UEMF
الجامعة الأورومتوسطية بفاس
EUROMED UNIVERSITY OF FES
UNIVERSITÉ EUROMED DE FÈS

EIDIA
École d'Ingénierie Digitale et d'Intelligence Artificielle

Cours Analyse III

Pr. Abla CHAOUNI BENABDELLAH

Benabdellahchaouni.abla@gmail.com

II-Séries numériques

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou de nombres complexes. Les premières traces d'utilisation d'une somme infinie remontent à l'antiquité lorsque Archimède a calculé l'aire de la surface comprise entre une parabole et une de ses cordes par la méthode d'exhaustion. Ce dernier a implicitement démontré la relation

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}}$$

Au cours du XIV[e] siècle, Nicolas Oresme démontre que la série harmonique est divergente, ce que l'on peut reformuler intuitivement par

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.}$$

À la même époque, le mathématicien indien Madhava de Sangamagrama est le premier à considérer des développements de fonctions trigonométriques sous forme de série. Par exemple, il a calculé les onze premières décimales du nombre π en établissant la formule

$$\forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Au XVIIe siècle, ces résultats sont redécouverts en Europe par James Gregory. Finalement, en donnant la construction générale des séries portant son nom, Brook Taylor établit en 1715 un lien fructueux avec le calcul différentiel.

En mathématiques, la notion de série nous permettra de définir de nouvelles fonctions en utilisant une somme infinie. Nous étudierons par exemple les séries entières et les séries de Fourier dans des chapitres ultérieurs. Ces dernières sont importantes en physique et en science de l'ingénieur : elles permettent de décomposer un signal périodique en une superposition de signaux sinusoïdaux.

II-1: Définitions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on lui associe la suite $(S_n)_n$ définie par :

$$S_0 = u_0 \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Définition 1.1. Notion d'une série

- On appelle série de terme général u_n, la donnée du couple $((u_n)_n, (S_n)_n)$, on la note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
- u_n est dit le terme général de la série et on a : $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.
- S_n est dite la somme partielle d'ordre n.
- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est appelé la suite des sommes partielles.

II-1: Définitions

Définition 1.2. Convergence d'une série numérique

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique à termes dans $\mathbb{K}$.

- On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
- La limite **finie** de $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Une série non convergente est dite divergente.

II-1: Définitions

Exemples : **1.** La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ est convergente de somme égale à 2.

2. La série $\sum_{n\geqslant 1} 3^n$ est divergente .

3. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente de somme 1.

II-1: Définitions

Définition 1.3. Reste d'une série numérique

En cas de convergence de la série numérique $\sum_n u_n$, on pose $R_n = S - S_n$ appelé le reste d'ordre n de la série $\sum_n u_n$, noté $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

L'écriture $\sum_n u_n$ est une simple notation pour désigner la série de terme général u_n. Cependant, les écritures $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ne doivent, elles, n'être utilisées **qu'après** avoir démontré la convergence de la série !

Exemple : Le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ est $R_n = \frac{1}{2^n}$.

II-1: Définitions

Proposition 1.1. Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est en général fausse.
Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente**.

Preuve :

On sait que que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\lim S_n = S$ existe, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$.

Exercice 1.1.

Étudier la nature de : $a)$ $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{2n+1}$, $\quad b)$ $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n^2+n} - n$.

II-1: Définitions

Proposition 1.2. Espace vectoriel des séries numériques

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{K}$.

→ Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent alors il en est de même pour $\sum_{n\geqslant 0} (\lambda.u_n + v_n)$ et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda.u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

→ Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ diverge.

II-1: Définitions

Théorème 1.1. Convergence dans $\mathbb{C}$

Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n = x_n + i y_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \text{ est convergente} \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} x_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} y_n \text{ sont convergentes}$$

En cas de convergence on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

II-2: Convergence des séries usuelles

- **Série géométrique :**
  - C'est toute série de la forme : $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{K}$.
  - La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge $\Longleftrightarrow |q| < 1$
  - En cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Preuve :

On rappelle que $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases}$, ...

II-2: Convergence des séries usuelles

- **Série télescopique :**
  - C'est toute série de la forme : $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1}-v_n)$ où $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
  - La série $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1}-v_n)$ est convergente $\Longleftrightarrow$ la suite $(v_n)_n$ converge
  - En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(v_{n+1}-v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty}(v_{k+1}-v_k) = \lim_{p\to+\infty} v_p - v_{n+1}.$$

Preuve :

On rappelle que $S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_{k+1}-v_k) = v_{n+1}-v_0$ et $\sum_{k=n+1}^{N}(v_{k+1}-v_k) = v_{N+1}-v_{n+1}$, puis on calcule les limites.....

II-2: Convergence des séries usuelles

Exercice 1.4.

Étudier la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

II-2: Convergence des séries usuelles

- **Série de Riemann :**
  - C'est toute série de la forme : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. **Résultat à retenir par coeur**

II-3: Critère de Cauchy, convergence absolue

Théorème 1.2. Critère de Cauchy (H.P)

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que} : \forall n \geqslant N \quad : \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

II-3: Critère de Cauchy, convergence absolue

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ *est une suite réelle ou complexe. Donc elle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si et seulement si*
pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $(n \geq N_\varepsilon$ *et* $m \geq N_\varepsilon) \Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon$.
Ou encore si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon$. $\square$

II-3: Critère de Cauchy, convergence absolue

Exemple 7 *La série harmonique* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ *est divergente.*
La somme partielle de la série harmonique est $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *On a*

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy donc la série ne converge pas.
Dans cet exemple, on a une série divergente dont le terme général converge vers 0.

II-3: Critère de Cauchy, convergence absolue

Définition 1.4. Série absolument convergente

- La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente. On dit que la suite $(u_n)_n$ est sommable.
- Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Exemples : 1. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{inx}}{2^n}$ est absolument convergente ($x \in \mathbb{R}$).

2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

II-3: Critère de Cauchy, convergence absolue

Théorème 1.3. C.V.A $\Longrightarrow$ C.V

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Dans ce cas on a : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ - dite inégalité triangulaire -.

Remarques :

1. La convergence **n'entraîne pas** la convergence absolue. $\sum\limits_{n} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et n'est pas absolument convergente.
2. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha.u_n + v_n$ est absolument convergente. ($\alpha \in \mathbb{K}$).

II-3: Critère de Cauchy, convergence absolue

Si $\sum x_n$ *est absolument convergente alors* $\sum |x_n|$ *est convergente et vérifie donc le critère de Cauchy :*

pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $m > n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} |x_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \varepsilon$. *Or* $\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|$. *Donc* $\sum x_n$ *vérifie le critère de Cauchy. Elle est donc convergente.* $\square$

III-Séries à termes positifs

III-1: Convergence par les sommes partielles

Théorème 2.1. C.N.S de convergence

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite **réelle positive.** Alors :
La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée .

Exercice 2.1.

Montrer que les séries suivantes : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ sont convergentes.

Théorème 2.2. Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 2.3. Convergence et relation d'ordre

Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries **à termes positifs** telles que : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ A.P.C.R. Alors :

$\rightarrow$ La convergence de $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ entraîne celle de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

$\rightarrow$ La divergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ entraîne celle de $\sum_{n \geqslant 0} v_n$.

— *i) Notons* $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ *et* $T_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$.

Si $\sum y_n$ *converge, notons* $T = \lim_{n \to +\infty} T_n$. *Comme* $\sum y_n$ *est à termes positifs, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T$. *De plus, comme* $\sum x_n$ *est à termes positifs,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante. Comme elle est majorée par* T, *elle est convergente.*

— *ii) Si* $\sum x_n$ *diverge, puisqu'elle est à termes positifs,* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. *Donc* $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. $\square$

III-1: Convergence par les sommes partielles

Proposition 2.1.

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques telles que : $|u_n| \leqslant v_n$ A.P.C.R. Alors la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ entraîne la convergence absolue (donc la convergence) de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

III-1: Convergence par les sommes partielles

Théorème 2.4. Convergence et équivalence

Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries à **termes positifs** telles que : $u_n \sim v_n$, alors les deux séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ ont la **même nature.**

III-1: Convergence par les sommes partielles

Preuve

Si $x_n \sim_{+\infty} y_n$, *alors pour* n *assez grand,* $x_n = y_n(1+\varepsilon(n))$ *où* $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. *Pour* n *assez grand,*

$-1/2 \leq \varepsilon(n) \leq 1/2$ *donc* $y_n/2 \leq y_n(1+\varepsilon(n)) = x_n \leq 3y_n/2$.

Puisque pour n *assez grand* $y_n/2 \leq x_n$, *si* $\sum x_n$ *converge alors* $\sum y_n$ *converge et si* $\sum y_n$ *diverge alors* $\sum x_n$ *diverge.*

Puisque pour n *assez grand* $x_n \leq 3y_n/2$, *si* $\sum y_n$ *converge alors* $\sum x_n$ *converge et si* $\sum x_n$ *diverge alors* $\sum y_n$ *diverge.*

Ces comparaisons ne sont valables que parce que $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *sont* **à termes positifs.** $\square$

III-1: Convergence par les sommes partielles

Exercice 2.3.

1. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \sin^3\frac{1}{n} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} 1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

— *Les deux séries*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4} \qquad et \qquad \sum_{k\geq 1} \frac{k+\ln(k)}{k^3} \quad convergent.$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$, *et nous savons que la série* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ *converge.*

— *Par contre*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4} \qquad et \qquad \sum_{k\geq 1} \frac{k+\ln(k)}{k^2} \quad divergent.$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k}$, *et nous avons vu que la série* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ *diverge.*

III-1: Convergence par les sommes partielles

Proposition (Séries de Riemann) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus*

- *pour $\alpha > 1$, on a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$;*
- *pour $\alpha < 1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$;*
- *pour $\alpha = 1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.*

Théorème 2.8. Comparaison avec une série de Riemann

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique réelle .

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente .
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

Exercice 2.10.

Donner la nature de la série : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$; $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$; $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-\sqrt{n}}$.

III-2: Comparaison série-intégrale

Rappels :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, **à valeurs réelles positives**. On dira que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe (ou est convergente) si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie
  Dans ce cas, on note : $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$.
- f étant à valeurs positives, la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante , d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe et finie si et seulement si F est majorée.
- F étant croissante,alors : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe et finie si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} F(n)$ existe et finie .

III-2: Comparaison série-intégrale

Lemme : Soit $f : [n_0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue positive décroissante**, alors :

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \qquad \text{et} \qquad \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$

Théorème 2.5. Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[n_0, +\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), **à valeurs réelles positives** et **décroissante**.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n+1)$ $(n \geqslant n_0)$ est convergente.

2.4.13 Exemple. *Les séries de Riemann.*

Soient $\alpha > 0$ *et* $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ *pour* $n \geq 1$. *La série de terme général* u_n *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

On compare la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n à l'intégrale sur l'intervalle $[1, n]$ de la fonction $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.
Or on peut calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^n f_\alpha(t)\,dt &= \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1) \text{ si } \alpha \neq 1 \\ &= \ln n \text{ si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Cette suite d'intégrales converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 10. *Si* $\alpha > 1$ *alors* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *converge*

Si $0 < \alpha \leqslant 1$ *alors* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ *diverge*

On sait que :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente, donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

2.4.14 Exemple. *Les séries de Bertrand.*

Soient $\alpha > 0$ *et* $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ *pour* $n > 1$. *La série de terme général* u_n *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

De la même façon, on compare la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n à l'intégrale sur l'intervalle $[2, n]$ de la fonction $g_\alpha(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\alpha}$.

On peut calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned}\int_2^n g_\alpha(t)\,dt &= \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left((\ln n)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right) \text{ si } \alpha \neq 1 \\ &= (\ln\ln n - \ln\ln 2) \text{ si } \alpha = 1.\end{aligned}$$

Cette suite d'intégrales converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition

Soit la série de Bertrand

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^{\alpha}(\ln k)^{\beta}}.$$

$$\boxed{Si \quad \alpha > 1 \quad \text{alors elle converge.} \qquad Si \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{alors elle diverge.}}$$

$$\boxed{Si \quad \alpha = 1 \quad et \quad \begin{cases} \beta > 1 & \text{alors elle converge.} \\ \beta \leqslant 1 & \text{alors elle diverge.} \end{cases}}$$

III-3: Règle de Cauchy et d'Alembert

Théorème 2.9. Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique telle que :

$$\text{(i)}\ \ u_n \neq 0 \ \text{ A.P.C.R et que } \ \text{(ii)} \ \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}.$$

- Si $\ell < 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument (donc convergente).
- Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge (grossièrement).

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

En effet pour $u_k = \frac{x^k}{k!}$ on a

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 \quad \text{lorsque } k \to +\infty.$$

La limite étant $\ell = 0 < 1$ alors par la règle du quotient de d'Alembert, la série est absolument convergente, donc convergente. Par définition la somme est $\exp(x)$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k!}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}$ converge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{2k+1}$ tend vers $\frac{1}{2} < 1$.
3. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ diverge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ tend vers $4 > 1$.

III-3: Règle de Cauchy et d'Alembert

Théorème 2.10. Règle de Cauchy (H.P)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique telle que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$.

- Si $\ell < 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
- Si $\ell = 1$ on ne peut conclure.

Corollaire 1 *Soit* $\sum_{k\geq 0} u_k$ *une série à termes positifs, telle que* $\sqrt[k]{u_k}$ *converge vers* ℓ.

1. *Si* $\ell < 1$ *alors* $\sum_{k\geq 0} u_k$ *converge.*
2. *Si* $\ell > 1$ *alors* $\sum_{k\geq 0} u_k$ *diverge.*

Exemple 14 1. *La série*

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^k \qquad \text{converge,}$$

la série

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{3k+1}{2k+4}\right)^k \qquad \text{diverge,}$$

la série de terme général u_k *défini par* $u_{2k} = \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^{2k}$ *et* $u_{2k+1} = \left(\frac{k}{2k+7}\right)^{2k+1}$ *converge alors que la série de terme général* v_k *défini par* $v_{2k} = \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^{2k}$ *et* $u_{2k+1} = \left(\frac{2k+1}{k}\right)^{2k+1}$ *diverge.*

III-3: Règle de Cauchy et d'Alembert

2. *La série*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{2^k}{k^\alpha} \qquad \textit{diverge,}$$

quel que soit $\alpha > 0$. *En effet,*

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(\exp(\frac{1}{k}\ln k)\right)^\alpha} \to 2 > 1.$$

III-3: Règle de Cauchy et d'Alembert

$$\sum \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^k \quad \text{converge,}$$

car $\sqrt[k]{u_k} = \frac{2k+1}{3k+4}$ tend vers $\frac{2}{3} < 1$.

2. Par contre

$$\sum \frac{2^k}{k^\alpha} \quad \text{diverge,}$$

quel que soit $\alpha > 0$. En effet,

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(\exp(\frac{1}{k}\ln k)\right)^\alpha} \to 2 > 1.$$

III-4: Lien entre la Règle de Cauchy et d'Alembert

— *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ *existe, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ *existe et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$. *Donc il est inutile d'essayer la règle de Cauchy si la règle de D'Alembert a donné* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

— *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ *n'existe pas, il est possible que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ *existe quand même, et il est possible qu'on ne soit pas dans le cas douteux de la règle de Cauchy, même si on est dans le cas douteux de celle de D'Alembert.*

IV-Séries à termes quelconques

Définition 3.1. Séries alternées

On appelle série alternée toute série à termes réels $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1}.u_n \leqslant 0.$

Dans ce cas on a : $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $v_n = |u_n|$.

Exemple : Les séries suivantes sont des séries alternées :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

Théorème 3.1. Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_n u_n$ une série alternée. On suppose que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Alors la série $\sum_n u_n$ converge.

Exemple

$\sum(-1)^n/n$ est convergente mais pas absolument convergente (donc elle est semi-convergente). Cette série est appelée série harmonique alternée. On peut montrer en appliquant Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Preuve :

La suite $(u_n)_n$ est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.

La suite $(S_{2n})_n$ est décroissante car

$$\text{Pour tout entier } n,\ S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

et la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante car

$$\text{Pour tout entier } n,\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geqslant 0$$

De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Les deux suites sont donc adjacentes.

Elles convergent donc vers la même limite S, donc la suite $(S_n)_n$ aussi.

Théorème 3.2. A retenir par coeur

Soit $\sum\limits_{n} u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. On note par S sa somme. Alors :

- S est comprise entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
- S est du signe de u_0 (premier terme), et $|S| \leqslant |u_0|$.
- Si on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Preuve :

1. résulte directement du fait que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Dans le cas où $u_0 \geqslant 0$, on a $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$ soit $u_0 + u_1 \leqslant S \leqslant u_0$, et $u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$, d'où le résultat.

   Dans le cas $u_0 \leqslant 0$, on a $S_0 \leqslant S \leqslant S_1$ soit $u_0 \leqslant U \leqslant u_0 + u_1 \leqslant 0$, d'où le résultat.
3. On applique le résultat précédent à la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} v_k$, avec $v_k = u_{n+1+k}$: pour cette série, on a $V = R_n$ et $v_0 = u_{n+1}$.

1. Les séries de Riemann alternées $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$

Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

— Si $\alpha \leqslant 0$, la suite (u_n) ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

— Si $\alpha > 1$, $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$ et la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

— Si $\alpha \in]0,1[$, la suite (u_n) vérifie les hypothèses du CSSA, donc la série $\sum_n u_n$ converge (elle est ici semi-convergente).

3. Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Solution :

Là encore, un simple développement limité permet de résoudre l'exercice :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure comme dans l'exercice précédent : $\sum_n u_n$ est somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente, elle est donc convergente.

TD 2