

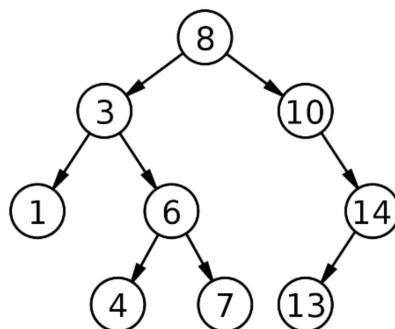
8-§. Daraxtlar grafning xususiy holati sifatida

Daraxt - bu bog‘langan asiklik graf, ya’ni sikllar yo‘q va uchlar juftligi orasida bitta yo‘l bor (29-rasm). Kirishning nol darajasiga ega bo‘lgan uch **daraxtning** ildizi, chiqish nol darajaga ega tugunlar esa **barglar** deb nomlanadi.

Ulanish har qanday uchlar juftligi o‘rtasida marshrut mavjudligini anglatadi, aylanuvchanlik sikllar yo‘qligini anglatadi. Demak, xususan, shundan kelib chiqadiki, daraxtdagi qirralarning soni uchlar sonidan bitta kamroq va har qanday uchlar juftlari orasida bitta va faqat bitta yo‘l bor.

O‘rmon – juda ko‘p daraxtlardir.

Yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) daraxt - bu faqat bitta vertikal kirish nol darajasiga ega bo‘lgan (boshqa yoylar unga olib kelmaydigan), boshqa uchlarning kirish darajasi 1 bo‘lgan siklik orgraf (sikllarni o‘z ichiga olmaydigan yo‘naltirilgan graf).



29-rasm. Yo‘naltirilgan daraxt

Daraxtning asosiy tushunchalari

Ildiz tuguni - daraxtning eng yuqori tuguni (18-rasmdagi 8-tugun).

Ildiz – ixtiyoriy tanlab olingan uchlardan biri.

Barg yoki terminal tuguni – avlodi mavjud bo‘lmagan tugun (18-rasmdagi 1, 4, 7, 13 tugunlari).

Ichki tugun - bu daraxtga avlodi mavjud bo‘lgan har qanday tugun va shuning uchun barg tuguni emas (18-rasmda 3, 6, 10, 14).

Uchning darajasi - unga tushgan qirralarning soni.

Sentroid - uch, u olib tashlanganida hosil bo'lgan ulanish komponentlarining o'lchamlari $\frac{n}{2}$ dan oshmaydi (asl daraxtning yarmi kattaligi)

Tugun. Tugun - bu ba'zi bir qat'iy tabiat obyektiga mos keladigan ikki turdagi graf elementlaridan birining nusxasi. Tugun ma'lum bir ma'lumot strukturasi yoki daraxtning o'zi qiymatini, holatini yoki ko'rinishini o'z ichiga olishi mumkin. Daraxtning har bir tugunida daraxt ostida joylashgan nol yoki undan ko'p avlod tugunlari mavjud (odatda, daraxtlar haqiqiy daraxtlar singari yuqoriga emas, pastga qarab "o'sadi"). Avlodga ega bo'lgan tugun o'z avlodiga nisbatan ajdod tugun deb nomlanadi (oldingi tugun yoki kattaroq tugun). Har bir tugunning ko'pi bilan bitta ajdodi bor.

Tugunning balandligi - bu tugundan eng pastki tugunga (chekka tugunga) barg deb ataladigan pastga tushadigan yo'lning maksimal uzunligi. Ildiz tugunining balandligi butun daraxtning balandligiga teng.

Ildiz tugunlari. Ajdodlari bo'lmagan tugun (eng yuqorisi) ildiz tuguni deb ataladi. Bu daraxtdagi ko'plab amallar boshlanadigan tugun (garchi ba'zi algoritmlar "barglar" dan boshlanib, ular ildizga yetguncha davom etadi). Boshqa barcha tugunlarga ildiz tugunidan qirralar (yoki bog'lanishlar) bo'ylab harakatlanish orqali erishish mumkin (rasmiy ta'rifga ko'ra, har bir bunday yo'l noyob bo'lishi kerak). Diagrammalarda u odatda eng yuqori qismida tasvirlangan. Ba'zi daraxtlarda, masalan, uyumlarda, ildiz tuguni maxsus xususiyatlarga ega. Daraxtdagi har bir tugunni shu tugundan "o'sayotgan" kichik daraxtning ildiz tuguni deb hisoblash mumkin.

Daraxt osti - bu alohida daraxt sifatida namoyish etilishi mumkin bo'lgan daraxtga o'xshash ma'lumotlar strukturasi bir qismidir. T daraxtining har qanday tuguni va uning barcha nasl tugunlari bilan birga T daraxtining pastki daraxti hisoblanadi. **Daraxt osti** har qanday tuguni uchun, yo ushbu kichik daraxtning ildiz tuguniga yo'l bo'lishi kerak, yo tugunning o'zi ildiz bo'lishi kerak. Ya'ni, kichik daraxt ildiz tuguniga butun daraxt bilan bog'lanadi va boshqa barcha tugunlar bilan daraxt

osti aloqasi tegishli daraxt osti tushunchasi orqali aniqlanadi ("to'plam osti" atamasi bilan o'xshashlik bo'yicha).

Daraxt strukturasi orasida tartiblangan daraxtlar eng keng tarqalgan. Binar (Ikkilik) qidiruv daraxti - tartiblangan daraxt turidir.

Daraxtlar ustida bajariladigan umumiy amallar:

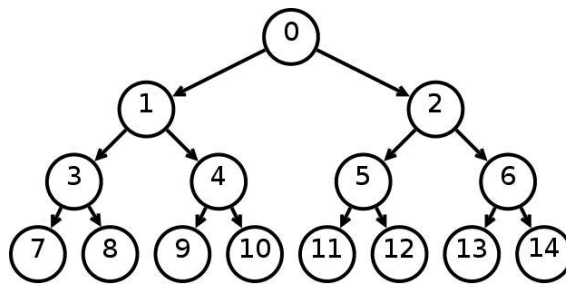
- 1) yangi elementni ma'lum bir joyga kiritish;
- 2) daraxt osti kiritish;
- 3) daraxt shoxini qo'shish (payvandlash deb ataladi);
- 4) har qanday tugun uchun ildiz elementini topish;
- 5) ikkita uchning eng kichik umumiy ajdodini topish;
- 6) daraxtning barcha elementlarini sanab chiqish;
- 7) daraxt novdasi elementlarini sanab chiqish;
- 8) izomorfik daraxt osti qidirish;
- 9) elementni qidirish;
- 10) daraxt shoxini olib tashlash;
- 11) daraxt ostini olib tashlash;
- 12) elementni o'chirish.

Daraxtlarning qo'llanish sohalari:

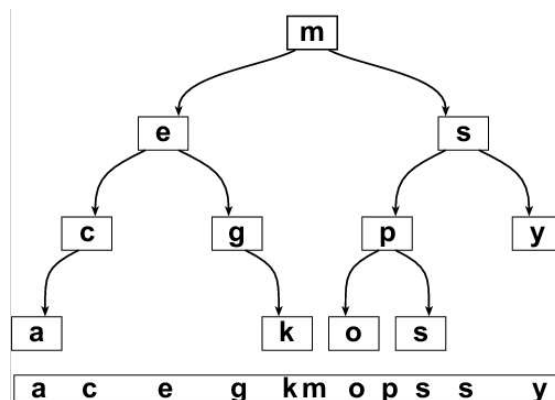
- 1) ma'lumotlar iyerarxiyasini boshqarish;
- 2) axborot olishni soddalashtirish
- 3) ma'lumotlarning saralangan ro'yxatlarini boshqarish;
- 4) arifmetik ifodalarni tahlil qilish (inglizcha parsing), dasturni optimallashtirish;
- 5) turli xil vizual effektlarni olish uchun raqamli rasmlarni yaratish texnologiyasi sifatida;
- 6) ko'p bosqichli qaror qabul qilish shakllarida (shaxmat).

8.1. Binar (ikkilik) daraxtlar

Ikkilik daraxt - bu har bir tugunda ko'pi bilan ikkita avlod (bola) bo'lgan ma'lumotlarning iyerarxik tuzilishi. Odatda, birinchisi ajdod tuguni, avlodlar esa chap va o'ng merosxo'rlar deb nomlanadi.



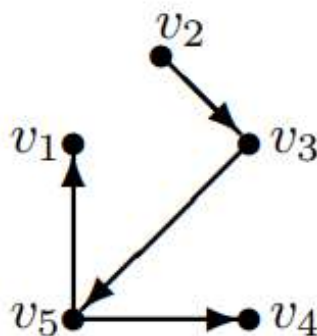
30-rasm. Binar daraxt



31-rasm. Kalitlari lotin alifbosi bo‘lgan ikkilik qidiruv daraxti, alfavit bo‘yicha tartiblangan.

8.2. Daraxtlarni mashinada tasvirlash usullari

Matritsali ko‘rinish. Daraxt, boshqa har qanday graf singari, matritsalar yordamida tasvirlanishi mumkin. Misol tariqasida quyida 32-rasmda ko‘rsatilgan tartiblangan daraxt uchun A – qo‘shnilik va B – insidentlik matritsalarini keltirilgan:



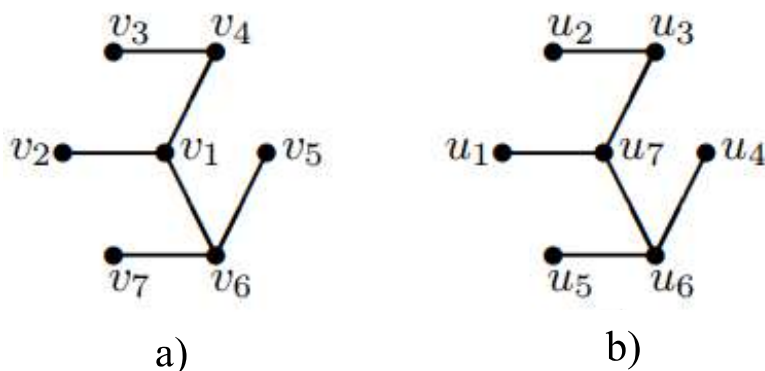
$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{B} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

32-rasm. Daraxtlarda qo‘shnilik (A) va insidentlik (B) matritsalarini

Daraxtlar uchun bunday matritsalarining o‘ziga xos xususiyatlarini ta’kidlaylik. $\frac{n-1}{n}$ ga teng bo‘lgan daraxtning qirralari sonining nisbati bog‘langan graf uchun minimal, shuning uchun daraxtning qo‘shnilik matritsasi juda kam (ularning nisbati va undagi nollar $(n-1) : (n^2 - n + 1) \approx 1/n$ yo‘naltirilgan daraxt uchun va $2(n-1) : (n^2 - 2n + 2) \approx \frac{2}{n}$ yo‘naltirilmagan uchun).

Daraxtning insidentlik matritsasi $n \times (n-1)$ o‘lchamiga ega, ya’ni kvadratga yaqin, va aslida, agar biz uning ortiqcha ekanligini hisobga olsak. Darhaqiqat, har qanday qatorni olib tashlab, biz avvalgidek grafni to‘liq tavsiflaydigan kvadrat matritsani olamiz.

Quyida keltirilgan insident matritsasining yana bir xususiyati quyidagicha. Satr va ustunlarni qayta tartiblash orqali har qanday daraxtning insidentlik matritsasi i ustun birliklaridan biri i qatorda, ikkinchisi pastki qatorlardan birida bo‘lganda pastki trapetsiya matritsaga tushirilishi mumkin.



$$B_a = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad B_b = \begin{matrix} & e_1 & e_4 & e_2 & e_5 & e_6 & e_3 \\ \begin{matrix} u_1(v_2) \\ u_2(v_3) \\ u_3(v_4) \\ u_4(v_5) \\ u_5(v_7) \\ u_6(v_6) \\ u_7(v_1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

33-rasm. Daraxtlarda insidentlik matritsalar

8.3. Pryufer Kodi

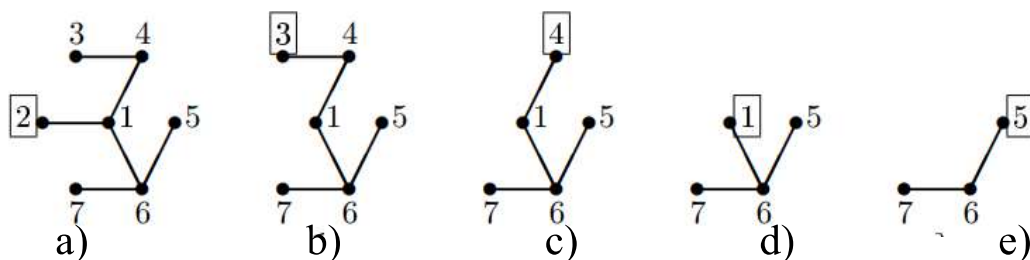
Pryufer kodi $[1, n]$ kesmadagi $n-2$ butun sonlar ketma-ketligi yordamida n uchlari bilan belgilangan daraxtlarni birma-bir kodlash usuli. Ya'ni, Pryufer kodi - bu to'liq graf va raqamlar ketma-ketligining barcha daraxtlari orasidagi biyeksiyasidir.

Daraxtlarni kodlashning ushbu usuli nemis matematiki Xaynts Pryufer tomonidan 1918-yilda taklif qilingan. n ta uchlari bilan berilgan daraxt uchun Pryufer kodini qurish algoritmini ko'rib chiqaylik.

Kirishda qirralarning ro'yxati berilgan. Eng kichik raqamga ega bo'lgan daraxtning bargi tanlanadi, keyin u daraxtdan olib tashlanadi va bu barg bilan bog'langan uchlarning soni Pryufer kodiga qo'shiladi. Ushbu protsedura $n - 2$ marta takrorlanadi. Oxir-oqibat, daraxtda faqat 2 ta uch qoladi va algoritmi shu yerda tugaydi. Qolgan ikkita uchning raqamlari kodga yozilmaydi.

Shunday qilib, ma'lum bir daraxt uchun Pryufer kodi $n - 2$ ta raqamlar ketma-ketligi bo'lib, bu yerda har bir raqam eng kichik barg bilan bog'langan uchning soni - bu segmentdagi raqam $[1, n]$.

Pryufer kodini aniqlash.



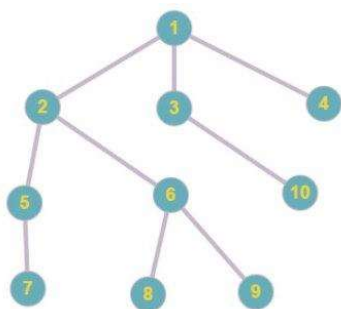
34-rasm. Daraxtlar uchun Pryufer kodini aniqlash bosqichlari

Kodni olish algoritmi quyidagicha. Daraxt tugunlari 1 dan n gacha bo'lgan raqamlar bilan belgilangan (raqamlangan) bo'lsin. Biz eng kichik sonli 1-darajali uchni topamiz va kodga unga qo'shni bo'lgan uchning sonini kiritamiz, shundan so'ng topilgan uchni (qirra bilan birga) o'chirib tashlaymiz. Olingan graf osti bilan biz xuddi shu amalni bajaramiz, uni faqat bitta qirra qolguncha takrorlaymiz. Kodni yaratish jarayoni 34-rasmدا keltirilgan. Keyingi bosqichda o'chirilgan uchning soni ramkaga kiritilgan. Berilgan grafda (34-rasm, a) birinchi darajali uchlar orasida minimal son 2-uchda joylashgan. U 1-uchga qo'shni. Shuning uchun Pryufer kodining birinchi raqami 1. 2-uchni olib tashlash natijasida biz b-rasmدا ko'rsatilgan grafni olamiz. Ushbu grafda darajasi birga teng bo'lgan uchlar orasidagi minimal son 3 ga teng, shuning uchun kodning ikkinchi raqami 4. Shaklda ko'rsatilgan graflarga mos keladigan yana uchta takrorlashni bajargandan so'ng, c, d, e-rasmlardagi bitta qirradan iborat daraxtni olamiz {7; 6}. Jarayon tugallandi.

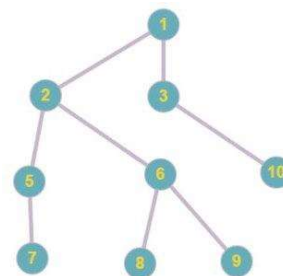
Qabul qilingan qadamlarning natijalari jadvalda keltirilgan. Oxirgi qatorida kerakli kod mavjud - 14166.

Qadam		1	2	3	4	5
34-rasm		a	b	c	d	e
Minimal raqam		2	3	4	1	5
O'chirilgan qirra		{1;2}	{4;3}	{1;4}	{6;1}	{6;5}
Pryufer kodi		1	4	1	6	6

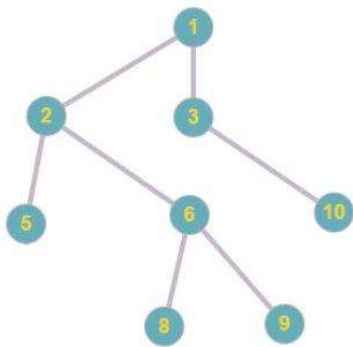
2-misol. 35-rasmدا berilgan daraxtning Pryufer kodini topish qadamlari 35-a,b,c,d,e,f,g,h rasmlarda berilgan.



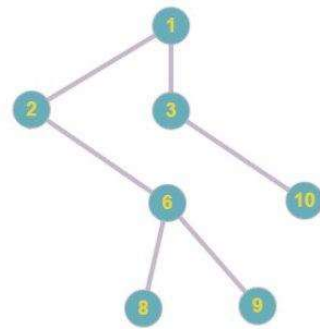
35-rasm. Daraxtning dastlabki berilishi



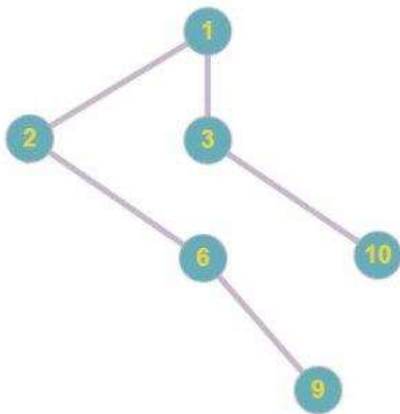
a) Pryufer kodi: 1



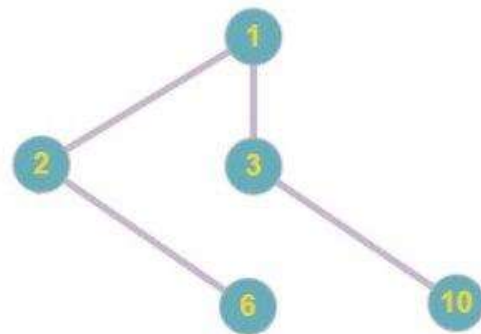
b) Pryufer kodi: 1 5



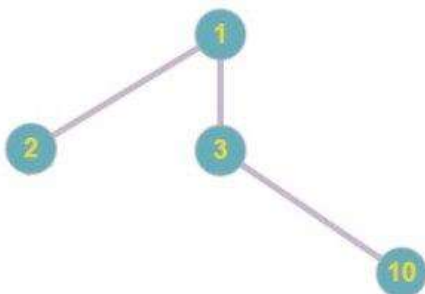
c) Pryufer kodi: 1 5 2



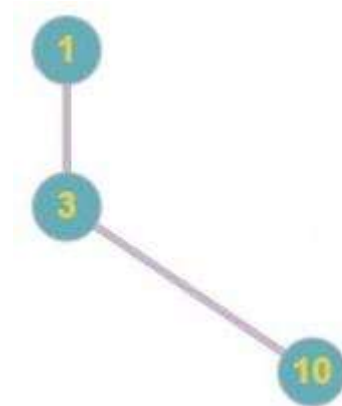
d) Pryufer kodi: 1 5 2 6



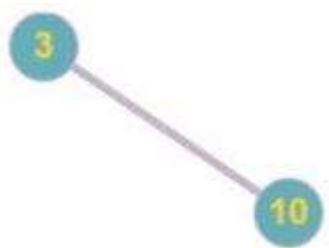
e) Pryufer kodi: 1 5 2 6 6



f) Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2



g) Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1



h) Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Pryufer kodi orqali daraxtni tiklash. Pryufer kodi bilan ifodalangan daraxtlarni hosil qilish algoritmi qirralarning tegishli ro'yxatini olishga imkon beradi.

Antikodni Pryufer kodiga kiritilmagan uchlar sonining ortib boruvchi ketma-ketligi deylik. Ko'rib chiqilgan misol uchun antikod 2357 ga teng.

Daraxt ketma-ket qirralarni qo'shib quriladi. Keyingi qo'shilgan chekka, birinchisidan boshlab, vertikal juftlik bilan hosil bo'ladi, ularning raqamlari kod satrida va antikod satrida birinchi bo'ladi. Shundan so'ng, ishlatilgan satr elementlari chiziladi. Agar kod satridan chiqib ketgan raqam undagi qolgan elementlar qatoriga kiritilmagan bo'lsa, uning tartibini buzmasdan antikod qatoriga qo'shilishi kerak. Ta'riflangan harakatlar kod va antikod satrlarining "qoldiqlari" bilan ularning birinchisining barcha elementlari o'chirilguncha takrorlanadi. Bunday holda, antikod chizig'ida hosil qilingan ro'yxatga qo'shiladigan so'nggi chekkani belgilaydigan ikkita element bo'ladi, natijada biz Pryufer kodi bilan belgilangan daraxtga mos keladigan $n - 1$ qirralarning ro'yxatini olamiz.

3-misol. Masalan, 1-misolda berilgan 14166 kodi yordamida daraxtni tiklaylik. Yuqorida 1-misolda ko'rsatilgandek mos keladigan antikod 2357 ni tashkil qiladi. Shuning uchun daraxtning birinchi qirrasi $\{1; 2\}$. 1 va 2-ni kesib o'tib, biz kod satrida 4166 va antikod satrida 357 olamiz. Keyingi takrorlashda $\{4; 3\}$ juftligini kesib tashlaymiz va qatorga antikod 4 ni kiritamiz va hokazo. Takrorlashlar ketma-ketligi 8-jadvalda keltirilgan.

8-jadval.**Pryufer kodi orqali daraxtni tiklash ketma-ketligi**

Qadam	1	2	3	4	5	6	
Kod satri	1	4	1	6	6		
Antikod satri	2	3	5	7			
		3	5	7			
			4	5	7		
				1	5	7	
					5	7	
						6	7
Qirra qo'shish	{1;2}	{4;3}	{1;4}	{6;1}	{6;5}	{6;7}	

Qirralarning ro'yxatini tahlil qilib, asl daraxt olinganligiga ishonch hosil qilamiz. E'tibor bering, qirralarning tartibi avvalgi jadvaldagi kabi.

4-misol. Pryufer kodini yaratish vazifasining oldida kodlangan daraxtni tiklash vazifasi ham mavjud. Daraxtlarni qayta qurish algoritmini quyidagi shartlar bilan ko'rib chiqamiz: kirish sifatida Pryufer kodini ifodalovchi raqamlar (uchlar) ketma-ketligi, natijada daraxt qirralarining ro'yxati bo'ladi.

Kod hal qilish algoritmini batafsil ko'rib chiqamiz. Koddan tashqari, bizga grafning barcha uchlari ro'yxati kerak. Biz bilamizki, Pryufer kodi $n-2$ ta uchlardan iborat, bu yerda n - grafdagi uchlar soni. Ya'ni kodlangan daraxtdagi uchlar sonini kodning kattaligi bo'yicha aniqlashimiz mumkin.

Natijada, algoritmning boshida bizda Pryuferning $n-2$ o'lchamdagi kodlari va grafdagi barcha uchlar qatori mavjud: $[1 \dots n]$. Keyin quyidagi protsedura $n-2$ marta takrorlanadi: Pryufer kodini o'z ichiga olgan massivning birinchi elementi olinadi va kod bilan massivda bo'lmagan eng kichik uchni qidirish daraxt uchlari bilan massivda amalga oshiriladi. Topilgan uch va Pryufer kodi bilan massivning joriy elementi daraxtning qirrasini tashkil qiladi. Ushbu uchlar tegishli massivlardan olib tashlanadi va yuqoridagi protsedura kodli qator elementlari tugamaguncha takrorlanadi. Algoritm oxirida graf uchlari

bilan massivda ikkita uch qoladi; ular daraxtning so'nggi uchini tashkil qiladi. Natijada biz grafning kodlangan barcha qirralarining ro'yxatini olamiz.

2-misolda olingan Pryufer kodi yordamida daraxtni tiklaylik.

Birinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal uch 4 ga teng

Qirralar ro'yxati: 1 4

Ikkinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal uch 7 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7

Uchinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal tepalik 5 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5

To'rtinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal tepalik 8 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5, 6 8

Beshinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal vertex 9 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5, 6 8, 6 9

Oltinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal vertex 6 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5, 6 8, 6 9, 2 6

Yettinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal tepalik 2 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5, 6 8, 6 9, 2 6, 1 2

Sakkizinchi qadam

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal tepalik 1 ga teng

Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5, 6 8, 6 9, 2 6, 1 2, 3 1

Algoritmnı yakunlash

Pryufer kodi: 1 5 2 6 6 2 1 3

Daraxtlar uchlari massivi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pryufer kodida mavjud bo'lmagan minimal tepalik 1 ga teng

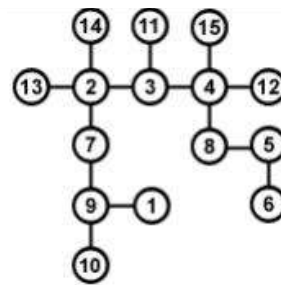
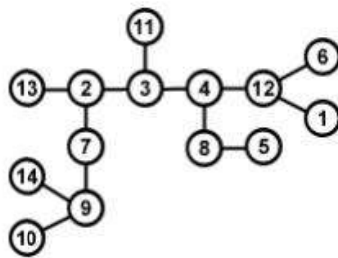
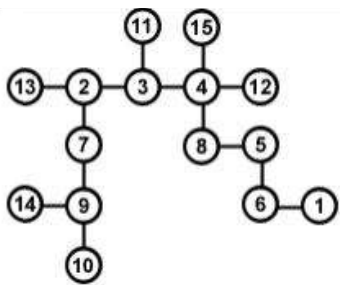
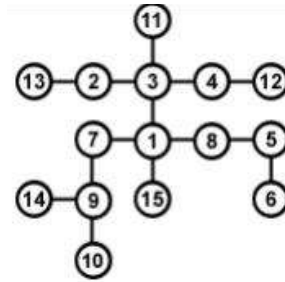
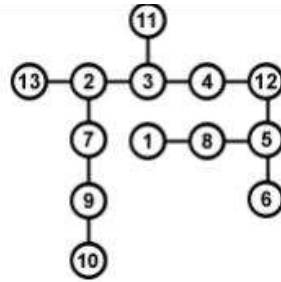
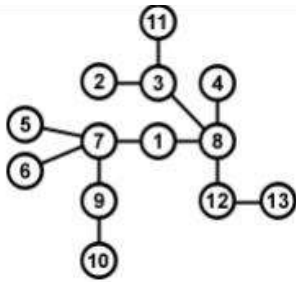
Qirralarning ro'yxati: 1 4, 5 7, 2 5, 6 8, 6 9, 2 6, 1 2, 3 1, 3 10

Mavzu yuzasidan savollar:

1. Daraxt ma'lumotlar strukturasiga ta'rif bering
2. Daraxtning eng asosiy tushunchalariga to'xtalib o'ting.
3. Pryufer kodini hosil qilish va qo'llanishi haqida gapiring
4. Pryufer kodi asosida daraxtni tiklash qanday amalga oshiriladi?
5. Daraxt ma'lumotlar strukturası qo'llaniladigan sohalarga qaysilar kiradi?

Mustaqil ishlash uchun masalalar:

1) Quyidagi daraxtlarning pryufer kodini toping.



2) Quyidagi Pryufer kodi berilgan. Ushbu kodga ko'ra daraxtlarni hosil qiling.

(2, 2, 7, 2, 11, 11, 7, 7, 6, 9, 4, 5)

(1, 1, 7, 6, 13, 1, 7, 12, 6, 9, 4, 5, 3)

(1, 2, 8, 3, 1, 10, 1, 1, 6, 5, 3, 2, 9)

(2, 5, 7, 12, 10, 11, 7, 7, 6, 9, 4, 5)

(12, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 1, 2, 3, 8, 9)