Table de matière

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet, on rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer. Voici quelques exemples :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2(x)}dx, \quad \int_0^1 \cos(x^2)dx.$$

Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée. Dans ce chapitre, nous allons présenter le principe général du calcul approché d'intégrale que nous appliquons dans le cas de la méthode des **rectangles, trapèzes et Simpson**.

Rappels sur les intégrales

1. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f admet une primitive donc $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ existe pour tous $\alpha, \ \beta \in [a, b]$.
2. Soient $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ si F est continue sur $[a, b]$, si F est dérivable sur $]a, b[$ alors $F'(x) = f(x)$, quelque soit $x \in]a, b[$.
3. Si F est une primitive de f alors $G = F + cte$ est aussi une primitive de f.
4. Pour $\alpha, \ \beta \in [a, b]$, si F et G sont deux primitives de f on a :
$$I = F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$
I est indépendant de F et ne dépend que de $\alpha, \ \beta$ et f.
5. Si $t \in [a, b]$, la fonction F de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_\alpha^t f(x)dx$ est une primitive de f ; telle que $F(\alpha) = 0$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

1. Si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive donc $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ existe pour tous $\alpha,\ \beta \in [a,b]$.
2. Soient $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, F est une primitive de f sur $[a,b]$ si F est continue sur $[a,b]$, si F est dérivable sur $]a,b[$ alors $F^{'}(x) = f(x)$, quelque soit $x \in]a,b[$.
3. Si F est une primitive de f alors $G = F + cte$ est aussi une primitive de f.
4. Pour $\alpha,\ \beta \in [a,b]$, si F et G sont deux primitives de f on a :

$$I = F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

   I est indépendant de F et ne dépend que de α, β et f.
5. Si $t \in [a,b]$, la fonction F de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_\alpha^t f(x)dx$ est une primitive de f : telle que $F(\alpha) = 0$ et $F^{'}(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

1. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f admet une primitive donc $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ existe pour tous $\alpha,\ \beta \in [a, b]$.
2. Soient $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ si F est continue sur $[a, b]$, si F est dérivable sur $]a, b[$ alors $F^{'}(x) = f(x)$, quelque soit $x \in]a, b[$.
3. Si F est une primitive de f alors $G = F + cte$ est aussi une primitive de f.
4. Pour $\alpha,\ \beta \in [a, b]$, si F et G sont deux primitives de f on a :

$$I = F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

   I est indépendant de F et ne dépend que de α, β et f.
5. Si $t \in [a, b]$, la fonction F de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_{\alpha}^{t} f(x)dx$ est une primitive de f telle que $F(\alpha) = 0$ et $F^{'}(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

1. Si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive donc $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ existe pour tous $\alpha,\ \beta \in [a,b]$.
2. Soient $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, F est une primitive de f sur $[a,b]$ si F est continue sur $[a,b]$, si F est dérivable sur $]a,b[$ alors $F'(x) = f(x)$, quelque soit $x \in]a,b[$.
3. Si F est une primitive de f alors $G = F + cte$ est aussi une primitive de f.
4. Pour $\alpha,\ \beta \in [a,b]$, si F et G sont deux primitives de f on a :

$$I = F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

   I est indépendant de F et ne dépend que de $\alpha,\ \beta$ et f.
5. Si $t \in [a,b]$, la fonction F de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_\alpha^t f(x)dx$ est une primitive de f telle que $F(\alpha) = 0$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

1. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f admet une primitive donc $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ existe pour tous $\alpha,\ \beta \in [a, b]$.
2. Soient $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ si F est continue sur $[a, b]$, si F est dérivable sur $]a, b[$ alors $F^{'}(x) = f(x)$, quelque soit $x \in]a, b[$.
3. Si F est une primitive de f alors $G = F + cte$ est aussi une primitive de f.
4. Pour $\alpha,\ \beta \in [a, b]$, si F et G sont deux primitives de f on a :

$$I = F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

   I est indépendant de F et ne dépend que de $\alpha,\ \beta$ et f.
5. Si $t \in [a, b]$, la fonction F de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_\alpha^t f(x)dx$ est une primitive de f : telle que $F(\alpha) = 0$ et $F^{'}(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

▷ Interprétation géométrique de l'intégrale

Soit une fonction numérique $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue,

1. Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)dt$ est la surface hachurée de la figure 12.

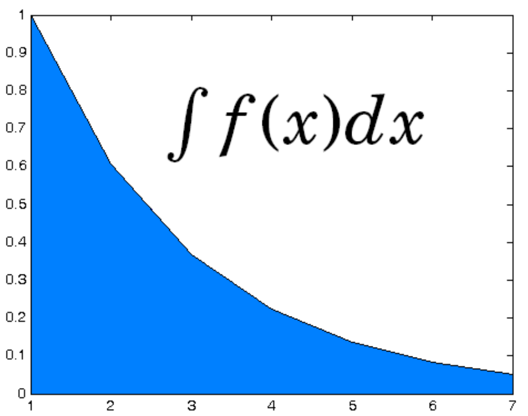

FIGURE – f de signe constant

1. Si f change de signe sur $[a, b]$, dans ce cas on considérera la somme algébrique voir figure 13.

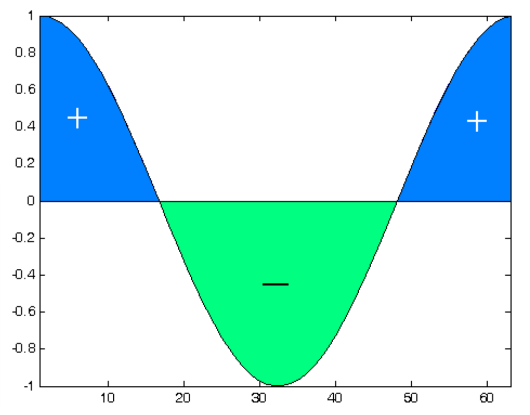

FIGURE – f change de signe

▷ Principe du calcul approchée de l'intégrale

l'interprétation géométrique de l'intégrale suggère de décomposer la surface sous le graphe de la fonction en éléments d'aires simples (rectangles, triangles, trapèzes ...). L'idée est donc de subdiviser le segment $[a, b]$ en plusieurs sous-segments $[a_i, a_{i+1}]$ où $(i = 0, ..., n-1,\ a_0 = a,\ a_n = b)$.

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

on est donc ramené à évaluer $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ sur un petit segment $[a_i, a_{i+1}]$ où f ne varie pas trop.

Ce qui nous amène à proposer la formule approximative suivante sur un petit intervalle $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = I_{\alpha,\beta}(f) + R_{\alpha,\beta}(f). \tag{33}$$

$I_{\alpha,\beta}(f)$ est l'approximation proposée, $R_{\alpha,\beta}(f)$ est un reste : "l'erreur de la méthode" (33) est dite formule simple ou élémentaire. La formule (33) appliquée sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$ nous donne la formule approximative Composée :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} I_{a_i,a_{i+1}}(f) + \sum_{i=0}^{n-1} R_{a_i,a_{i+1}}(f).$$

Dans tout ce qui suit nous considérons la subdivision suivante :

$$a_0 = a,\ a_i = a + ih,\ a_n = b \text{ avec } h = \frac{b-a}{n},\ i = 0, ..., n.$$

cette subdivision est appelée la subdivision régulière de pas h.

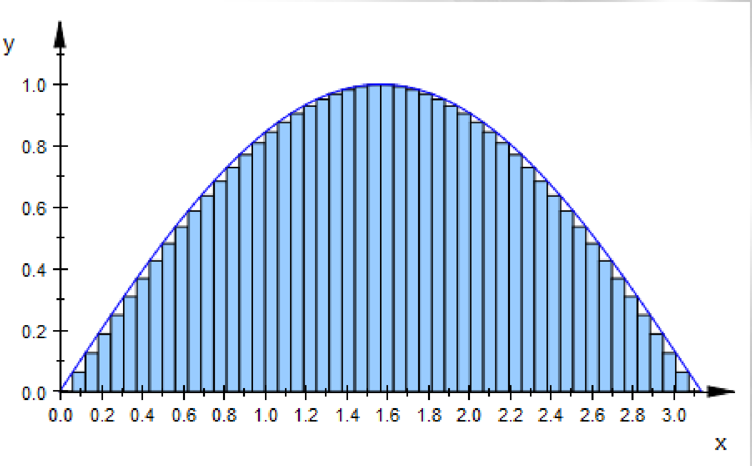

FIGURE – Subdivision de $[a, b]$ et approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la somme des surfaces hachurées

Formule des rectangles (avec point milieu)

▷ Formule élémentaire

On remplace le graphe de la fonction f entre $[\alpha, \beta]$ par une droite $y = f(\gamma)$, où $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ est le point milieu de $[\alpha, \beta]$. (voir figure 15)

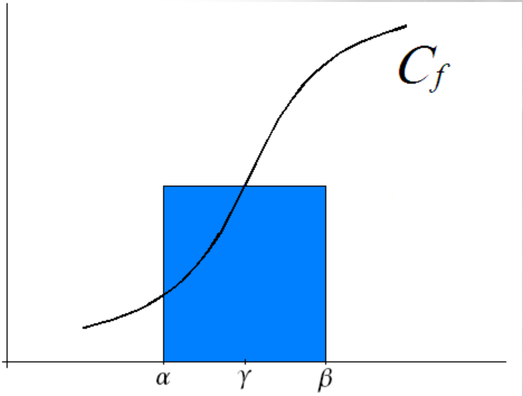

FIGURE – Méthode des rectangles avec point milieu.

$$\int^{\beta} f(t)dt = hf(\gamma) + R_{\alpha,\beta}(f), \quad h = \beta - \alpha.$$

▷ Estimation du reste $R_{\alpha,\beta}$

Supposons que $f \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta])$ (donc $F \in \mathcal{C}^3([\alpha,\beta])$). La formule de Taylor à l'ordre 3 entre γ et β appliquée à F :

$$\begin{aligned} F(\beta) - F(\gamma) &= (\beta-\gamma)F'(\gamma) + \frac{(\beta-\gamma)^2}{2}F''(\gamma) + \frac{(\beta-\gamma)^3}{3!}F'''(\epsilon) \\ &= \frac{h}{2}f(\gamma) + \frac{h^2}{8}f'(\gamma) + \frac{h^3}{48}f''(\epsilon), \quad \epsilon \in]\gamma,\beta[\end{aligned} \tag{34}$$

Formule de Taylor entre α et γ :

$$F(\alpha) - F(\gamma) = -\frac{h}{2}f(\gamma) + \frac{h^2}{8}f'(\gamma) - \frac{h^3}{48}f''(\eta), \quad \eta \in]\alpha,\gamma[\tag{35}$$

En retranchant (35) de (34) on obtient la relation :

$$F(\beta) - F(\alpha) = hf(\gamma) + \frac{h^3}{24}\,\frac{f''(\eta) + f''(\epsilon)}{2}$$

$f^{''}$ est une fonction continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\theta \in]\eta, \epsilon[$ telle que

$$\frac{1}{2}(f^{''}(\eta) + f^{''}(\epsilon)) = f^{''}(\theta)$$

La formule élémentaire devient donc :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = hf(\gamma) + \frac{h^3}{24} f^{''}(\theta), \quad \alpha < \theta < \beta.$$

▷ Formule composée

Supposons que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a une dérivée seconde f'' continue, considérons la subdivision $(a_i)_{i=0,1,\dots,n}$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$, sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ on a la formule élémentaire :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = hf(\gamma_i) + \frac{h^3}{24} f''(\theta_i), \quad a_i < \theta_i < a_{i+1} \text{ avec } \gamma_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}.$$

d'ou la formule composée suivante :

$$\int_a^b f(t)dt = h\sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma_i) + n\frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n} f''(\theta_i).$$

Or, f'' est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i) = f''(\theta)$$

en tenant compte du fait que $nh = (b-a)$, on obtient comme formule composée :

$$\int_a^b f(t)dt = \underbrace{h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)}_{Q_n(f)} + \underbrace{\frac{h^2}{24}(b-a)f''(\theta)}_{R_n(f)}.$$

Graphiquement on a le schéma suivant :

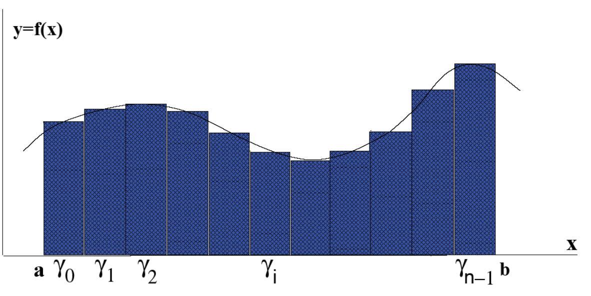

FIGURE – Méthode des rectangles avec point milieu.

Proposition

1. Si $f^{''} = 0$ sur $[a, b]$ c-à-d f est un polynôme de degré un ou moins, il n'y a pas d'erreur de méthode.
2. Si $f^{''} \geq 0$ l'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ fournie par $Q_n(f)$ est par défaut.
3. La méthode est convergente, en effet si M est un majorant de $|f^{''}|$ sur $[a, b]$ on a :

$$|R_n(f)| \leq \frac{h^2}{24}(b-a)M \text{ proportionnelle à } \frac{1}{n^2} \to 0.$$

▷ Estimation de l'erreur

- si $f'' \leq M$ sur $[a, b]$ on a une estimation à priori de l'erreur $\frac{h^2}{24}(b-a)M$.
- Pour limiter le nombre d'évaluations de f , on peut se limiter au cas où n est une puissance de 3 ($n : 1, 3, 9, 27, \ldots$). $|Q_n - Q_{3^n}|$ fournit en général une estimation de l'erreur. (voir l'accélèration de Romberg)

Exemple

$Log(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \simeq 0.6931471806$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{''}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad |f^{''}(x)| \leq 2 = M, \ \forall x \geq 1$$

- $Si\ n = 1\ on\ a : h = \frac{2-1}{1} = 1,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2 = 1 + 1h\ donc$ $\gamma_0 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{3}{2}\ d'où$

$$Q_1 = h \sum_{i=0}^{1-1} f(\gamma_i) = hf(\gamma_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} = 0.66666666.$$

- $Si\ n = 3\ on\ a : h = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}\ ,\ a_0 = 1,\ a_1 = 1 + 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3},$ $a_2 = 1 + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}\ et\ a_3 = 1 + 3\frac{1}{3} = 2\ donc : \gamma_0 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{7}{6},$ $\gamma_1 = \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{9}{6},\ \gamma_2 = \frac{a_2+a_3}{2} = \frac{11}{6}\ d'où$

$$Q_3 = h \sum_{i=0}^{3-1} f(\gamma_i) = h(f(\gamma_0) + f(\gamma_1) + f(\gamma_2)) = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{11}\right) = \frac{478}{693} = 0.68975468$$

Exemple

- *Si* $n = 9$ *on a :* $h = \frac{1}{9}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$, $a_2 = 1 + 2\frac{1}{9} = \frac{11}{9}$, $a_i = 1 + i\frac{1}{9}$ *et* $a_9 = 2$ *donc :* $\gamma_0 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{19}{18}$, $\gamma_1 = \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{21}{18}$, $\gamma_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2} = \frac{19+2i}{18}$ *d'où*

$$\begin{aligned}
Q_9 &= h\sum_{i=0}^{9-1} f(\gamma_i) \\
&= h(f(\gamma_0) + f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_8)) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{18}{19} + \frac{18}{21} + \dots + \frac{18}{19+2i} + \dots + \frac{18}{35}\right) \\
&= \frac{14145553414}{20419054425} = 0.69276237
\end{aligned}$$

n	Q_n	$(b-a)\frac{h^2M}{24}$	$\lvert Q_n - Q_{3^n}\rvert$	erreur exacte
1	0.66666667	$8.3 10^{-2}$	$-$	$-2.7 10^{-2}$
3	0.68975468	$4.6 10^{-3}$	$2.3 10^{-2}$	$-3.4 10^{-3}$
9	0.69276237	$5.2 10^{-3}$	$3.0 10^{-3}$	$-3.9 10^{-4}$

La méthode des trapèzes

▷ Formule élémentaire

Cette méthode consiste à remplacer la courbe de la fonction f entre α et β par une droite passant par les deux points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$.

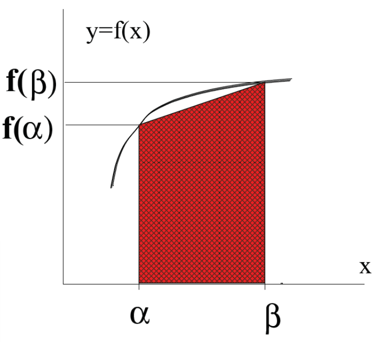

FIGURE – Méthode du trapèze.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \frac{h}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) + R_{\alpha,\beta}(f).$$

Pour exprimer le reste $R_{\alpha,\beta}(f)$, on suppose que $f \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta])$ et introduisons la fonction auxiliaire $\varphi(x)$ définie par :

$$\varphi(x) = F(\gamma + x) - F(\gamma - x) - x(f(\gamma + x) + f(\gamma - x)) - kx^3, \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}. \tag{36}$$

k est une constante choisie telle que $\varphi(\frac{h}{2}) = 0$. En exigeant cela on obtient pour k l'expression suivante :

$$k = \frac{F(\beta) - F(\alpha) - \frac{h}{2}(f(\beta) + f(\alpha))}{(h/2)^3}$$

$\varphi(0) = \varphi(h/2) = 0$, d'après le théorème de Rolle il existe $\epsilon \in]0, h/2[$ telle que $\varphi^{'}(\epsilon) = 0$, or

$$\varphi^{'}(x) = -x(f^{'}(\gamma + x) - f^{'}(\gamma - x)) - 3kx^2$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à f' sur l'intervalle $]\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon[$ implique qu'il existe $\eta \in]\gamma-\epsilon,\gamma+\epsilon[$ telle que

$$f'(\gamma+\epsilon)-f'(\gamma-\epsilon)=2\epsilon f''(\eta)$$

comme $\varphi'(\epsilon)=0$ on obtient $k=-\frac{2}{3}f''(\eta)$ et comme $\varphi(\frac{h}{2})=0=F(\beta)-F(\alpha)-\frac{h}{2}(f(\beta)+f(\alpha))+\frac{2}{3}f''(\eta)(\frac{h}{2})^3$, on en déduit :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=\frac{h}{2}(f(\beta)+f(\alpha))-\frac{h^3}{12}f''(\eta), \quad \alpha<\eta<\beta$$

c'est la formule élémentaire pour la méthode des trapèzes.

▷ Formule composée

On suppose que f : $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ a une dérivée seconde continue f''. On considère la subdivision régulière de pas h de $[a, b]$:
$a_0 = a < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$, sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ on a par application de la formule élémentaire :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = \frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1})) - \frac{h^3}{12}f''(\epsilon_i), \quad a_i < \epsilon_i < a_{i+1}$$

sur l'intervalle $[a, b]$ on a donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_i) + f(a_{i+1})) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\epsilon_i) \\ &= \underbrace{h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + \frac{f(b)}{2}\right)}_{T_n(f)} - \underbrace{\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\theta)}_{R_n(f)}\end{aligned}$$

$T_n(f)$ est la valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ et $R_n(f)$ est l'erreur de la méthode lorsqu'on approche $\int_a^b f(t)dt$ par $T_n(f)$. La figure suivante permet de schématiser cette méthode d'approximation :

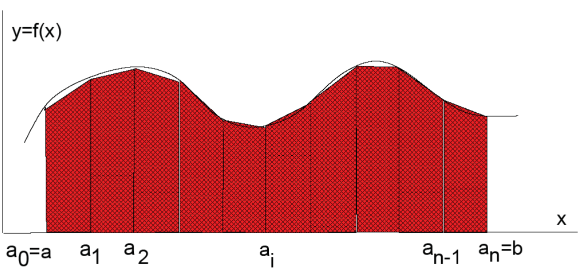

FIGURE – Méthode des trapèze.

Proposition

- si $f'' = 0$ alors $R_n(f) = 0$.
- si $f'' > 0$ l'approximation fournit par $T_n(f)$ est par excès.
- si $f'' \geq 0$ et garde le même signe sur un intervalle $[a, b]$ on peut encadrer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ par :

$$Q_n(f) \leq \int_a^b f(t)dt \leq T_n(f).$$

- la méthode est convergente : la convergence est en $\frac{1}{n^2}$.

▷ Estimation de l'erreur

- Si f'' est Majorée par M on a : $|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)h^2 M}{12}$.
- Pour limiter le nombre d'évaluations de f, on peut se limiter au cas où n est une puissance de 2, alors dans ce cas $|T_{2^n} - T_n|$ fournit une estimation de l'erreur ainsi qu'un test d'arrêt des itérations. (voir l'accélèration de Romberg)

Exemple

$Log(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \simeq 0.6931471806$

n	T_n	$\frac{(b-a)h^2 M}{12}$	$\lvert T_{2^n} - T_n \rvert$	erreur exacte
1	0.75	8.310^{-2}	$-$	5.710^{-2}
2	0.7083333	2.110^{-2}	4.710^{-2}	1.510^{-2}
4	0.6970238	5.210^{-3}	1.110^{-2}	3.410^{-3}
8	0.69412183	1.310^{-3}	2.910^{-3}	9.810^{-4}

Méthode de Simpson

▷ Formule élémentaire

Pour établir la formule élémentaire des rectangles et des trapèzes, on a en fait interpolé la fonction f :

- par une droite horizontale (un polynôme de degré 0) dans la méthode des rectangles avec point milieu.
- par une droite (un polynôme de degré 1) dans la méthode des trapèzes.

On peut espérer améliorer la précision en approchant le graphe de f par l'arc de parabole d'axe vertical, passant par les points $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ et $C(\gamma, f(\gamma))$ (avec $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$). Ce qui revient à interpoler f en ces points par un polynôme de degré 2.

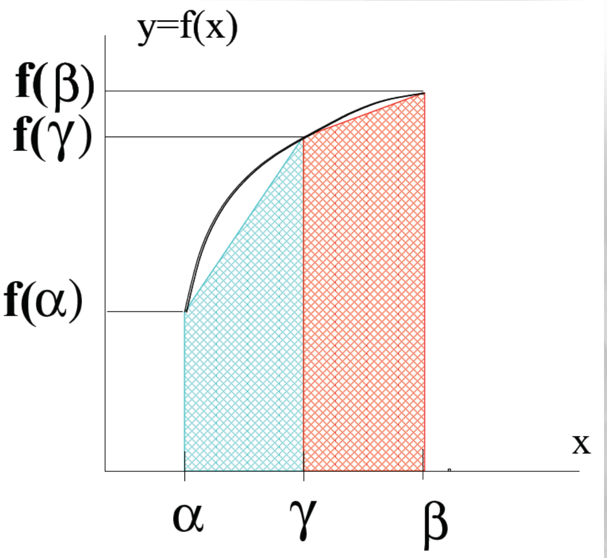

FIGURE – Méthode de Simpson

On montre facilement que le polynôme de degré 2 qui passe par A, B et C est de la forme :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x-\gamma)(x-\beta)}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}f(\gamma) + \frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}f(\beta \\ &= \frac{2}{h^2}[(x-\gamma)(x-\beta)f(\alpha) - 2(x-\alpha)(x-\beta)f(\gamma) + (x-\alpha)(x-\gamma)f \end{aligned}$$

On a donc $\int_\alpha^\beta P(x)dx = \frac{h}{6}(f(\alpha)+4f(\gamma)+f(\beta))$ on propose donc la formule élémentaire suivante :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \frac{h}{6}(f(\alpha)+4f(\gamma)+f(\beta)) + R_{\alpha,\beta}$$

Pour exprimer le reste, en est amené à supposer que f a une dérivé quatrième f^4 continue : considérons la fonction auxiliaire : $\varphi : [0, \frac{h}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = F(\gamma + x) - F(\gamma - x) - \frac{x}{3}(f(\gamma + x) + f(\gamma - x) + 4f(\gamma)) + kx^5$$

k est une constante choisie telle que : $\varphi(\frac{h}{2}) = 0$.
$\varphi(0) = \varphi(\frac{h}{2}) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\epsilon_1 \in]0, \frac{h}{2}[$ telle que $\varphi^{'}(\epsilon_1) = 0$. D'après l'expression de $\varphi^{'}(x)$ donnée ci-dessous

$$\varphi^{'}(x) = \frac{2}{3}(f(\gamma+x)+f(\gamma-x)) - \frac{4}{3}f(\gamma) - \frac{x}{3}(f^{'}(x+\gamma) - f^{'}(\gamma-x)) + 5kx^4$$

on conclut que $\varphi^{'}(0) = 0$, et comme $\varphi^{'}(\epsilon_1) = 0$ on en déduit du théorème de Rolle qu'il existe $\epsilon_2 \in]0, \epsilon_1[$ telle que $\varphi^{''}(\epsilon_2) = 0$

$$\varphi^{''}(x) = \frac{1}{3}(f^{'}(\gamma + x) - f^{'}(\gamma - x)) - \frac{x}{3}(f^{''}(x+\gamma) + f^{''}(\gamma - x)) + 20kx^3$$

$\varphi^{''}(\epsilon_2) = 0$, $\varphi^{''}(0) = 0$; par application du théorème de Rolle de nouveau, il existe $\epsilon_3 \in]0, \epsilon_2[$ telle que $\varphi^3(\epsilon_3) = 0$. Le même procédé appliqué à φ^3 donne :

$$\varphi^3(x) = -\frac{x}{3}(f^3(x+\gamma) - f^3(\gamma - x)) + 60kx^2$$

$\varphi^3(\epsilon_3) = 0$ implique $\frac{\epsilon_3}{3}(f^3(\epsilon_3 + \gamma) - f^3(\gamma - \epsilon_3)) = 60k\epsilon_3^2$.

Le théorème des accroissements assure l'existence de $\eta \in]\gamma - \epsilon_3, \gamma + \epsilon_3[$ tel que

$$f^3(\epsilon_3 + \gamma) - f^3(\gamma - \epsilon_3) = 2\epsilon_3 f^4(\eta)$$

On a donc finalement :

$$k = \frac{1}{90} f^4(\eta)$$

avec cette valeur de k mise dans l'expression de la fonction auxiliaire et en utilisant que $\varphi(\frac{h}{2}) = 0$ on en déduit :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{h}{6}(f(\beta) + f(\alpha) + 4f(\gamma)) - \frac{h^5}{2880} f^4(\eta)$$

ceci est la formule élémentaire pour la méthode de Simpson.

▷ Formule composée

On suppose que $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$. On considère une subdivision régulière de pas $h = \frac{b-a}{n}$ de $[a,b]$: $a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ on a :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = F(a_{i+1}) - F(a_i) = \frac{h}{6}(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)) - \frac{h^5}{2880} f^4(\eta_i)$$

d'où sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)) - \frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1} f^4(\eta_i)$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaire au dernier terme du membre de droite : on trouve :

$$\int_a^b f(t)dt = \underbrace{\frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)\right)}_{S_n(f)} - \underbrace{\frac{h^4}{2880}(b-a)f^4(\theta)}_{R_n(f)}$$

Le reste $R_n(f)$ représente l'erreur de méthode lorsqu'on remplace $\int_a^b f(t)dt$ par la somme finie $S_n(f)$.

Proposition

- $R_n(f) = \int_a^b f(t)dt - S_n(f)$.
- *la méthode est convergente, sa convergence est réglée par le terme en* h^4.
- $S_n(f) = \frac{1}{3}(2Q_n(f) + T_n(f))$.

▷ Estimation de l'erreur

- En pratique il est difficile d'obtenir une majoration de la dérivée 4^{me}. Sinon, si M est un majorant de f^4 on a :

$$|R_n(f)| \leq (b-a)\frac{h^4 M}{2880}.$$

- Pour limiter le nombre d'évaluations de f, on peut se limiter au cas où n est une puissance de 2. Alors dans ce cas $|S_{2^n} - S_n|$ fournit une estimation de l'erreur ainsi qu'un test d'arrêt des itérations. (voir l'accélèration de Romberg)

Exemple

$Log(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}dt \simeq 0.6931471806$, $f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{''}(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^3(x) = \frac{6}{x^4}$, $f^4(x) = \frac{24}{x^5}$. *On remarque donc que* $f^4(x)$ *est majorée par 24.*

n	*nombre de point*	S_n	$\frac{(b-a)h^4 M}{2880}$	$\lvert S_{2^n} - S_n \rvert$	*erreur exacte*
1	3	0.69444443	8.310^{-3}	$-$	1.210^{-3}
2	5	0.69325393	2.210^{-4}	1.210^{-3}	1.110^{-4}
4	9	0.69315450	3.310^{-5}	1.110^{-4}	6.310^{-6}
8	17	0.69314760	2.010^{-6}	6.910^{-6}	4.210^{-7}

Conclusion

Le tableau suivant résume les trois méthodes d'intégration numérique étudiées dans ce chapitre.

Méthode	Expression de l'approximation	L'erreur de l'approximation
Rectangle	$Q_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$	$R_n(f) = \frac{h^2}{24}(b-a)f''(\theta)$
Trapèze	$T_n(f) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$	$R_n(f) = \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\theta)$
Simpson	$S_n(f) = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)\right)$	$R_n(f) = \frac{h^4}{2880}(b-a)f^{4}(\theta)$