$:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

Таким образом, $z''_{xy} = z''_{yx}$, в чём и требовалось убедиться. И, кроме того, это хорошая (*однако не 100%-ная*) проверка частных производных 1-го порядка.

Осталось найти «однобуквенные» производные второго порядка. Никаких изобретений, берём $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично поступаем с производной $z'_y = 6x^2y^2 + 5$:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявлять **ПОВЫШЕННОЕ** внимание, ибо никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Тренируемся самостоятельно:

Пример 2

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков:

а) $z = x^2 + 2xy - 4x - 2y - 3$;

б) $z = x^2y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$.

И вопрос на засыпку: что нужно сделать в первую очередь? Прежде всего, нужно посмотреть, СКОЛЬКО переменных содержит предложенная функция (*в условии ведь не сказано!*). Может статься, вам дана функция одной, трёх или даже БОльшого количества переменных. Затем находим частные производные 1-го порядка, затем – 2-го. Порядок нахождения производных второго порядка не имеет особого значения, но в тяжёлых случаях сначала выгоднее найти смешанные частные производные (*для проверки z'_{xy} , z'_{yx}*).

Решения и ответы в конце методички.

Систематизируем новые прикладные правила:

- 1) Когда мы дифференцируем по x , переменная y считается константой.
- 2) Когда же дифференцирование осуществляется по y , то константой считается x .
- 3) Правила и таблица производных справедливы и применимы для любой переменной (x , y либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Но расслабляться рано!

Впереди ещё немало важных и любопытных вещей:

Пример 3

Найти частные производные первого порядка функции $z = ux^y$

Решение: найдём частную производную по «икс»:

$$z'_{x(y=const)} = (y \cdot x^y)'_x \stackrel{(1)}{=} y \cdot (x^y)'_x \stackrel{(2)}{=} y \cdot y \cdot x^{y-1} = y^2 x^{y-1}$$

Обратите внимание на подстрочный индекс: $x(y = const)$, рядом с «иксом» не возбраняется в скобках записывать, что y – константа. Данная пометка может быть очень полезна для начинающих, чтобы легче было ориентироваться в решении.

(1) Используем правило $(Cu)' = Cu'$.

(2) Так как «игрек» считается константой (**МЫСЛЕННО** замените его, например, «пятёркой»), то x^y – это *степенная* функция, и мы используем формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Найдём частную производную по «игрек»:

$$z'_{y(x=const)} = (y \cdot x^y)'_y \stackrel{(1)}{=} (y)'_y \cdot x^y + y \cdot (x^y)'_y \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot x^y + y \cdot x^y \ln x = x^y(1 + y \ln x)$$

(1) Поскольку перед нами произведение двух множителей, КАЖДЫЙ из которых зависит от «живой» переменной «игрек», то нужно использовать правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$

(2) Так как «икс» считается константой, то x^y – это *показательная* функция (МЫСЛЕННО замените x той же «пятёркой»), и, согласно таблице: $(a^y)' = a^y \ln a$.

Самостоятельно убедитесь, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. Чтобы «свести» смешанные производные к единому виду, здесь придётся немного преобразовать степени – Приложение **Горячие школьные формулы** в помощь. Подробное решение в конце методички.

Да, этого не требует условие, но **по возможности всегда выполняйте такую проверку на черновике!**

Ответ: $z'_x = y^2 x^{y-1}$, $z'_y = x^y(1 + y \ln x)$

Разогреваемся далее:

Пример 4

Дана функция $z = e^{x-2y}$. Найти частные производные первого и второго порядков.

Решение: в этом простеньком примере мы вспомним правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$. Очевидно, что внешней функцией является экспонента: $u(v) = e^{x-2y}$, а её вложением – сумма $v = x - 2y$Очевидное-очевидным, но одну производную я всё же прокомментирую:

$$z'_x = (e^{x-2y})'_x \stackrel{(1)}{=} e^{x-2y} \cdot (x-2y)'_x \stackrel{(2)}{=} e^{x-2y} \cdot ((x)' - (2y)'_x) = e^{x-2y} \cdot (1 - 0) = e^{x-2y}$$

(1) Используем правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, и который раз обращаю ваше внимание на то, что вложение «вэ» не меняется.

(2) Используем правило $(u + v)' = u' + v'$. Может быть, некоторые не помнят, разность – это та же самая алгебраическая сумма: $(u - v)' = (u + (-v))'$

На практике во многих случаях будет достаточно решения $z'_x = (e^{x-2y})'_x = e^{x-2y}$, однако будьте готовы расписать его подробно.

Найдём «игрековую» производную:

$z'_y = (e^{x-2y})'_y = e^{x-2y} \cdot (x-2y)'_y = e^{x-2y} \cdot (0 - 2) = -2e^{x-2y}$ – в отличие от предыдущего случая, правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сработало «с последствиями».

При нахождении производных 2-го порядка можно и нужно использовать результаты предыдущего пункта:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (e^{x-2y})'_x = e^{x-2y}$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (e^{x-2y})'_y = -2e^{x-2y}$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-2e^{x-2y})'_x = -2(e^{x-2y})'_x = -2e^{x-2y}$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-2e^{x-2y})'_y = -2 \cdot (-2)e^{x-2y} = 4e^{x-2y}$$

Ответ: $z'_x = e^{x-2y}$, $z'_y = -2e^{x-2y}$, $z''_{xx} = e^{x-2y}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -2e^{x-2y}$, $z''_{yy} = 4e^{x-2y}$

Вперёд без страха и сомнений:

Пример 5

Дана функция двух переменных $z = e^{\frac{x}{2}}(2\cos y + x\sin y)$. Найти частные производные первого порядка и смешанные производные второго порядка.

После нахождения производных целесообразно выполнять «уборку», а именно, «заталкивать» в одну скобку все слагаемые: $e^{\frac{x}{2}}(\dots)$. Решение и ответ в конце методички.

Теперь разберёмся, как дифференцировать дроби. Дроби бывают разные:

Пример 6

Найти частные производные первого порядка функции $z = \frac{y \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$. Проверить, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. Записать полный дифференциал первого порядка dz .

Решение: найдём частные производные первого порядка:

$$\begin{aligned} z'_{x(y=const)} &= \left(\frac{y \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}} \right)'_{(1)} \\ &= y \sin 2y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)'_{(2)} \\ &= y \sin 2y \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)'_x = y \sin 2y \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2y \sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}} \end{aligned}$$

(1) Поскольку y и $\sin 2y$ считаются константами, то их произведение $y \sin 2y$ подлежит выносу за знак производной.

(2) Ещё раз вспоминаем, как правильно дифференцировать корни (см. Приложения *Таблица производных и Горячие школьные формулы*).

Результат, разумеется, лучше «причесать».

Разруливаем «игрековую» производную:

$$\begin{aligned}
 z'_{y(x=const)} &= \left(\frac{y \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}} \right)'_{y} \stackrel{(1)}{=} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (y \sin 2y)'_y \stackrel{(2)}{=} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot ((y)'_y \sin 2y + y(\sin 2y)'_y) \stackrel{(3)}{=} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (1 \cdot \sin 2y + y \cos 2y \cdot (2y)'_y) = \\
 &= \frac{(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}
 \end{aligned}$$

(1) Выносим «солдатику» $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ за знак производной. А были ли дробь? ☺

(2) Под штрихом у нас осталось произведение двух множителей, **каждое** из которых зависит от «живой» переменной «игрек», следовательно, нужно использовать правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) Не забываем, что $\sin 2y$ – это сложная функция (*хоть и простейшая из сложных*). Используем соответствующее правило: $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Теперь найдём *смешанные* производные второго порядка:

$$\begin{aligned}
 z''_{xy} &= (z'_x)'_y = \left(-\frac{2y \sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}} \right)'_y = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \cdot (y \sin 2y)'_y = \\
 &= -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \cdot (1 \cdot \sin 2y + y \cos 2y \cdot (2y)'_y) = -\frac{2(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}
 \end{aligned}$$

Внимательно изучаем **каждый шаг!** Ибо это та тема, где спешить НЕ НУЖНО.

$$\begin{aligned}
 z''_{yx} &= (z'_y)'_x = \left(\frac{(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}} \right)'_x = (\sin 2y + 2y \cos 2y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)'_x = \\
 &= (\sin 2y + 2y \cos 2y) \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)'_x = (\sin 2y + 2y \cos 2y) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot x^{-\frac{5}{3}} = \\
 &= -\frac{2(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}
 \end{aligned}$$

$z''_{xy} = z''_{yx}$, что мы и хотели увидеть.

Запишем полный дифференциал dz . Строго говоря, это уже частное задание, которое не относится к технике дифференцирования, но оно настолько часто идёт «довеском» к нахождению частных производных, что я счёл нужным включить его в этот курс. Полный дифференциал *первого порядка* функции двух переменных имеет следующий вид:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

В данном случае:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{2y \sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}} dx + \frac{(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}} dy$$

То есть, в формулу дифференциала нужно тупо подставить найденные частные производные первого порядка.

И, конечно, выдержим хороший математический тон:

Ответ:

$$z'_x = -\frac{2y \sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}, \quad z'_y = \frac{(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad dz = -\frac{2y \sin 2y dx}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{(\sin 2y + 2y \cos 2y) dy}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2(\sin 2y + 2y \cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

Готово.

Маньячить сильно не будем:

Пример 7

Дана функция двух переменных $z = \ln(xy - 1)$.

Найти $z'_x, z'_y, dz, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx}$.

Это пример для самостоятельного решения.

Закрепим материал сборной «солянкой», которая достаточно популярна на практике:

Пример 8

Найти частные производные первого порядка функции двух переменных

$$z = \frac{2^y}{y} + x^2 \operatorname{tg} x + \ln(x^2 + y^3)$$

И чего тут только нет – и сумма, и произведение, и частное, и сложная функция. Но это нам уже не страшно!

Решение: найдём «иксовую» производную:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{2^y}{y} + x^2 \operatorname{tg} x + \ln(x^2 + y^3) \right)'_x \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{2^y}{y} \right)'_x + (x^2 \operatorname{tg} x)'_x + (\ln(x^2 + y^3))'_x \stackrel{(2)}{=} \\ &= 0 + (x^2)'_x \cdot \operatorname{tg} x + x^2 (\operatorname{tg} x)'_x + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (x^2 + y^3)'_x = \\ &= 2x \cdot \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (2x + 0) = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x}{(x^2 + y^3)} \end{aligned}$$

(1) Используем правило дифференцирования суммы

(2) Первое слагаемое считается константой, поскольку в выражении $\frac{2^y}{y}$ нет

ничего, зависящего от «икс» – только «игреки». Знаете, всегда приятно, когда дробь удаётся превратить в ноль). Для второго слагаемого применяем правило дифференцирования произведения. Кстати, в этом смысле ничего бы не изменилось, если бы вместо $x^2 \operatorname{tg} x$ было дано, например, произведение $x^2 \operatorname{tg}(xy)$ – важно, что здесь **произведение двух множителей, КАЖДЫЙ из которых зависит от «икс»**, а поэтому, нужно использовать правило дифференцирования произведения. Для третьего слагаемого применяем правило дифференцирования сложной функции.

Найдём «игрековую» производную:

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(\frac{2^y}{y} + x^2 \operatorname{tg} x + \ln(x^2 + y^3) \right)'_y = \left(\frac{2^y}{y} \right)'_y + (x^2 \operatorname{tg} x)'_y + (\ln(x^2 + y^3))'_y \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{(2^y)'_y \cdot y - 2^y \cdot (y)'_y}{y^2} + 0 + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (x^2 + y^3)'_y = \\ &= \frac{2^y \cdot \ln 2 \cdot y - 2^y \cdot 1}{y^2} + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (0 + 3y^2) = \frac{2^y \cdot \ln 2 \cdot y - 2^y}{y^2} + \frac{3y^2}{(x^2 + y^3)} \end{aligned}$$

(1) В первом слагаемом **и** в числителе **и** в знаменателе содержится «игрек», следовательно, нужно использовать правило дифференцирования частного:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \text{ Второе слагаемое зависит ТОЛЬКО от «икс», значит, } x^2 \operatorname{tg} x \text{ считается}$$

константой и превращается в ноль. Для третьего слагаемого используем правило дифференцирования сложной функции.

Заметьте, что проверка первых производных через равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ здесь не столь эффективна. Почему?

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x}{(x^2 + y^3)} \right)'_y = 0 + 0 + 2x \cdot ((x^2 + y^3)^{-1})'_y = \dots, \text{ но ведь}$$

ошибка может быть допущена в первых двух слагаемых! Аналогично обстоят дела с производной z''_{yx} , и что делать в подобных случаях, я расскажу чуть позже.

$$\textbf{Ответ: } z'_x = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x}{(x^2 + y^3)}, \quad z'_y = \frac{2^y \cdot \ln 2 \cdot y - 2^y}{y^2} + \frac{3y^2}{(x^2 + y^3)}$$

Похожее задание для самостоятельного решения:

Пример 9

Найти частные производные функции $z = \frac{y}{\sin x} + \sqrt{x} \ln x + \cos(2x + 2y)$

Не ленимся! – практические навыки ой как пригодятся при дифференцировании более сложных функций, коих очень и очень много:

Пример 10

Найти частные производные первого порядка функции $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}$

Решение оформлю в уже привычном стиле:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\sin \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \right)'_x \stackrel{(1)}{=} \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \right)'_x \stackrel{(2)}{=} \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \sqrt{y} \cdot ((x^3 + y^2)^{-\frac{1}{2}})'_x \stackrel{(3)}{=} \\ &= \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \sqrt{y} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x^3 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^3 + y^2)'_x = \\ &= -\frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^3 + y^2)^3}} \cdot 3x^2 = -\frac{3x^2}{2} \sqrt{\frac{y}{(x^3 + y^2)^3}} \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \end{aligned}$$

(1) Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

И ещё раз напоминаю: когда мы по таблице превращаем синус (*внешнюю функцию*) в косинус, то вложение $\sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}$ (*внутренняя функция*) у нас не меняется.

(2) Используем свойство степеней (*см. Приложение **Горячие школьные формулы***):

$\sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^3 + y^2}}$ и выносим \sqrt{y} за знак производной, а корень $\sqrt{x^3 + y^2}$ представляем в нужном для дифференцирования виде.

(3) Снова используем правило дифференцирования сложной функции и **ВНИМАТЕЛЬНО** наводим окончательный марафет.

Следует отметить, что результат записывается и компактнее:

$$-\frac{3x^2 \sqrt{y} \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}}{2\sqrt{(x^3 + y^2)^3}}.$$

Однако, «навороченные» производные можно и вовсе не упрощать – так вы уменьшите вероятность ошибки и облегчите проверку преподавателю. Этот совет особенно актуален для «чайников».

Как вам правильно подсказывает сердце, при нахождении z'_y нам предстоит брать громоздкую производную от дроби, и поэтому этот вопрос удобно решить сразу же:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x^3 + y^2} \right)'_y &= \frac{(y)'_y (x^3 + y^2) - y(x^3 + y^2)'_y}{(x^3 + y^2)^2} = \frac{1 \cdot (x^3 + y^2) - y \cdot (0 + 2y)}{(x^3 + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^3 + y^2 - 2y^2}{(x^3 + y^2)^2} = \frac{x^3 - y^2}{(x^3 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Теперь всё произойдёт быстро – дважды используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(\sin \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \right)'_y = \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \right)'_y = (\sqrt{\alpha})' = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \alpha' \\ &= \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}} \cdot \left(\frac{y}{x^3 + y^2} \right)'_y = \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}} \cdot \frac{x^3 - y^2}{(x^3 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Как я только что рекомендовал, начинающим лучше оставлять ответы именно в таком виде. Но с другой стороны, почему бы и не уменьшить его «этажность» (см. Приложение **Горячие школьные формулы**):

$$\dots = \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^3 + y^2}}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{x^3 - y^2}{(x^3 + y^2)^2} = \frac{(x^3 - y^2) \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}}{2\sqrt{y}(x^3 + y^2)^{5/2}}$$

$$\text{Ответ: } z'_x = -\frac{3x^2 \sqrt{y} \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}}{2\sqrt{(x^3 + y^2)^3}}, \quad z'_y = \frac{(x^3 - y^2) \cos \sqrt{\frac{y}{x^3 + y^2}}}{2\sqrt{y}(x^3 + y^2)^{5/2}}$$

Смешанные производные как-то находить не хочется ☺ и возникает вопрос: как проверить решение? Читатели, «поднабившие руку», вполне могут проверить ответ устно! Но вообще, в подобных ситуациях лучше придерживаться схемы, которую я называю **методом «двойного решения»**.

В чём его суть?

1) Прорешиваем пример на черновике и убираем листочек с глаз долой. Через каких-то 10-15 минут решение благополучно забывается.

2) Решаем пример заново и сравниваем ответы.

Эта схема – тоже не панацея, но почти гарантия, что ошибка «не пройдёт» (если, конечно, вы хорошо понимаете тему). Причём, двойное решение можно использовать и в условиях ограниченного времени, например, на письменном зачёте или экзамене. И более того, он работает во многих других задачах, где нет хорошего способа проверки.

Пара примеров для самостоятельного решения:

Пример 11

Найти частные производные первого порядка

$$z = \operatorname{arctg}^2(x\sqrt{y}).$$

Здесь достаточно легко выполнить устную проверку

Пример 12

Найти z'_x, z'_y функции $z = \ln \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$.

А тут, конечно, не надо проявлять героизм ;)

Как и с производными функции одной переменной, всегда есть смысл посмотреть,

а нельзя ли упростить функцию ещё ДО дифференцирования?

Ещё один типичный случай:

Пример 13

Дана функция двух переменных $z = \cos^2(3 - 2xy)$.

Найти все частные производные 1-го и 2-го порядков.

Да, чтобы хитрые студенты не «прикидывались валенком», в условие часто включают слово «все» ☺

Прямое **решение** сулит нам дифференцирование квадрата, затем косинуса и затем суммы. Но зачем такие трудности? Есть тригонометрическая формула $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$:

$$z = \cos^2(3 - 2xy) = \frac{1 + \cos(2(3 - 2xy))}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6 - 4xy)$$

Ну вот, совсем другое дело:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6 - 4xy) \right)'_x = 0 + \frac{1}{2} \cdot (-\sin(6 - 4xy)) \cdot (6 - 4xy)'_x = \\ &= -\frac{1}{2} \sin(6 - 4xy) \cdot (0 - 4y) = 2y \sin(6 - 4xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6 - 4xy) \right)'_y = 0 + \frac{1}{2} \cdot (-\sin(6 - 4xy)) \cdot (6 - 4xy)'_y = \\ &= -\frac{1}{2} \sin(6 - 4xy) \cdot (0 - 4x) = 2x \sin(6 - 4xy) \end{aligned}$$

Ввиду не самых простых результатов сначала лучше найти смешанные производные:

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (2y \sin(6 - 4xy))'_y = \\ &= (2y)'_y \cdot \sin(6 - 4xy) + 2y \cdot (\sin(6 - 4xy))'_y = \\ &= 2 \cdot \sin(6 - 4xy) + 2y \cos(6 - 4xy) \cdot (6 - 4xy)'_y = \\ &= 2 \sin(6 - 4xy) + 2y \cos(6 - 4xy) \cdot (0 - 4x) = \\ &= 2 \sin(6 - 4xy) - 8xy \cos(6 - 4xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yx} &= (z'_y)'_x = (2x \sin(6 - 4xy))'_x = \\ &= (2x)'_x \cdot \sin(6 - 4xy) + 2x \cdot (\sin(6 - 4xy))'_x = \\ &= 2 \cdot \sin(6 - 4xy) + 2x \cos(6 - 4xy) \cdot (6 - 4xy)'_x = \\ &= 2 \sin(6 - 4xy) + 2x \cos(6 - 4xy) \cdot (0 - 4y) = \\ &= 2 \sin(6 - 4xy) - 8xy \cos(6 - 4xy) \end{aligned}$$

И ОЧЕНЬ внимательно берём «однобуквенные» производные:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (2y \sin(6 - 4xy))'_x = 2y(\sin(6 - 4xy))'_x = \\ &= 2y \cos(6 - 4xy) \cdot (6 - 4xy)'_x = 2y \cos(6 - 4xy) \cdot (0 - 4y) = -8y^2 \cos(6 - 4xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (2x \sin(6 - 4xy))'_y = 2x(\sin(6 - 4xy))'_y = \\ &= 2x \sin(6 - 4xy) \cdot (6 - 4xy)'_y = 2x \sin(6 - 4xy) \cdot (0 - 4x) = -8x^2 \sin(6 - 4xy) \end{aligned}$$

Впрочем, производные здесь «зеркальные».

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } z'_x &= 2y \sin(6 - 4xy), \quad z'_y = 2x \sin(6 - 4xy), \\ z''_{xx} &= -8y^2 \cos(6 - 4xy), \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 2 \sin(6 - 4xy) - 8xy \cos(6 - 4xy), \quad z''_{yy} = -8x^2 \sin(6 - 4xy) \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в этом примере всё же можно пойти напрямую:

$$\begin{aligned} z'_x &= (\cos^2(3 - 2xy))'_x = \\ &= 2 \cos(3 - 2xy) \cdot (\cos(3 - 2xy))'_x = \\ &= 2 \cos(3 - 2xy) \cdot (-\sin(3 - 2xy)) \cdot (3 - 2xy)'_x = \\ &= -2 \cos(3 - 2xy) \cdot \sin(3 - 2xy) \cdot (0 - 2y) = \\ &= 4y \sin(3 - 2xy) \cos(3 - 2xy) \end{aligned}$$

и такой результат уже толсто намекает, что производную надо упрощать. Используем известную формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ в обратном направлении:

$$\dots = 4y \cdot \frac{1}{2} \sin(2(3 - 2xy)) = 2y \sin(6 - 4xy), \text{ и всё возвращается на круги своя.}$$

Но ещё интереснее, что иногда упрощения удлиняют и усложняют решение (см. концовку Примера 12).

Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 14

Дана функция двух переменных $z = \arcsin \frac{y}{x^2}$.

Найти все частные производные первого и второго порядков.

Несмотря на внешнюю простоту, это технически трудный пример, в котором нужно грамотно управиться с корнями и трёхэтажными дробями (см. Приложение *Горячие школьные формулы*).

И заключение параграфа коротко о логарифмическом дифференцировании, которое, в отличие от «обычных» производных, встречается довольно редко:

Пример 15

Дана функция $z = x^{2x+3y}$. Найти z'_x, z'_y .

Решение: при нахождении z'_x «живая» переменная «икс» находится **и в основании и показателе**, таким образом, функция $z = x^{2x+3y}$ считается *степенно-показательной*. Логарифмируем обе части и «разваливаем» правый логарифм:

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln x^{2x+3y} \\ \ln z &= (2x+3y) \ln x\end{aligned}$$

«Навешиваем» «иксовые» штрихи на обе части:

$$(\ln z)'_x = ((2x+3y) \ln x)'_x$$

Слева используем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$. Почему? Потому что буква «зет» САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ. Справа следует применить правило $(uv)' = u'v + uv'$ (т.к. оба множителя зависят от «живого икс»):

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} \cdot z'_x &= (2x+3y)'_x \cdot \ln x + (2x+3y) \cdot (\ln x)'_x \\ \frac{1}{z} \cdot z'_x &= (2+0) \cdot \ln x + (2x+3y) \cdot \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Теперь «поднимаем» «зет» вверх правой части, и вспоминаем, что $z = x^{2x+3y}$:

$$z'_x = \left(2 \ln x + (2x+3y) \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot z = \left(2 \ln x + \frac{2x+3y}{x} \right) \cdot x^{2x+3y}$$

С «игрековой» производной всё проще. Поскольку «икс» считается константой, то функция $z = x^{2x+3y}$ играет роль *показательной* функции. Тут просто используем правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$z'_y = (x^{2x+3y})'_y = x^{2x+3y} \ln x \cdot (2x+3y)'_y = 3 \ln x \cdot x^{2x+3y}$$

Самостоятельно убедитесь в справедливости равенства $z''_{xy} = z''_{yx}$, благо, частные производные $(x^{2x+3y})'_x$, $(x^{2x+3y})'_y$ уже известны.

Ответ: $z'_x = \left(2 \ln x + \frac{2x+3y}{x}\right) \cdot x^{2x+3y}$, $z'_y = 3 \ln x \cdot x^{2x+3y}$

Но, повторюсь, что функции наподобие $z = \frac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y}}{\sin xy}$ – крайне редкий гость на практике.

Что дальше?

Дальше нужно немного отдохнуть (хотя бы минут 15-20), и приступить к изучению второго параграфа.

И коль скоро на этой странице ещё осталось место, то анекдот в тему:

Однажды в пространстве функций появилась злобная производная и как пошла всех дифференцировать. Все функции разбегаются кто куда, никому не хочется превращаться! И только одна функция никуда не убегает. Подходит к ней производная и спрашивает:

– А почему это ты от меня никуда не убегаешь?

– Ха. А мне всё равно – ведь я «е в степени икс», и ты со мной ничего не сделаешь!

На что злобная производная с коварной улыбкой отвечает:

– Вот здесь ты ошибаешься, я продифференцирую тебя по «игрек»!

2. Частные производные функции трёх переменных

Функция трёх переменных имеет вид $u = f(x; y; z)$, при этом переменные x, y, z называются *независимыми переменными* или *аргументами*, переменная u называется *зависимой переменной* или *функцией*.

Пример: $u = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$ – функция трёх переменных. В ходу также запись $f(x; y; z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$

И совершенно понятно, что функция трёх переменных имеет **три** частные производные *первого порядка*:

u'_x или $\frac{\partial u}{\partial x}$ – частная производная по «икс»;

u'_y или $\frac{\partial u}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»;

u'_z или $\frac{\partial u}{\partial z}$ – частная производная по «зет»,

равно как очевидно и следующее **правило**:

При дифференцировании по какой-либо переменной два других аргумента считаются константами.

Собственно, полетели:

Пример 16

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных $u = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$

Решение традиционно начнём с частной производной по «икс»:

$$\begin{aligned} u'_{x(y, z - const)} &= (2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8)'_x \stackrel{(1)}{=} \\ &= 2 \cdot (x^2)'_x + (2y^2)'_x + (z^2)'_x + 8z \cdot (x)'_x - (z)'_x + (8)'_x \stackrel{(2)}{=} \\ &= 2 \cdot 2x + 0 + 0 + 8z \cdot 1 - 0 + 0 = 4x + 8z \end{aligned}$$

Обратите внимание на подстрочный индекс $x(y, z - const)$ – начинающим рекомендую помечать, что y, z считаются константами. Меньше риск запутаться.

(1) Используем *свойство линейности* производной. Второе слагаемое $2y^2$ считается константой, и поэтому здесь выносить ничего не нужно. В слагаемом $8xz$ за знак производной вынесена «обычная» константа 8 и «замороженная» переменная «зет».

(2) Находим простейшие производные, не забывая при этом, что y, z – константы. Далее причёсываем ответ.

Найдём частную производную по «игрек»:

$$\begin{aligned}u'_{y(x, z-\text{const})} &= (2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8)'_y = \\&= (2x^2)'_y + 2 \cdot (y^2)'_y + (z^2)'_y + (8xz)'_y - (z)'_y + (8)'_y = \\&= 0 + 2 \cdot 2y + 0 + 0 - 0 + 0 = 4y\end{aligned}$$

(1) Используем свойство линейности. И снова заметьте, что слагаемые $2x^2$, $8xz$ считаются константами, а значит, за знак производной выносить ничего не нужно.

(2) Находим производные, не забывая, что x , z константы. Далее упрощаем ответ.

И, наконец, частная производная по «зет»:

$$\begin{aligned}u'_{z(x, y-\text{const})} &= (2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8)'_z = \\&= (2x^2)'_z + (2y^2)'_z + (z^2)'_z + 8x \cdot (z)'_z - (z)'_z + (8)'_z = \\&= 0 + 0 + 2z + 8x \cdot 1 - 1 + 0 = 2z + 8x - 1\end{aligned}$$

Ответ: $u'_x = 4x + 8z$, $u'_y = 4y$, $u'_z = 2z + 8x - 1$

Немного позанудничаю и повторяю, что при оформлении данных задач следует быть предельно внимательным, в частности, **нельзя терять подстрочные индексы**, которые указывают, по какой переменной проводится дифференцирование. Потеря индекса будет ГРУБЫМ НЕДОЧЁТОМ.

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 17

Найти частные производные первого порядка

$$u = 3x^2 - 4xy + 12xy^2z^3 + yz^2 + 15x$$

И снова вспоминаем предыдущий параграф: что здесь нужно сделать **в первую очередь?** ;)

Ситуация осложнится, если к такой формулировке прикрепить, например, функцию $u = 3x^2 - 4xy$ – здесь будет не понятно, это дана функция **двух** или **трёх** переменных? В этом случае условие должно быть снабжено соответствующим словесным комментарием или же потребуются уточнить этот момент у преподавателя.

Рассмотренные два примера достаточно просты и, решив несколько подобных задач, даже «чайник» принаровится справляться с ними устно.

Но сейчас-то ПИШЕМ, ПИШЕМ! Решение и ответ в конце методички.

И чтобы вы не заскучали, решим пару головоломок:

Пример 18

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u = (\sin x)^{yz}$$

Решение: вроде бы тут «всё просто», но первое впечатление обманчиво. При нахождении частных производных многие будут гадать на кофейной гуще и ошибаться.

Разберём пример последовательно, чётко и подробно.

Начнём с частной производной по «икс». Когда мы находим частную производную по «икс», то переменные y, z считаются константами. Следовательно, показатель нашей функции yz – тоже константа. Для «чайников» рекомендую уже знакомый приём решения: на черновике поменяйте константу yz на конкретное положительное целое число, например, на «пятерку». В результате получится функция одной переменной:

$$u = (\sin x)^5 \text{ или ещё можно записать так: } u = \sin^5 x$$

Это степенная функция со сложным основанием (синус). По правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ дифференцирования сложной функции:

$$u'_x = ((\sin x)^5)'_x = 5(\sin x)^{5-1} \cdot (\sin x)'_x = 5(\sin x)^{4} \cdot \cos x$$

Теперь вспоминаем, что $5 = yz$, таким образом:

$$u'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot \cos x$$

На чистовике, конечно, решение следует оформить так:

$$u'_{x(y, z=const)} = ((\sin x)^{yz})'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot (\sin x)'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot \cos x$$

Находим частную производную по «игрек», x, z считаются константами. Если «икс» константа, то $\sin x$ – тоже константа. На черновике проделываем тот же трюк: $\sin x$ заменим, например, на 3, «зет» – заменим той же «пятеркой». В результате снова получается функция одной переменной:

$$u = 3^{5y}$$

Это показательная функция со сложным показателем. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$u'_y = (3^{5y})'_y = 3^{5y} \cdot \ln 3 \cdot (5y)'_y = 5 \cdot 3^{5y} \cdot \ln 3$$

Теперь выполняем обратную замену $3 = \sin x$, $5 = z$:

$$u'_y = z \cdot (\sin x)^{zy} \cdot \ln(\sin x)$$

На чистовике, понятно, оформление должно выглядеть, благообразно:

$$u'_{y(x, z=const)} = ((\sin x)^{yz})'_y = (\sin x)^{yz} \cdot \ln(\sin x) \cdot (yz)'_y = z \ln(\sin x) \cdot (\sin x)^{yz}$$

И зеркальный случай с частной производной по «зет» (x, y – константы):

$$u'_{z(x, y-\text{const})} = ((\sin x)^{yz})'_z = (\sin x)^{yz} \cdot \ln(\sin x) \cdot (yz)'_z = y \ln(\sin x) \cdot (\sin x)^{yz}$$

Попробуйте провести аналогичный анализ мысленно.

Ответ: $u'_x = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot \cos x$, $u'_y = z \ln(\sin x) \cdot (\sin x)^{yz}$, $u'_z = y \ln(\sin x) \cdot (\sin x)^{yz}$

Забавная вариация темы для самостоятельного решения:

Пример 19

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u = x^y + y^z + z^x$$

Решение и ответ в привычном месте. Если возникнут затруднения, используйте «любительский» приём с заменой, он гарантированно должен помочь. И очередной дубль совета – **не спешите**. Такие примеры быстро не решаю даже я.

Нарабатываем технику решения:

Пример 20

Дана функция трёх переменных. Найти частные производные и дифференциал первого порядка

$$u = \arctg(xy^2 + z)$$

Решение: найдём частную производную по «икс»:

$$\begin{aligned} u'_{x(y, z-\text{const})} &= (\arctg(xy^2 + z))'_x \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (xy^2 + z)'_x \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (y^2 \cdot (x)'_x + (z)'_x) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (y^2 \cdot 1 + 0) = \frac{y^2}{1 + (xy^2 + z)^2} \end{aligned}$$

(1) Перед нами сложная функция, и на первом шаге следует взять производную от арктангенса. При этом мы, по сути, используем табличную формулу производной арктангенса, и по правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ результат необходимо домножить на производную внутренней функции (вложения): $(xy^2 + z)'_x$.

(2) Используем свойство линейности (расписал тут подробно)

(3) и берём оставшиеся производные, не забывая, что y, z считаются константами.

Преимуществом подобных заданий является тот факт, что другие частные производные находятся по очень похожей схеме:

$$\begin{aligned} u'_{y(x, z-\text{const})} &= (\arctg(xy^2 + z))'_y = \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (xy^2 + z)'_y = \\ &= \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (x \cdot (y^2)'_y + (z)'_y) = \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (x \cdot 2y + 0) = \frac{2xy}{1 + (xy^2 + z)^2} \end{aligned}$$

Как видите, шаблон решения точно такой же.

И, наконец, производная по «зет»:

$$\begin{aligned} u'_{z(x, y-\text{const})} &= (\arctg(xy^2 + z))'_z = \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (xy^2 + z)'_z = \\ &= \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot ((xy^2)'_z + (z)'_z) = \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot (0 + 1) = \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \end{aligned}$$

Выполняем вторую часть задания – составим дифференциал первого порядка. Это очень просто, по аналогии с функцией двух переменных, дифференциал первого порядка записывается по формуле:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$$

В данном случае:

$$du = \frac{y^2}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot dx + \frac{2xy}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot dy + \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2} \cdot dz$$

Ответ: $u'_x = \frac{y^2}{1 + (xy^2 + z)^2}, \quad u'_y = \frac{2xy}{1 + (xy^2 + z)^2}, \quad u'_z = \frac{1}{1 + (xy^2 + z)^2},$

$$du = \frac{y^2 dx + 2xy dy + dz}{1 + (xy^2 + z)^2}$$

Самостоятельно:

Пример 21

Найти u'_x, u'_y, u'_z, du следующих функций:

а) $u = e^{xy+z^2};$

б) $u = \sqrt{x^2 - y + 4z^3}.$

Ни в коем случае не пропускаем и прилежно записываем решения! И ответ! Затем устно проверяем результаты.

Теперь немного усложним задание:

Пример 22

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u = \frac{xy}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

Решение:

$$\begin{aligned} u'_{x(y, z=const)} &= \left(\frac{xy}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right)'_x \stackrel{(1)}{=} \frac{y}{z} (x \ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{y}{z} ((x)'_x \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) + x \cdot (\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{y}{z} \left(1 \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_x \right) \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{y}{z} \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

(1) Используя свойство линейности, выносим y , $\frac{1}{z}$.

(2) Под знаком производной у нас находится **произведение** двух функций, **каждая из которых зависит** от нашей «живой» переменной «икс». Поэтому необходимо использовать правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) С производной $(x)'_x$ сложностей никаких, а вот $(\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_x$ является производной сложной функции.

(4) Думаю, все уже освоились с простейшими примерами вроде $(x^2 + y^2 + z^2)'_x$ – тут у нас «жив» только x^2 , производная которого равна $2x$

Практически зеркален случай с производной по «игрек», его я запишу короче и без комментариев:

$$\begin{aligned} u'_{y(x, z=const)} &= \left(\frac{xy}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right)'_y = \frac{x}{z} (y \ln(x^2 + y^2 + z^2))'_y = \\ &= \frac{x}{z} ((y)'_y \ln(x^2 + y^2 + z^2) + y(\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_y) = \\ &= \frac{x}{z} \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

И чуть интереснее обстоят дела с производной по «зет», хотя, всё равно почти то же самое:

$$\begin{aligned}
u'_{z(x, y-\text{const})} &= \left(\frac{xy}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right)'_z \stackrel{(1)}{=} xy \cdot \left(\frac{1}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right)'_z \stackrel{(2)}{=} \\
&= xy \cdot \left(\left(\frac{1}{z} \right)'_z \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{z} (\ln(x^2 + y^2 + z^2))'_z \right) \stackrel{(3)}{=} \\
&= xy \cdot \left(-\frac{1}{z^2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_z \right) = \\
&= xy \cdot \left(-\frac{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot 2z \right) = xy \cdot \left(-\frac{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} \right)
\end{aligned}$$

(1) Используем свойство линейности.

(2) Здесь опять произведение двух функций, **каждая из которых зависит** от «живой» переменной «зет». В принципе, можно использовать формулу производной частного, но проще так пойти другим путём – найти производную от произведения.

(3) Производная $\left(\frac{1}{z} \right)'_z = -\frac{1}{z^2}$ – это табличная производная. Во втором слагаемом – уже знакомая производная сложной функции.

В случае громоздких производных **ответ** лучше записать столбиком:

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{y}{z} \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\
u'_y &= \frac{x}{z} \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\
u'_z &= xy \left(-\frac{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} \right)
\end{aligned}$$

Преподаватель скажет вам спасибо (проверить удобнее). Да и сами устно проверите результаты – здесь это вполне и вполне реально.

И пример для самостоятельного решения:

Пример 23

Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Подумайте, как рациональнее находить ту или иную частную производную. Полное решение и ответ в конце методички.

Наверное, все обратили внимание, что до сих пор я даже не упоминал о частных производных *второго порядка*.

Потому что их 9 штук, и у нас бы тут образовалась «куча мала».

Первая группа – это вторые производные по тем же переменным:

u''_{xx} или $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»;

u''_{yy} или $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»;

u''_{zz} или $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – вторая производная по «зет».

Вторая группа – это *смешанные* частные производные 2-го порядка, их шесть:

u''_{xy} или $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная по «икс, игрек»;

u''_{yx} или $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная по «игрек, икс»;

u''_{xz} или $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ – *смешанная* производная по «икс, зет»;

u''_{zx} или $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ – *смешанная* производная по «зет, икс»;

u''_{yz} или $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ – *смешанная* производная по «игрек, зет»;

u''_{zy} или $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$ – *смешанная* производная по «зет игрек».

...ничего, ничего – всё осилим =)

По аналогии с производными функции двух переменных, при решении задач можно ориентироваться на следующие равенства смешанных производных второго порядка:

$$u''_{xy} = u''_{yx}$$

$$u''_{xz} = u''_{zx}$$

$$u''_{yz} = u''_{zy}$$

Однако, зачастую они не слишком выгодны для проверки – разве что в простых случаях наподобие *Примеров 16-17* (потренируйтесь!). В большинстве примеров так лучше устная проверка либо «двойное решение».

Но задачи на нахождения частных производных 2-го порядка встречаются сами по себе и следующие примеры как раз таковы:

Пример 24

Найти частные производные второго порядка функции $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z}$

Решение: фольклорный сетевой персонаж по имени Капитан Очевидность говорит нам о том, что сначала нужно найти частные производные 1-го порядка:

$$u'_x = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z} \right)'_x = \frac{1}{y} \cdot (x)'_x + \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right)'_x - \frac{1}{z} \cdot (x)'_x = \frac{1}{y} + 0 - \frac{1}{z} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

$$u'_y = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z} \right)'_y = x \cdot \left(\frac{1}{y} \right)'_y + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot (y)'_y - \left(\frac{x}{z} \right)'_y = x \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{z}} - 0 = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$u'_z = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} - \frac{x}{z} \right)'_z = \left(\frac{x}{y} \right)'_z + y \cdot (z^{-\frac{1}{2}})'_z - x \cdot \left(\frac{1}{z} \right)'_z = 0 - \frac{1}{2} y z^{-\frac{3}{2}} - x \cdot \left(-\frac{1}{z^2} \right) = -\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2}$$

Есть. Теперь второй вагон. **Общий принцип** нахождения частных производных 2-го порядка функции трёх переменных **аналогичен принципу** нахождения частных производных 2-го порядка функции двух переменных. Рекомендую начинать со смешанных производных (хотя это принципиально):

Берём найденную производную $u'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ и дифференцируем её по «игрек»:

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)'_y = \left(\frac{1}{y} \right)'_y - \left(\frac{1}{z} \right)'_y = -\frac{1}{y^2} - 0 = -\frac{1}{y^2}$$

Берём найденную производную $u'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ и дифференцируем её по «икс»:

$$u''_{yx} = (u'_y)'_x = \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)'_x = -\frac{1}{y^2} \cdot (x)'_x + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)'_x = -\frac{1}{y^2} + 0 = -\frac{1}{y^2}$$

Равенство $u''_{xy} = u''_{yx}$ выполнено. Гуд.

Разбираемся со второй парой смешанных производных.

Берём найденную производную $u'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ и дифференцируем её по «зет»:

$$u''_{xz} = (u'_x)'_z = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)'_z = \left(\frac{1}{y} \right)'_z - \left(\frac{1}{z} \right)'_z = 0 - \left(-\frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{z^2}$$

Берём найденную производную $u'_z = -\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2}$ и дифференцируем её по «икс»:

$$u''_{zx} = (u'_z)'_x = \left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2} \right)'_x = \left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}} \right)'_x + \frac{1}{z^2} \cdot (x)'_x = 0 + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2}$$

$u''_{xz} = u''_{zx}$, ОК

Аналогично разбираемся с третьей парой смешанных производных:

$$u''_{yz} = (u'_y)'_z = \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)'_z = \left(-\frac{x}{y^2} \right)'_z + \left(z^{-\frac{1}{2}} \right)'_z = 0 - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}}$$

$$u''_{zy} = (u'_z)'_y = \left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2} \right)'_y = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}} \cdot (y)'_y + \left(\frac{x}{z^2} \right)'_y = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}} + 0 = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}}$$

$$u''_{yz} = u''_{zy}$$

И после этих приятных результатов осталось найти три «однобуквенные» производные. Вот здесь уже следует максимально сконцентрировать внимание:

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)'_x = \left(\frac{1}{y} \right)'_x - \left(\frac{1}{z} \right)'_x = 0 - 0 = 0$$

$$u''_{yy} = (u'_y)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)'_y = -x \cdot (y^{-2})'_y + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)'_y = -x \cdot (-2y^{-3}) + 0 = \frac{2x}{y^3}$$

$$u''_{zz} = (u'_z)'_z = \left(-\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2} \right)'_z = -\frac{y}{2} \cdot (z^{-\frac{3}{2}})'_z + x \cdot (z^{-2})'_z = -\frac{y}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot z^{-\frac{5}{2}} - 2xz^{-3} = \frac{3y}{4\sqrt{z^5}} - \frac{2x}{z^3}$$

Ответ:

$$u'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}, \quad u'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad u'_z = -\frac{y}{2\sqrt{z^3}} + \frac{x}{z^2},$$

$$u''_{xx} = 0, \quad u''_{yy} = \frac{2x}{y^3}, \quad u''_{zz} = \frac{3y}{4\sqrt{z^5}} - \frac{2x}{z^3},$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = -\frac{1}{y^2}, \quad u''_{xz} = u''_{zx} = \frac{1}{z^2}, \quad u''_{yz} = u''_{zy} = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}}$$

Готово. Задание не столько сложное, сколько объемное. И коль скоро, оно встречается не так часто, мы ограничимся заключительным примером:

Пример 25

Найти все частные производные первого и второго порядка функции трёх переменных

$$u = z \sin(xy) + \frac{xy}{1-z}$$

Решение можно несколько сократить и сослаться на равенства смешанных частных производных, но тогда могут придаться к тому (и вполне справедливо), что найдены НЕ ВСЕ производные. Кроме того, не будет проверки (пусть не 100%-ной).

Это пример для самостоятельного решения.

На практике теоретически может встретиться и логарифмическое дифференцирование, с которым, думаю, у вас не возникнет трудностей.

И так же эфемерны задания с производными функций бОльшего количества переменных. Однако с ними тоже всё просто, и я хочу подтвердить вашу догадку:

Если мы дифференцируем функцию $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ по какой-либо переменной, то остальные аргументы «замораживаются» и считаются константами. Тут, кстати, чтобы «не разводить грязь», лучше использовать «двухэтажные» обозначения частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Ну что же, кто предупреждён – тот вооружён!

Спасибо за внимание и успехов!

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в [соответствующем разделе](#) портала mathprofi.ru (*ссылка на аннотацию к разделу*).

Из учебной литературы рекомендую 2-й том К.А. Бохана (*попроще*) и 2-й том Г.М. Фихтенгольца (*посложнее*).

3. Решения и ответы

Пример 2. Решение:

а) Найдём частные производные 1-го порядка:

$$z'_x = (x^2 + 2xy - 4x - 2y - 3)'_x = (x^2)'_x + 2y(x)'_x - 4(x)'_x - (2y)'_x - (3)'_x = \\ = 2x + 2y \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 0 - 0 = 2x + 2y - 4$$

$$z'_y = (x^2 + 2xy - 4x - 2y - 3)'_y = (x^2)'_y + 2x(y)'_y - (4x)'_y - 2(y)'_y - (3)'_y = \\ = 0 + 2x \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 1 - 0 = 2x - 2$$

Найдём частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (2x + 2y - 4)'_x = 2 + 0 - 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2x + 2y - 4)'_y = 0 + 2 - 0 = 2$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (2x - 2)'_y = 0 - 0 = 0$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (2x - 2)'_x = 2 - 0 = 2$$

б) Частные производные 1-го порядка:

$$z'_x = (x^2y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5)'_x = 2xy - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{y} - 0 + 0 = 2xy - 4\sqrt{y}$$

$$z'_y = (x^2y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5)'_y = x^2 \cdot 1 - 4x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - 6 \cdot 2y + 0 = x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y$$

Частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (2xy - 4\sqrt{y})'_x = 2 \cdot 1 \cdot y - 0 = 2y$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2xy - 4\sqrt{y})'_y = 2x \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = 2x - \frac{2}{\sqrt{y}}$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y \right)'_x = (x^2)'_x - \frac{2}{\sqrt{y}} \cdot (x)'_x - (12y)'_x = 2x - \frac{2}{\sqrt{y}} \cdot 1 - 0 = 2x - \frac{2}{\sqrt{y}}$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y \right)'_y = (x^2)'_y - 2x \cdot (y^{-\frac{1}{2}})'_y - 12(y)'_y = \\ = 0 - 2x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot y^{-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 1 = \frac{x}{\sqrt{y^3}} - 12$$

Ответ: а) $z'_x = 2x + 2y - 4$, $z'_y = 2x - 2$, $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 2$, $z''_{yy} = 0$, $z''_{yx} = 2$

б) $z'_x = 2xy - 4\sqrt{y}$, $z'_y = x^2 - \frac{2x}{\sqrt{y}} - 12y$, $z''_{xx} = 2y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2x - \frac{2}{\sqrt{y}}$, $z''_{yy} = \frac{x}{\sqrt{y^3}} - 12$

Пример 3. Проверка: найдём смешанные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (y^2 x^{y-1})'_y = (y^2)'_y \cdot x^{y-1} + y^2 \cdot (x^{y-1})'_y = \\ &= 2y \cdot x^{y-1} + y^2 \cdot x^{y-1} \ln x \cdot (y-1)'_y = x^{y-1} (2y + y^2 \ln x \cdot (1-0)) = yx^{y-1} (2 + y \ln x) \end{aligned}$$

Примечание: при нахождении производной $(x^{y-1})'_y$ используется правило дифференцирования сложной функции: $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, однако на практике можно опускать такие простые моменты и сразу записывать, что $(x^{y-1})'_y = x^{y-1} \ln x$

$$\begin{aligned} z''_{yx} &= (z'_y)'_x = (x^y (1 + y \ln x))'_x = (x^y)'_x \cdot (1 + y \ln x) + x^y \cdot (1 + y \ln x)'_x = \\ &= yx^{y-1} \cdot (1 + y \ln x) + x^y \cdot \left(0 + y \cdot \frac{1}{x}\right) = yx^{y-1} \cdot (1 + y \ln x) + x^y \cdot x^{-1} \cdot y = \\ &= yx^{y-1} \cdot (1 + y \ln x) + yx^{y-1} = yx^{y-1} \cdot (1 + y \ln x + 1) = yx^{y-1} \cdot (2 + y \ln x) \end{aligned}$$

Таким образом, $z''_{xy} = z''_{yx}$, что и требовалось проверить.

Пример 5. Решение: найдём частные производные первого порядка:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(e^{\frac{x}{2}} (2 \cos y + x \sin y) \right)'_x = \\ &= \left(e^{\frac{x}{2}} \right)'_x (2 \cos y + x \sin y) + e^{\frac{x}{2}} (2 \cos y + x \sin y)'_x = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)'_x \cdot (2 \cos y + x \sin y) + e^{\frac{x}{2}} ((2 \cos y)'_x + \sin y \cdot (x)'_x) = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cos y + x \sin y) + e^{\frac{x}{2}} (0 + \sin y \cdot 1) = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \left(\cos y + \frac{1}{2} x \sin y \right) + e^{\frac{x}{2}} \sin y = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \left(\cos y + \sin y + \frac{1}{2} x \sin y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(e^{\frac{x}{2}} (2 \cos y + x \sin y) \right)'_y = e^{\frac{x}{2}} (2 \cos y + x \sin y)'_y = \\ &= e^{\frac{x}{2}} (2(\cos y)'_y + x(\sin y)'_y) = e^{\frac{x}{2}} (-2 \sin y + x \cos y) \end{aligned}$$

Найдём смешанные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z'_x)'_y = \left(e^{\frac{x}{2}} \left(\cos y + \sin y + \frac{1}{2} x \sin y \right) \right)'_y = e^{\frac{x}{2}} \left(\cos y + \sin y + \frac{1}{2} x \sin y \right)'_y = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \left((\cos y)'_y + (\sin y)'_y + \frac{1}{2} x (\sin y)'_y \right) = e^{\frac{x}{2}} \left(-\sin y + \cos y + \frac{1}{2} x \cos y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z''_{yx} &= (z'_y)'_x = \left(e^{\frac{x}{2}} (-2 \sin y + x \cos y) \right)'_x = \\
&= (e^{\frac{x}{2}})'_x (-2 \sin y + x \cos y) + e^{\frac{x}{2}} (-2 \sin y + x \cos y)'_x = \\
&= e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2 \sin y + x \cos y) + e^{\frac{x}{2}} (0 + 1 \cdot \cos y) = \\
&= e^{\frac{x}{2}} \left(-\sin y + \frac{1}{2} x \cos y \right) + e^{\frac{x}{2}} \cos y = \\
&= e^{\frac{x}{2}} \left(-\sin y + \cos y + \frac{1}{2} x \cos y \right)
\end{aligned}$$

Ответ: $z'_x = e^{\frac{x}{2}} \left(\cos y + \sin y + \frac{1}{2} x \sin y \right)$, $z'_y = e^{\frac{x}{2}} (-2 \sin y + x \cos y)$,

$$z''_{xy} = z''_{yx} = e^{\frac{x}{2}} \left(-\sin y + \cos y + \frac{1}{2} x \cos y \right)$$

Пример 7. Решение: найдём частные производные 1-го порядка:

$$\begin{aligned}
z'_x &= (\ln(xy-1))'_x = \frac{1}{xy-1} \cdot (xy-1)'_x = \frac{1}{xy-1} \cdot (y-0) = \frac{y}{xy-1} \\
z'_y &= (\ln(xy-1))'_y = \frac{1}{xy-1} \cdot (xy-1)'_y = \frac{1}{xy-1} \cdot (x-0) = \frac{x}{xy-1}
\end{aligned}$$

Запишем дифференциал 1-го порядка: $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{y}{xy-1} dx + \frac{x}{xy-1} dy$

Найдём смешанные производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned}
z''_{xy} &= (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{xy-1} \right)'_y = \frac{(y)'_y \cdot (xy-1) - y \cdot (xy-1)'_y}{(xy-1)^2} = \\
&= \frac{1 \cdot (xy-1) - y \cdot (x-0)}{(xy-1)^2} = \frac{xy-1-xy}{(xy-1)^2} = -\frac{1}{(xy-1)^2} \\
z''_{yx} &= (z'_y)'_x = \left(\frac{x}{xy-1} \right)'_x = \frac{(x)'_x \cdot (xy-1) - x \cdot (xy-1)'_x}{(xy-1)^2} = \\
&= \frac{1 \cdot (xy-1) - x \cdot (y-0)}{(xy-1)^2} = \frac{xy-1-xy}{(xy-1)^2} = -\frac{1}{(xy-1)^2} \\
z''_{xx} &= (z'_x)'_x = \left(\frac{y}{xy-1} \right)'_x = y \cdot ((xy-1)^{-1})'_x = -y(xy-1)^{-2} \cdot (xy-1)'_x = -\frac{y}{(xy-1)^2} \cdot y = -\frac{y^2}{(xy-1)^2} \\
z''_{yy} &= (z'_y)'_y = \left(\frac{x}{xy-1} \right)'_y = x \cdot ((xy-1)^{-1})'_y = -x(xy-1)^{-2} \cdot (xy-1)'_y = -\frac{x}{(xy-1)^2} \cdot x = -\frac{x^2}{(xy-1)^2}
\end{aligned}$$

Ответ: $z'_x = \frac{y}{xy-1}$, $z'_y = \frac{x}{xy-1}$, $dz = \frac{ydx + xdy}{xy-1}$,

$$z''_{xx} = -\frac{y^2}{(xy-1)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{x^2}{(xy-1)^2}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{1}{(xy-1)^2}$$

Пример 9. Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{y}{\sin y} + \sqrt{x} \ln x + \cos(2x + 2y) \right)'_x = \left(\frac{y}{\sin y} \right)'_x + (\sqrt{x} \ln x)'_x + (\cos(2x + 2y))'_x = \\ &= 0 + (\sqrt{x})'_x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)'_x - \sin(2x + 2y) \cdot (2x + 2y)'_x = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - \sin(2x + 2y) \cdot (2 + 0) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin(2x + 2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(\frac{y}{\sin y} + \sqrt{x} \ln x + \cos(2x + 2y) \right)'_y = \left(\frac{y}{\sin y} \right)'_y + (\sqrt{x} \ln x)'_y + (\cos(2x + 2y))'_y = \\ &= \frac{(y)'_y \sin y - y(\sin y)'_y}{\sin^2 y} + 0 - \sin(2x + 2y) \cdot (2x + 2y)'_y = \\ &= \frac{1 \cdot \sin y - y \cdot \cos y}{\sin^2 y} - \sin(2x + 2y) \cdot (0 + 2) = \frac{\sin y - y \cos y}{\sin^2 y} - 2\sin(2x + 2y) \end{aligned}$$

Ответ: $z'_x = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin(2x + 2y), \quad z'_y = \frac{\sin y - y \cos y}{\sin^2 y} - 2\sin(2x + 2y)$

Пример 11. Решение: дважды используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} z'_x &= (\arctg^2(x\sqrt{y}))'_x = 2\arctg(x\sqrt{y}) \cdot (\arctg(x\sqrt{y}))'_x = \\ &= 2\arctg(x\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{1 + (x\sqrt{y})^2} \cdot (x\sqrt{y})'_x = \frac{2\arctg(x\sqrt{y})}{1 + x^2 y} \cdot \sqrt{y} \cdot (x)'_x = \\ &= \frac{2\arctg(x\sqrt{y})}{1 + x^2 y} \cdot \sqrt{y} \cdot 1 = \frac{2\sqrt{y}\arctg(x\sqrt{y})}{1 + x^2 y} \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} z'_y &= (\arctg^2(x\sqrt{y}))'_y = 2\arctg(x\sqrt{y}) \cdot (\arctg(x\sqrt{y}))'_y = \\ &= 2\arctg(x\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{1 + (x\sqrt{y})^2} \cdot (x\sqrt{y})'_y = \frac{2\arctg(x\sqrt{y})}{1 + x^2 y} \cdot x \cdot (\sqrt{y})'_y = \\ &= \frac{2\arctg(x\sqrt{y})}{1 + x^2 y} \cdot x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{x\arctg(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1 + x^2 y)} \end{aligned}$$

Ответ: $z'_x = \frac{2\sqrt{y}\arctg(x\sqrt{y})}{1 + x^2 y}, \quad z'_y = \frac{x\arctg(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1 + x^2 y)}$

Пример 12. Решение: преобразуем функцию:

$$z = \ln \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} = \ln \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x+y}{x-y} \right) = \frac{1}{3} (\ln(x+y) - \ln(x-y))$$

Найдём частные производные 1-го порядка:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{1}{3} (\ln(x+y) - \ln(x-y)) \right)'_x = \frac{1}{3} ((\ln(x+y))'_x - (\ln(x-y))'_x) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} \cdot (x+y)'_x - \frac{1}{x-y} \cdot (x-y)'_x \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} \cdot (1+0) - \frac{1}{x-y} \cdot (1-0) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right) = \frac{x-y-(x+y)}{3(x+y)(x-y)} = -\frac{2y}{3(x^2-y^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(\frac{1}{3} (\ln(x+y) - \ln(x-y)) \right)'_y = \frac{1}{3} ((\ln(x+y))'_y - (\ln(x-y))'_y) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} \cdot (x+y)'_y - \frac{1}{x-y} \cdot (x-y)'_y \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} \cdot (0+1) - \frac{1}{x-y} \cdot (0-1) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) = \frac{x-y+x+y}{3(x+y)(x-y)} = \frac{2x}{3(x^2-y^2)} \end{aligned}$$

Самостоятельно проверьте, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Примечание: любопытно, что для нахождения z''_{xy} , z''_{yx} проще использовать

$$z'_x = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right), \quad z'_y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right), \text{ нежели их «причѐсанные» версии}$$

Ответ: $z'_x = -\frac{2y}{3(x^2-y^2)}, \quad z'_y = \frac{2x}{3(x^2-y^2)}$

Пример 14. Решение: найдем частные производные первого порядка:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\arcsin \frac{y}{x^2} \right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x^2} \right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}} \cdot y \cdot (x^{-2})'_x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4-y^2}{x^4}}} \cdot y \cdot (-2x^{-3}) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right) = -\frac{2x^2y}{x^3\sqrt{x^4-y^2}} = -\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}} \end{aligned}$$

$$z'_y = \left(\arcsin \frac{y}{x^2} \right)'_y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}} \cdot \left(\frac{y}{x^2} \right)'_y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}$$

Найдём частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z'_x)'_y = \left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}} \right)'_y = -\frac{2}{x} \left(\frac{y}{\sqrt{x^4-y^2}} \right)'_y = -\frac{2}{x} \cdot \frac{(y)'_y \sqrt{x^4-y^2} - y \cdot (\sqrt{x^4-y^2})'_y}{(\sqrt{x^4-y^2})^2} = \\ &= -\frac{2}{x} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^4-y^2} - y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^4-y^2}} \cdot (x^4-y^2)'_y}{x^4-y^2} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^4-y^2} - \frac{y(0-2y)}{2\sqrt{x^4-y^2}}}{x^4-y^2} = \\ &= -\frac{2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^4-y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^4-y^2}}}{x^4-y^2} = -2 \cdot \frac{x^4-y^2+y^2}{x(x^4-y^2)\sqrt{x^4-y^2}} = -2 \cdot \frac{x^4}{x\sqrt{(x^4-y^2)^3}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yx} &= (z'_y)'_x = \left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}} \right)'_x = \left((x^4-y^2)^{-\frac{1}{2}} \right)'_x = -\frac{1}{2} (x^4-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^4-y^2)'_x = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(x^4-y^2)^3}} \cdot (4x^3-0) = \frac{-2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = \left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}} \right)'_x = \left(-\frac{2y}{\sqrt{x^6-x^2y^2}} \right)'_x = -2y \cdot \left((x^6-x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} \right)'_x = \\ &= -2y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (x^6-x^2y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^6-x^2y^2)'_x = \frac{y}{\sqrt{(x^6-x^2y^2)^3}} \cdot (6x^5-2xy^2) = \\ &= \frac{y \cdot 2x(3x^4-y^2)}{x^3\sqrt{(x^4-y^2)^3}} = \frac{2y(3x^4-y^2)}{x^2 \cdot \sqrt{(x^4-y^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= (z'_y)'_y = \left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}} \right)'_y = \left((x^4-y^2)^{-\frac{1}{2}} \right)'_y = -\frac{1}{2} (x^4-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^4-y^2)'_y = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(x^4-y^2)^3}} \cdot (0-2y) = \frac{y}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}} \end{aligned}$$

Ответ: $z'_x = -\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}, \quad z'_y = \frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}},$

$$z''_{xx} = \frac{2y(3x^4-y^2)}{x^2 \cdot \sqrt{(x^4-y^2)^3}}, \quad z''_{yy} = \frac{y}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

Пример 17. Решение:

$$u'_x = (3x^2 - 4xy + 12xy^2z^3 + yz^2 + 15x)'_x = 3 \cdot (x^2)'_x - 4y \cdot (x)'_x + 12y^2z^3 \cdot (x)'_x + (yz^2)'_x + 15 \cdot (x)'_x = \\ = 3 \cdot 2x - 4y \cdot 1 + 12y^2z^3 \cdot 1 + 0 + 15 \cdot 1 = 6x - 4y + 12y^2z^3 + 15$$

$$u'_y = (3x^2 - 4xy + 12xy^2z^3 + yz^2 + 15x)'_y = (3x^2)'_y - 4x \cdot (y)'_y + 12xz^3 \cdot (y^2)'_y + z^2 \cdot (y)'_y + (15x)'_y = \\ = 0 - 4x \cdot 1 + 12xz^3 \cdot 2y + z^2 \cdot 1 + 0 = -4x + 24xyz^3 + z^2$$

$$u'_z = (3x^2 - 4xy + 12xy^2z^3 + yz^2 + 15x)'_z = (3x^2)'_z - (4xy)'_z + 12xy^2 \cdot (z^3)'_z + y \cdot (z^2)'_z + (15x)'_z = \\ = 0 - 0 + 12xy^2 \cdot 3z^2 + y \cdot 2z + 0 = 36xy^2z^2 + 2yz$$

Ответ: $u'_x = 6x - 4y + 12y^2z^3 + 15$, $u'_y = -4x + 24xyz^3 + z^2$, $u'_z = 36xy^2z^2 + 2yz$

Пример 19. Решение:

$$u'_x = (x^y + y^z + z^x)'_x = yx^{y-1} + 0 + z^x \ln z = yx^{y-1} + z^x \ln z$$

$$u'_y = (x^y + y^z + z^x)'_y = x^y \ln x + zy^{z-1} + 0 = x^y \ln x + zy^{z-1}$$

$$u'_z = (x^y + y^z + z^x)'_z = 0 + y^z \ln y + xz^{x-1} = y^z \ln y + xz^{x-1}$$

Ответ: $u'_x = yx^{y-1} + z^x \ln z$, $u'_y = x^y \ln x + zy^{z-1}$, $u'_z = y^z \ln y + xz^{x-1}$

Пример 21. Решение: а) Найдём частные производные первого порядка:

$$u'_x = (e^{xy+z^2})'_x = e^{xy+z^2} \cdot (xy+z^2)'_x = e^{xy+z^2} \cdot (y+0) = ye^{xy+z^2}$$

$$u'_y = (e^{xy+z^2})'_y = e^{xy+z^2} \cdot (xy+z^2)'_y = e^{xy+z^2} \cdot (x+0) = xe^{xy+z^2}$$

$$u'_z = (e^{xy+z^2})'_z = e^{xy+z^2} \cdot (xy+z^2)'_z = e^{xy+z^2} \cdot (0+2z) = 2ze^{xy+z^2}$$

Составим дифференциал первого порядка:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = ye^{xy+z^2} dx + xe^{xy+z^2} dy + 2ze^{xy+z^2} dz$$

б) Найдём частные производные и дифференциал первого порядка:

$$u'_x = (\sqrt{x^2 - y + 4z^3})'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} \cdot (x^2 - y + 4z^3)'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}$$

$$u'_y = (\sqrt{x^2 - y + 4z^3})'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} \cdot (x^2 - y + 4z^3)'_y = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}$$

$$u'_z = (\sqrt{x^2 - y + 4z^3})'_z = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} \cdot (x^2 - y + 4z^3)'_z = \frac{12z^2}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} = \frac{6z^2}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} dx - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} dy + \frac{6z^2}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}} dz$$

Ответ: а) $u'_x = ye^{xy+z^2}$, $u'_y = xe^{xy+z^2}$, $u'_z = 2ze^{xy+z^2}$, $du = e^{xy+z^2} (ydx + xdy + 2zdz)$

б)

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}, \quad u'_y = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}, \quad u'_z = \frac{6z^2}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}, \quad du = \frac{2x dx - dy + 6z^2 dz}{\sqrt{x^2 - y + 4z^3}}$$

Пример 23. Решение:

$$u'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{(x)'_x \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$u'_y = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_y = x \cdot ((x^2 + y^2 + z^2)^{-1})'_y = -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_y =$$

$$= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$u'_z = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_z = x \cdot ((x^2 + y^2 + z^2)^{-1})'_z = -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)'_z =$$

$$= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot 2z = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Ответ: $u'_x = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, $u'_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, $u'_z = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

Пример 25. Решение: найдем частные производные первого порядка:

$$u'_x = \left(z \sin(xy) + \frac{xy}{1-z} \right)'_x = z(\sin(xy))'_x + \frac{y}{1-z} \cdot (x)'_x =$$

$$= z \cos(xy) \cdot (xy)'_x + \frac{y}{1-z} \cdot 1 = yz \cos(xy) + \frac{y}{1-z}$$

$$u'_y = \left(z \sin(xy) + \frac{xy}{1-z} \right)'_y = z(\sin(xy))'_y + \frac{x}{1-z} \cdot (y)'_y =$$

$$= z \cos(xy) \cdot (xy)'_y + \frac{x}{1-z} \cdot 1 = xz \cos(xy) + \frac{x}{1-z}$$

$$u'_z = \left(z \sin(xy) + \frac{xy}{1-z} \right)'_z = \sin(xy) \cdot (z)'_z + xy \cdot ((1-z)^{-1})'_z =$$

$$= \sin(xy) \cdot 1 - \frac{xy}{(1-z)^2} \cdot (1-z)'_z = \sin(xy) + \frac{xy}{(1-z)^2}$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = \left(yz \cos(xy) + \frac{y}{1-z} \right)'_x = yz(\cos(xy))'_x + \left(\frac{y}{1-z} \right)'_x =$$

$$= yz \cdot (-\sin(xy)) \cdot (xy)'_x + 0 = -y^2 z \sin(xy)$$

$$u''_{yy} = (u'_y)'_y = \left(xz \cos(xy) + \frac{x}{1-z} \right)'_y = xz(\cos(xy))'_y + \left(\frac{x}{1-z} \right)'_y =$$

$$= xz \cdot (-\sin(xy)) \cdot (xy)'_y + 0 = -x^2 z \sin(xy)$$

$$u''_{zz} = (u'_z)'_z = \left(\sin(xy) + \frac{xy}{(1-z)^2} \right)'_z = (\sin(xy))'_z + xy \cdot ((1-z)^{-2})'_z =$$

$$= 0 - \frac{2xy}{(1-z)^3} \cdot (1-z)'_z = \frac{2xy}{(1-z)^3}$$

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y = \left(yz \cos(xy) + \frac{y}{1-z} \right)'_y = z(y \cos(xy))'_y + \frac{1}{1-z} \cdot (y)'_y =$$

$$= z((y)'_y \cos(xy) + y(\cos(xy))'_y) + \frac{1}{1-z} \cdot 1 = z(\cos(xy) - xysin(xy)) + \frac{1}{1-z}$$

$$u''_{yx} = (u'_y)'_x = \left(xz \cos(xy) + \frac{x}{1-z} \right)'_x = z(x \cos(xy))'_x + \frac{1}{1-z} \cdot (x)'_x =$$

$$= z((x)'_x \cos(xy) + x(\cos(xy))'_x) + \frac{1}{1-z} \cdot 1 = z(\cos(xy) - xysin(xy)) + \frac{1}{1-z}$$

$$u''_{xz} = (u'_x)'_z = \left(yz \cos(xy) + \frac{y}{1-z} \right)'_z = y \cos(xy) \cdot (z)'_z + y \left(\frac{1}{1-z} \right)'_z = y \cos(xy) + \frac{y}{(1-z)^2}$$

$$u''_{zx} = (u'_z)'_x = \left(\sin(xy) + \frac{xy}{(1-z)^2} \right)'_x = \cos(xy) \cdot (xy)'_x + \frac{y}{(1-z)^2} \cdot (x)'_x = y \cos(xy) + \frac{y}{(1-z)^2}$$

Примечание: $\left(\frac{1}{1-z} \right)'_z = ((1-z)^{-1})'_z = -(1-z)^{-2} \cdot (1-z)'_z = -\frac{1}{(1-z)^2} \cdot (0-1) = \frac{1}{(1-z)^2}$

$$u''_{yz} = (u'_y)'_z = \left(xz \cos(xy) + \frac{x}{1-z} \right)'_z = x \cos(xy) \cdot (z)'_z + x \left(\frac{1}{1-z} \right)'_z = x \cos(xy) + \frac{x}{(1-z)^2}$$

$$u''_{zy} = (u'_z)'_y = \left(\sin(xy) + \frac{xy}{(1-z)^2} \right)'_y = \cos(xy) \cdot (xy)'_y + \frac{x}{(1-z)^2} \cdot (y)'_y = x \cos(xy) + \frac{x}{(1-z)^2}$$

Ответ:

$$u'_x = yz \cos(xy) + \frac{y}{1-z}, \quad u'_y = xz \cos(xy) + \frac{x}{1-z}, \quad u'_z = \sin(xy) + \frac{xy}{(1-z)^2},$$

$$u''_{xx} = -y^2 z \sin(xy), \quad u''_{yy} = -x^2 z \sin(xy), \quad u''_{zz} = \frac{2xy}{(1-z)^3},$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = z(\cos(xy) - xysin(xy)) + \frac{1}{1-z},$$

$$u''_{xz} = u''_{zx} = y \cos(xy) + \frac{y}{(1-z)^2},$$

$$u''_{yz} = u''_{zy} = x \cos(xy) + \frac{x}{(1-z)^2}$$