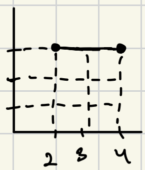
TEMA 3 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

(Una variable) Las funciones pueden ser, integrales, continuas y derivables. En el tema 6 veremos las integrales con detalles.

<u>Intuitivamente</u> una función es integrable en $[a,b]$ si tiene "área" entre su gráfica y el eje $\overline{OX}$.

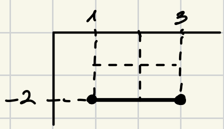
<u>Ejemplo:</u> ① $f(x) = 3$ en $[2,4]$ es integrable.



tiene área 6, $\int_2^4 3\,dx =$

El "área" (integral) puede ser negativa o compensarse.

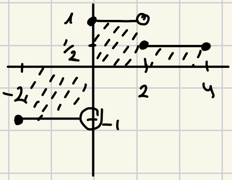
<u>Ejemplo:</u> ② $f(x) = -2$ en intervalo $[1,3]$ es <u>integrable</u>



tiene área 4 debajo del eje $\overline{OX}$. ("área" $= -4$)

$$\int_1^3 -2\,dx = -4$$

③ $f=\begin{cases} -1, & x \in [-2,0) \\ 1, & x\in[0,2) \\ 1/2, & x\in[2,4] \end{cases}$ es integrable



tiene "área" (integral) $-2+2+1=1$

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{0} f(x)\,dx}_{-2} + \underbrace{\int_{0}^{2} f(x)\,dx}_{2} + \underbrace{\int_{2}^{4} f(x)\,dx}_{1}$$

Definición: Una función es continua en un punto a, si está definida en un intervalo que contiene al punto a y verifica que $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Si f es continua en todos los puntos de D, diremos que es continua en D.

Si f está definida en un intervalo $[a,b]$ diremos que es continua, si es continua en (a,b) y continua lateral en $x=a$ y en $x=b$. Es decir, $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$ (continua en a por la derecha) $\boxed{\lim_{x\to b^-} f(x) = f(a)}$ (continua en b por la izquierda)

Ejemplo: ① $f(x)=e^{x^2+1}$ es continua (en $\mathbb{R}$) ya que para cualquier $a\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)} = \lim_{x\to a} e^{x^2+1} = e^{a^2+1} = \boxed{f(a)}$$

② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & x\neq -2 \\ 0, & x=-2 \end{cases}$ no es continua (en $\mathbb{R}$) porque no lo es en $a=-2$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{(\cancel{x+2})(x-2)}{\cancel{x+2}} = \lim_{x\to -2} x-2 = -4 \neq 0 = f(-2)$$

no es igual a lo que vale la función en el pto.

<u>El ejemplo</u> ③ $f(x) \begin{cases} -1, & x \in [-2,0) \\ 1, & x \in [0,2) \\ 1/2, & x \in [2,4] \end{cases}$ nos muestra como una función puede <u>NO</u> ser continua y sí ser integrable.

f no es continua (no lo es ni en 0, ni en 2

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \ , \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \ , \ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1/2 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Ahora sí, $\boxed{\text{continua} \Rightarrow \text{integrable}}$ (en $[a,b]$)

<u>Definición</u>: Una función es derivable en un punto a de su dominio si existe (es un número) el siguiente límite $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Al límite se le llama derivada de f en el punto a y se escribe $f'(a)$ ó $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$

Cuando f es derivable en todos los puntos de D, decimos que es derivable en D.

<u>Ejemplo</u>: $f(x) = x^2$ es derivable (en $\mathbb{R}$) ya que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} =$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x+a)(\cancel{x-a})}{(\cancel{x-a})} = \lim_{x\to a} x+a = a+a = 2a$$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Por tanto $f'(a) = 2a$

$$\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_a = 2a \quad ó \quad \left.\frac{dx^2}{dx}\right|_a = 2a \right)$$

$\boxed{\text{Derivable} = \text{Continua}}$ (en un punto), pero hay funciones continuas y que NO son derivables.

Función derivada:

Si f es derivable en D (derivable en a, $\forall a \in D$), existe $f'(a)$

La función derivada (f' ó $\frac{df}{dx}$) asocia a cada $a \in D \mapsto f'(a)$
($a \mapsto 2a$) → ejemplo.

Ejemplo: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(a) = 2a \ \forall a \in \mathbb{R}$

La función derivada de x^2 lleva $x \mapsto 2x$. Es decir, $f'(x) = 2x$.

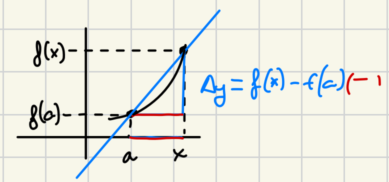
$$f'(x) = 2x \quad ó \quad (x^2)' = 2x \quad ó \quad \frac{dx^2}{dx} = dx$$

Derivadas sucesivas:

Si f' es derivable tenemos $(f')'$ es la segunda derivada f'' (ó $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$)

y así (siempre que se pueda), la tercera $f''' = (f'')'$ (ó $\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$)

Interpretación geométrica:



$\Delta x = x - a$ (−)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pendiente de la recta secante a la gráfica de f en los ptos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$

Cuando $x \to a$, secante → tangente ($\Rightarrow$ pendiente de la secante
↓
" de la tangente.)

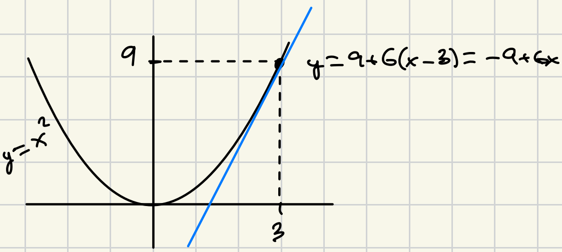
Por tanto $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \left(= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ = pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$

Ecuación recta tangente: Pasa por $(a, f(a))$

tiene pendiente $f'(a)$, por tanto $y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow \boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$

Ejemplo: $y = x^2$ en $a=3$ ($(3,9)$ en la gráfica) tiene derivada $y'(3) = 2\cdot 3 = 6$ (pendiente $= 6$)

Ecuación: $y - 9 = 6(x-3) \Rightarrow \boxed{y = 9 + 6(x+3)}$ $\qquad \boxed{y = -9 + 6x}$



Derivadas de las funciones elementales:

$f(x) = 1$ es derivable $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1-1}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{0}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0 \Rightarrow f'(a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Así, la f derivada es la nula, $f'(x) = 0$

$f(x) = x$ es derivable $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1 \Rightarrow f'(a) = 1,\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Así la f derivada es $f'(x) = 1$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

usar definición

En general (Ejercicio) $(x^3)' = 3x^2$, $(x^4)' = 4x^3$, ..., $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

<u>Propiedades</u>: $(f+g)' = f' + g'$; $(\lambda f)' = \lambda f'$

<u>Ejemplo</u>: $(2+3x+5x^2)' = (2\cdot 1)' + (3\cdot x)' + (5\cdot x^2)'$

$$= 2\cdot(1)' + 3(x)' + 5\cdot(x^2)'$$

$$= 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 5\cdot 2x = 3 + 10x$$

(Así cualquier polinomio)

<u>Propiedades del producto</u> $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

<u>Propiedades del cociente</u> $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

<u>Ejemplo</u>: (sin usar definición) $(x^3)' = (x\cdot x^2)' = (x)'x^2 + x\cdot(x^2)' = 1\cdot x^2 + x\cdot 2x = 3x^2$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'\cdot x - 1\cdot(x)'}{x^2} = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

(y así cualquier racional)

usar definición

Ejercicio: probar que $(\text{sen } x)' = \cos x$ y deducir que $(\cos x)' = -\text{sen } x$

Entonces: $$(\text{tg } x)' = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)' = \frac{(\text{sen } x)'\cos x - \text{sen } x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$$

Regla de la Cadena (Composición)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(a) \arrow[r] & g(f(a)) \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ derivable en } a \\ g \text{ derivable en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f \text{ es derivable en } a.$$

Además $$\boxed{(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)}$$

Nota:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

$y = f(x)$ $\quad z = g(y)$

$z = g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_a = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{f(a)} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_a$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = \frac{dy}{dx}}$$ simplificado

Ejemplo: Calcular la derivada de la composición $x \mapsto y = x^2 + 3x + 1 \mapsto z = \text{sen}(y) = \text{sen}(x^2+3x+1)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos y)}{dy}\cdot\frac{d(x^2+3x+1)}{dx} = -\text{sen}(y)\cdot(2x+3) = (2x+3)\cos(x^2+3x+1)$$

Derivada de la función inversa

$(f \circ f^{-1})(x) = x \Rightarrow (f \circ f^{-1})'(x) = 1$

(R. Cadena) $\Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

(Notación de Leibnitz) $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$

$$x \underset{f}{\overset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

Ejemplo: $f^{-1}(x) = \arcsen x$

$f(x) = \sen x$

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{(\sen x)'(\arcsen x)} = \frac{1}{\cos(\arcsen x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2(\arcsen x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejercicio: Probar (usar la definición) que $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

Usando esto, como $y = e^x \iff x = \log(y)$

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\log y)}{dy}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y = e^x$$, es decir $\boxed{(e^x)' = e^x}$

Usando esto tenemos $x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}$, por tanto

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \cdot \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \cdot \log x)' = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha (\log x)' = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \cdot x^{-1} = \boxed{\alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$$

$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \cdot \log a}$

$\boxed{(a^x)'} = \left(e^{x \cdot \log a}\right)' = e^{x \cdot \log a} \cdot \log a = \boxed{a^x \cdot \log a}$ $\left(\begin{array}{l} \text{en particular si } a = e \\ (e^x)' = e^x \underbrace{\log(e)}_{1} = e^x \end{array} \right)$

Ejercicio: Calcular las derivadas de las funciones básicas de donde salen las elementales y que no hemos hecho; sen h, cos h, arctg, arccos, etc...

Resultados teóricos en funciones continuas y derivables. Aplicaciones

① f continua en $[a,b]$ cumple (entre otros) el teorema de los valores intermedios y el teorema del valor máximo (y del mínimo). Un caso particular del primero es el de Bolzano que dice: "Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces f se anula en $[a,b]$"

Aplicación: $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ es continua (en $\mathbb{R}$ y en $[0,1]$)

$f(0) = -1$, $f(1) = 2$ (signos opuestos) $\Rightarrow$ (Bolzano) f se anula en $[0,1]$

por tanto, el polinomio $x^3 + x^2 + x - 1$ tiene una raíz en $[0,1]$

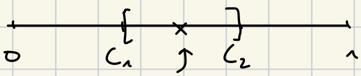
② f derivable en (a,b) (y continua en $[a,b]$) cumple (entre otros) el teorema del valor medio. Un caso particular de este es el teorema de Rolle que dice:

"f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces si $f(a) = f(b)$

necesariamente f' se anula en (a,b)"

<u>Aplicación</u>: si $f(x)=x^3+x^2+x-1$ es continua en $[0,1]$ (de hecho en $\mathbb{R}$) y derivable en $(0,1)$ (de hecho en $\mathbb{R}$). Si tuviera dos raíces en $[0,1]$

$f(c_1)=f(c_2)=0$



por Rolle f' se anula en medio de ellas. Pero $f'(x)=3x^2+2x+1$ no se anula en $[0,1]$ (ni en (c_1,c_2)). <u>Solo hay una raíz en $[0,1]$</u>. Por tanto la <u>existencia</u> de raíz la da Bolzano y la <u>unicidad</u> la da Rolle.

<u>T. V. máximo (y del mínimo)</u> Toda función continua definida en $[a,b]$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Estos valores son extremos absolutos (o globales) en $[a,b]$. Los máximos absolutos (o globales) se pueden buscar entre los máximos relativos (o locales)

<u>Máximos relativos (o locales)</u> Si f es derivable y M es un máximo local (es decir, $f(M) \geq f(x)$ $\forall x$ cerca de M) entonces $f'(M)=0$

Lo mismo ocurre si f es derivable y m es un mínimo local $f'(m)=0$

Es decir, los extremos locales son ptos críticos (donde la derivada se anula)

Ahora bien, no todos los ptos críticos tiene porque ser max o min locales.

Por ejemplo $f(x)=x^3$ en $x=0$ (pto de inflexión)

Además si la función no es derivable o está definida en un intervalo cerrado puede que halla máx o min locales donde la derivada no se anule o no exista.

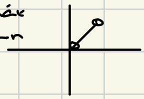
<u>Ejemplo</u>: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \neq 0$ (siempre)

① def en $\mathbb{R}$

ni máx
ni mín

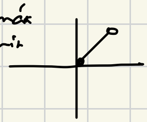
② $(0,1)$

ni máx
ni mín



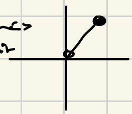
③ $[0,1)$

0 máx
1 mín



④ $(0,1]$

1 máx
0 mín



⑤ $[0,1]$

1 máx
1 mín