Tema 2 Numeros Complejos

$i^0 = 1$ $\quad i^4 = 1$
$i^1 = i$ $\quad i^5 = i$
$i^2 = -1$ $\quad i^6 = -1$
$i^3 = -i$ $\quad i^7 = -i$

Los números complejos son expresiones formales de la forma:

$a + bi$, donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, i es un número que cumple $\boxed{i^2 = -1}$

Como ningún nº real al cuadrado es negativo. Este número es nuevo, es decir, no es real. (En los complejos ya no hay positivos ni negativos)

<u>Sumas:</u> $(2+5i) + (3-ei) = (2+3) + (5-e)i = 5 + (5-e)i$

<u>Producto:</u> $(3+i)(1+i) = 3 + i + 3i + i^2 = 2 + 4i$

usamos que $i^2 = -1$

<u>observación:</u> Todo $a \in \mathbb{R}$ es complejo ya que $a = a + 0i$ (Así los complejos extienden a los reales.)

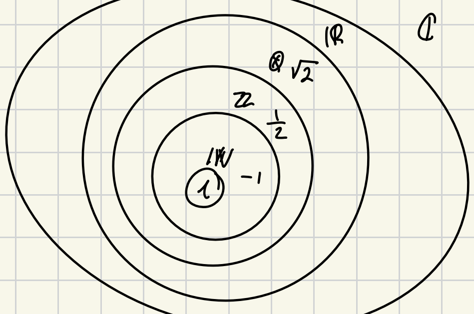
A las expresiones de la forma $bi = 0 + bi$ se les llama números imaginarios (puros). Está claro que todo número complejo es suma de un real y de un imaginario (puro)

$$a + bi = \underbrace{(a + 0i)}_{\text{real}} + \underbrace{(0 + bi)}_{\text{imaginario}}$$

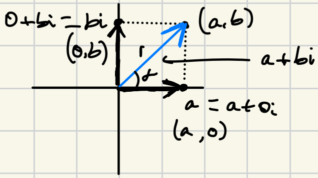
Los representamos con la letra $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Tenemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



<u>Representación de $\mathbb{C}$ en el plano</u>. → Todo complejo $a + bi$ queda determinado por el par (a,b). Los representamos como flechas desde $(0,0)$ hasta (a,b)



(Los reales son ahora flechas)

Al dibujarlo como flechas damos otra representación $r \in (0,\infty)$, $\alpha \in [0,2\pi)$
(longitud) (ángulo en rad)

<u>Expresiones</u>

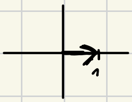
$\boxed{r}\cdot e^{i\cdot\boxed{\alpha}}$

- binómico – cartesianas, datos $a,b \in \mathbb{R}$
  $a+bi$ $\quad (a,b)$
- Polar – Exponencial, datos $r \in (0,\infty)$, $\alpha \in [0,2\pi)$
  r_α $\quad r\cdot e^{i\cdot\alpha}$

Podemos pasar de una expresión a otra.
$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\alpha = \dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

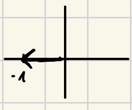
<u>Por ejemplo</u> ¿expresiones de $1, -1, i, -2-2i, -3\sqrt{3}+3i$?

- $1 = 1 + 0i$ $\quad (1,0)$



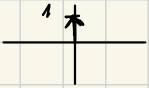
$a=1$, $b=0$ $\quad r=1$, $\alpha=0$ $\quad 1_0$, $1\cdot e^{i\cdot 0}$ $\quad \boxed{1 = e^{i\cdot 0}}$

- $-1 = -1 + 0i$ $\quad (-1,0)$



$a=-1$, $b=0$ $\quad r=1$, $\alpha=\pi$ $\quad -1_\pi$, $-1\cdot e^{i\cdot\pi}$ $\quad \boxed{-1 = e^{i\pi}}$

- $i = 0 + 1i$
  $(0, 1)$

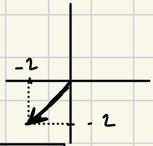


$a = 0$ $\quad b = 1$ $\quad r = 1$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad 1_{(\pi/2)}$ $\quad 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{i = e^{i\pi/2}}$$

- $-2 - 2i = 0$
  $(-2, -2)$

$a = -2$
$b = -2$



$r = 2\sqrt{2}$ $\qquad \alpha = \pi + \text{arctang}(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\text{tang}\,\alpha = \frac{-2}{2} = 1$ $\qquad 2\sqrt{2}_{\left(\frac{5\pi}{4}\right.}$

$\text{arctang}(1) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad 2\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$

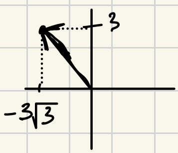
$$\boxed{-2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}}$$

→ 30°

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

- $-3\sqrt{3} + 3i$
  $(-3\sqrt{3}, 3)$

$a = -3\sqrt{3}$
$b = 3$



$\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{-3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad 6_{(5\pi/6}$

$\text{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $\qquad 6 \cdot e^{i\cdot 5\pi/6}$

$r = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$

$\alpha = \pi + \text{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

↑ argumento

$$\boxed{-3\sqrt{3} + 3i = 6 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

↑ módulo

Definiciones

$z = a+bi$ (f. binómica)

$a = Re(z)$ (a, parte real de z)

$b = Im(z)$ (b, parte imaginaria de z)

$z = r \cdot e^{i\alpha}$ (f. exponencial)

$r = |z|$ (r, módulo de z)

$\alpha = \arg(z)$ (α, argumento de z)

$-z = -a-bi$ (opuesto de z)

$\frac{1}{z}$ (inverso de z) si $z \neq 0$

$\bar{z} = a-bi$ (conjugado de z)

Ejemplos $\boxed{z = i}$ $Re(i) = 0$, $Im(i) = 1$, $|i| = 1$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$-z = -i$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$ $\left(-i = \frac{1}{i} = \bar{i}\right)$

$i = 0 + 1 \cdot i$

$\bar{i} = 0 + (-1)i = i$

$\boxed{z = 3}$ $Re(3) = 3$, $Im(3) = 0$, $|3| = 3$, $\arg(3) = 0$

$-z = -3$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ $\bar{z} = 3$ $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$

$3 = 3+0i$

$\bar{3} = 3-0i$

los reales son todos aquellos que coinciden con el conjugado.

autoconjugado → que su conjugado es el mismo.

$\boxed{z = 3+4i}$ $Re(z) = 3$, $Im(z) = 4$, $|z| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\arg(3+4i) = \operatorname{arctg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ → está en el primer cuadrante

$-z = -3-4i$ (multiplico por el conjugado)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \left(\frac{3}{25}\right) + \left(\frac{-4}{25}\right)i$$

$$3^2-(4i)^2 = 3^2-4^2 i^2 = 3^2-4^2(-1)$$

Propiedades

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \quad (a+bi+a-bi = 2a)$
- $z-\bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\cdot i \quad (a+bi-(a-bi) = 2bi)$
- $z\cdot\bar{z} = |z|^2 \quad ((a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2)$

$\boxed{\text{observación}}$

- La ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$. Sin embargo, en $\mathbb{C}$ sí.

El nº i es una solución: $i^2+1=0$, $-1+1=0$

otra: $x^2+1 \;\; \underline{|\, x-1}$ $\;\; x+1$ $\rightarrow$
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 1 \\ i & & i & -1 \\ \hline & 1 & i & 0 \end{array}$$
$\rightarrow x^2+1 = (x+i)(x-i)$

$-i \qquad i$

$$\begin{cases} x=i \Rightarrow i^2+1=0 \\ x=-i \Rightarrow -i^2+1=0 \\ \quad \hookrightarrow (i-i)(-i-i)=0 \end{cases}$$

Así que $-i$ es otra raíz (pero no hay más porque el grado es 2)

Por tanto $\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2+1=0\} = \emptyset$, pero $\{x\in\mathbb{C} \,/\, x^2+1=0\} = \{-i, i\}$

Descomposición
- $\mathbb{R}[x] \rightarrow$ no descompone: $x^2+1 = x^2+1$
- $\mathbb{C}[x] \rightarrow$ sí descompone: $x^2+1 = (x+i)(x-i)$

$\sqrt{-1}$ no existe en $\mathbb{R}$.

Como conjunto $\sqrt{-1} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\} = \emptyset$

para en $\mathbb{C}$ (como conjunto) $\sqrt{-1} = \{x \in \mathbb{C} / x^2 = -1\} = \{-i, i\}$

(En $\mathbb{R}$, como conjunto, $\sqrt{4} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$ y como número $\sqrt{4}$ es la positiva,

$\sqrt{4} = 2$ y $-\sqrt{4}$ es la negativa $-\sqrt{4} = -2$)

Pero en $\mathbb{C}$ no hay positivos ni negativos, así que hacemos un convenio

---

Pregunta: $\sqrt[3]{1} = 1$ en $\mathbb{R}$, pero ¿qué es en $\mathbb{C}$? Son las raíces cúbicas de 1 (la unidad)

$\sqrt{-1} = \{x \in \mathbb{C} / x^2 = -1\} = \{-i, i\}$

Por convenio (como número) $\sqrt{-1} = i$ ($\Rightarrow -\sqrt{-1} = -i$)

Así, por ejemplo $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$ ($\Rightarrow -\sqrt{-4} = -2i$

Podemos (en $\mathbb{C}$) resolver ec. de 2º grado (en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$)

Ejemplo: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

$x^2 + ix + 1 = 0 \qquad x = \dfrac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4}}{2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{-5}}{2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{5}i}{2} = \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)i \begin{cases} w_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)i \\ w_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)i \end{cases}$

observación: $2x^2 + 2ix + 2 = 0$, $3x^2 + 3ix + 3 = 0$, tienen las mismas raíces y ¡¡CASI!!

la misma descomposición.

$x^2+ix+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)$; $2x^2+2ix+2=2(x-\omega_1)(x-\omega_2)$, $3x^2+3ix+3=3(x-\omega_1)(x-\omega_2)$

T.F.A. (Teorema fundamental del álgebra)

Cualquier $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ (polinomio complejo) $p(x)=z_0+z_1x+z_2x^2+\dots+z_nx^n$, $z_0,z_1,z_2,\dots,z_n \in\mathbb{C}$)

tiene todas sus raíces $\omega_1,\omega_2,\omega_3\dots\omega_n$ (pueden repetirse) en $\mathbb{C}$

Por tanto $p(x)=\underline{\underline{z_n}}(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)\dots(x-\omega_n)$

Consecuencia Si $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ (pol. real) agrupando raíces conjugadas obtenemos la

descomposición real

Veámoslo con un ejemplo: $p(x)=x^4-16$ pol real (y complejo)

Por T.F.A que tiene 4 raíces complejas (pueden repetirse) | Buscamos las raíces!

$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$

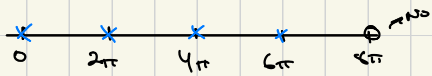
$x=r\cdot e^{i\alpha}$ sol. complejo $x^4=16$

$x^4-16=0 \Rightarrow x^4=16$

$$(re^{i\alpha})^4=16=16e^{i\cdot 0}\qquad \begin{cases} r^4=16 & (r\in(0,\infty))\ r=\sqrt[4]{16}=2\\ e^{i(4\alpha)}=e^{i\cdot 0} & (\alpha\in[0,2\pi))\Rightarrow 4\alpha\in[0,8\pi)\end{cases}$$

(en radianes) ángulo 4α = ángulo 0 , entre 0 y 8π (8π, NO)

los números que representan ángulo 0 son



$$4\alpha=\begin{cases}0\\2\pi\\4\pi\\6\pi\end{cases}\Rightarrow \alpha= \begin{matrix}0/4=0\\ 2\pi/4=\pi/2\\ 4\pi/4=\pi\\ \frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\end{matrix}$$

Así, $(re^{i\alpha})^4 = 16 \iff r = 2$ y $\alpha \in \{0, \pi/2, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ es decir, $2\cdot e^{i\cdot 0}, 2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, 2\cdot e^{i\pi}, 2\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \ (\text{f. exp}) \\ \| & \| & \| & \| \\ 2 & 2i & -2 & -2i \ (\text{f. binom}) \end{array}$$

$$x^4 - 16 = (x-2)(x-2i)(x-(-2))(x-(-2i))$$

$$= (x-2)(x-2i)(x+2)(x+2i)$$ $\Rightarrow$ descomposición compleja.

conjugado

$$(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i) \qquad \overline{2} = 2 \qquad \overline{2i} = -2i$$

$$\overline{-2} = -2$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$x^4 + 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$ $\Rightarrow$ descomposición real

---

<u>Ejercicio</u>: Dar la descomposición real y compleja de $x^4 + 16$ y de $x^4 + x^2 + 1$

$x^4 - 16 \quad \{x \in \mathbb{R} / x^4 - 16\} = \{-2, 2\} \qquad \sqrt[4]{16} = 2 \qquad -\sqrt[4]{16} = -2$

$$x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 0 & -8 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$$