Подкинули монету N раз. Кол-во случаев, когда выпал орёл, на 10% больше, чем кол-во случаев, когда выпала решка. При каком N мы можем сказать, что монета «нечестная» (орёл и решка выпадают с разной вероятностью)?

Основная гипотеза:
H0: Монета симметрична (честная), т.е. p = q = ½, где p - вероятность выпадения решки, q - вероятность выпадения орла.

Проверим, согласуется ли с этой гипотезой результат эксперимента, в котором при N бросаниях выпала N / 2,1 раз решка?
(m - кол-во выпадений решки
m * 1,1 - кол-во выпадений орла (на 10% больше)
m + m * 1,1 = 2,1 * m = N => m = N / 2,1)

Решение:

Неравенство Чебышева для случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами N, p ($M(X) = Np$, $D(X) = Npq$), $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\{|X - Np| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Npq}{\varepsilon^2}$$

Для частоты $\frac{k}{N}$ появления события в N независимых испытаниях ($M(\frac{k}{N}) = p$, $D(\frac{k}{N}) = \frac{pq}{N}$):

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{k}{N} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{pq}{N\varepsilon^2}$$

Положим $\varepsilon = 0.02$, тогда при N = 62500 правая часть последнего неравенства равна 0.01. Значит, если исходная гипотеза верна, то в эксперименте осуществилось событие, вероятность которого крайне мала – 0.01 и меньше. Поэтому основная гипотеза отвергается (на уровне значимости 0.01).

Ответ: при N = 62500 и больше мы сможем сказать, что монета «нечестная» (но допускается, что в среднем 1 из 100 случаев даст неверный результат, поскольку уровень значимости выбран равным 0.01).