# Table de matière

Soit $f$ une fonction réelle et $D_f$ son domaine de définition ($D_f \subseteq \mathbb{R}$). Notre problème consiste à :

**trouver** $x \in D_f$ **tel que** $f(x) = 0$.

Montrer l'existence d'une racine, déterminer le nombre des racines

éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le calcul approché de ces racines posent des problèmes qui ne sont pas résolus par une méthode générale. Nous introduisons pour la résolution de ce problème plusieurs algorithmes

dont on étudiera les caractéristiques (bissection, méthodes du point fixe, Newton-Raphson, ...).

*Definition*

*Si $s$ est une racine de $f$ alors $f(s) = 0$. Si $f$ est $p$ fois differentiable et telle que :*

$$f(s) = 0, \; f^{'}(s) = 0, \; f^{(p-1)}(s) = 0 \text{ et } f^{p}(s) \neq 0, \qquad (10)$$

*alors $s$ est dite une racine de multiplicité $p$.*

Soit $f$ une fonction réelle et $D_f$ son domaine de définition ($D_f \subseteq \mathbb{R}$). Notre problème consiste à :

$$\textbf{trouver } x \in D_f \textbf{ tel que } f(x) = 0.$$

Montrer l'existence d'une racine, déterminer le nombre des racines

éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le calcul approché de ces racines posent des problèmes qui ne sont pas résolus par une méthode générale. Nous introduisons pour la résolution de ce problème plusieurs algorithmes

dont on étudiera les caractéristiques (bissection, méthodes du point fixe, Newton-Raphson, ...).

*Definition*

*Si $s$ est une racine de $f$ alors $f(s) = 0$. Si $f$ est $p$ fois differentiable et telle que :*

$$f(s) = 0,\ f^{'}(s) = 0,\ f^{(p-1)}(s) = 0 \text{ et } f^{p}(s) \neq 0, \tag{10}$$

*alors $s$ est dite une racine de multiplicité $p$.*

Soit $f$ une fonction réelle et $D_f$ son domaine de définition ($D_f \subseteq \mathbb{R}$). Notre problème consiste à :

$$\textbf{trouver } x \in D_f \textbf{ tel que } f(x) = 0.$$

Montrer l'existence d'une racine, déterminer le nombre des racines

éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le calcul approché de ces racines posent des problèmes qui ne sont pas résolus par une méthode générale.
Nous introduisons pour la résolution de ce problème plusieurs algorithmes

dont on étudiera les caractéristiques (bissection, méthodes du point fixe, Newton-Raphson, ...).

*Definition*

*Si $s$ est une racine de $f$ alors $f(s) = 0$. Si $f$ est $p$ fois differentiable et telle que :*

$$f(s) = 0,\ f^{'}(s) = 0,\ f^{(p-1)}(s) = 0 \text{ et } f^{p}(s) \neq 0, \tag{10}$$

*alors $s$ est dite une racine de multiplicité $p$.*

Soit $f$ une fonction réelle et $D_f$ son domaine de définition ($D_f \subseteq \mathbb{R}$). Notre problème consiste à :

$$\textbf{trouver } x \in D_f \textbf{ tel que } f(x) = 0.$$

Montrer l'existence d'une racine, déterminer le nombre des racines

éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le calcul approché de ces racines posent des problèmes qui ne sont pas résolus par une méthode générale. Nous introduisons pour la résolution de ce problème plusieurs algorithmes

dont on étudiera les caractéristiques (bissection, méthodes du point fixe, Newton-Raphson, ...).

*Definition*

*Si $s$ est une racine de $f$ alors $f(s) = 0$. Si $f$ est $p$ fois differentiable et telle que :*

$$f(s) = 0,\ f'(s) = 0,\ f^{(p-1)}(s) = 0 \text{ et } f^p(s) \neq 0, \tag{10}$$

*alors $s$ est dite une racine de multiplicité $p$.*

Soit $f$ une fonction réelle et $D_f$ son domaine de définition ($D_f \subseteq \mathbb{R}$). Notre problème consiste à :

$$\textbf{trouver } x \in D_f \textbf{ tel que } f(x) = 0.$$

Montrer l'existence d'une racine, déterminer le nombre des racines

éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le calcul approché de ces racines posent des problèmes qui ne sont pas résolus par une méthode générale. Nous introduisons pour la résolution de ce problème plusieurs algorithmes

dont on étudiera les caractéristiques (bissection, méthodes du point fixe, Newton-Raphson, ...).

### *Definition*

*Si $s$ est une racine de $f$ alors $f(s) = 0$. Si $f$ est $p$ fois differentiable et telle que :*

$$f(s) = 0,\ f^{'}(s) = 0,\ f^{(p-1)}(s) = 0 \text{ et } f^{p}(s) \neq 0, \tag{10}$$

*alors $s$ est dite une racine de multiplicité $p$.*

# Localisation d'une racine

Il faut commencer par localiser la racine, c'est à dire trouver un encadrement de cette racine.

$\rightarrow$ Méthode graphique

En étudiant le tableau de variation et les propriétés de la fonction (continuité, monotonie, . . . , graphe), on essaye de localiser ainsi tous les intervalles qui contiennent une solution de $f(x)=0$.

$\rightarrow$ Par application du théorème des Valeurs Intermédiaires

Si $f$ est continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un point $s \in ]a, b[$ telle que $f(s) = 0$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$, alors cette racine est unique.

Il faut commencer par localiser la racine, c'est à dire trouver un encadrement de cette racine.

$\rightarrow$ Méthode graphique

En étudiant le tableau de variation et les propriétés de la fonction (continuité, monotonie, . . . , graphe), on essaye de localiser ainsi tous les intervalles qui contiennent une solution de $f(x) = 0$.

$\rightarrow$ Par application du théorème des Valeurs Intermédiaires

Si $f$ est continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un point $s \in ]a, b[$ telle que $f(s) = 0$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$, alors cette racine est unique.

Il faut commencer par localiser la racine, c'est à dire trouver un encadrement de cette racine.

$\rightarrow$ Méthode graphique

En étudiant le tableau de variation et les propriétés de la fonction (continuité, monotonie, . . . , graphe), on essaye de localiser ainsi tous les intervalles qui contiennent une solution de $f(x) = 0$.

$\rightarrow$ Par application du théorème des Valeurs Intermédiaires

Si $f$ est continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un point $s \in ]a, b[$ telle que $f(s) = 0$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$ alors cette racine est unique.

Il faut commencer par localiser la racine, c'est à dire trouver un encadrement de cette racine.

$\rightarrow$ Méthode graphique

En étudiant le tableau de variation et les propriétés de la fonction (continuité, monotonie, . . . , graphe), on essaye de localiser ainsi tous les intervalles qui contiennent une solution de $f(x) = 0$.

$\rightarrow$ Par application du théorème des Valeurs Intermédiaires

Si $f$ est continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un point $s \in ]a, b[$ telle que $f(s) = 0$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$ alors cette racine est unique.

Il faut commencer par localiser la racine, c'est à dire trouver un encadrement de cette racine.

$\rightarrow$ Méthode graphique

En étudiant le tableau de variation et les propriétés de la fonction (continuité, monotonie, . . . , graphe), on essaye de localiser ainsi tous les intervalles qui contiennent une solution de $f(x) = 0$.

$\rightarrow$ Par application du théorème des Valeurs Intermédiaires

Si $f$ est continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe au moins un point $s \in ]a, b[$ telle que $f(s) = 0$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$, alors cette racine est unique.

# Méthode de dichotomie ou de bissection

La méthode de bissection repose sur une idée toute simple. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins une racine $s$ dans l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(s) = 0$. Si de plus $f$ est strictement monotone dans l'intervalle $[a, b]$, alors $s$ est unique.

on pose

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$c_0$ est bien le milieu de l'intervalle $[a, b]$, il suffit donc de déterminer entre

les intervalle $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$, celui qui possède encore un changement de signe. La racine se trouve forcement dans cet intervalle et ainsi de suite. Par

récurrence, on construit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$. La suite $(c_n)$ est définie par $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. On remarque qu'à chaque opération on diminue de moitié la longueur de l'intervalle contenant la racine $s$. Au bout de $n$ opérations la longueur de l'intervalle devient $\frac{b-a}{2^n}$. Le coefficient de réduction de l'erreur est au moins $\frac{1}{2}$. Cela nous amène à l'algorithme suivant :

La méthode de bissection repose sur une idée toute simple. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins une racine $s$ dans l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(s) = 0$. Si de plus $f$ est strictement monotone dans l'intervalle $[a, b]$, alors $s$ est unique.

on pose

$$a_0 = a, \; b_0 = b, \; c_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$c_0$ est bien le milieu de l'intervalle $[a, b]$, il suffit donc de déterminer entre

les intervalle $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$, celui qui possède encore un changement de signe. La racine se trouve forcement dans cet intervalle et ainsi de suite. Par

récurrence, on construit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ la suite $(c_n)$ est définie par $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. On remarque qu'à chaque opération on diminue de moitié la longueur de l'intervalle contenant la racine $s$. Au bout de $n$ opérations la longueur de l'intervalle devient $\frac{b-a}{2^n}$. Le coefficient de réduction de l'erreur est au moins $\frac{1}{2}$. Cela nous amène à l'algorithme suivant :

La méthode de bissection repose sur une idée toute simple. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins une racine $s$ dans l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(s) = 0$. Si de plus $f$ est strictement monotone dans l'intervalle $[a, b]$, alors $s$ est unique.

on pose

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$c_0$ est bien le milieu de l'intervalle $[a, b]$, il suffit donc de déterminer entre

les intervalle $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$, celui qui possède encore un changement de signe. La racine se trouve forcement dans cet intervalle et ainsi de suite. Par

récurrence, on construit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$. La suite $(c_n)$ est définie par $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. On remarque qu'à chaque opération on diminue de moitié la longueur de l'intervalle contenant la racine $s$. Au bout de $n$ opérations la longueur de l'intervalle devient $\frac{b-a}{2^n}$. Le coefficient de réduction de l'erreur est au moins $\frac{1}{2}$. Cela nous amène à l'algorithme suivant :

La méthode de bissection repose sur une idée toute simple. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins une racine $s$ dans l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(s) = 0$. Si de plus $f$ est strictement monotone dans l'intervalle $[a, b]$, alors $s$ est unique.

on pose

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$c_0$ est bien le milieu de l'intervalle $[a, b]$, il suffit donc de déterminer entre

les intervalle $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$, celui qui possède encore un changement de signe. La racine se trouve forcement dans cet intervalle et ainsi de suite. Par

récurrence, on construit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$. La suite $(c_n)$ est définie par $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. On remarque qu'à chaque opération on diminue de moitié la longueur de l'intervalle contenant la racine $s$. Au bout de $n$ opérations la longueur de l'intervalle devient $\frac{b-a}{2^n}$. Le coefficient de réduction de l'erreur est au moins $\frac{1}{2}$. Cela nous amène à l'algorithme suivant :

## Algorithme (Algorithme de dichotomie)

On définit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ de la manière suivante :

- $a_0 = a,\ b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
- si $f(a_0)f(c_0) < 0$ alors $a_1 = a_0,\ b_1 = c_0$ et $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
- si $f(b_0)f(c_0) < 0$ alors $a_1 = c_0,\ b_1 = b_0$ et $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

Si $a_n$, $b_n$ sont connus alors $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ sont définis comme suit :

- on pose : $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ alors ;
- si $f(c_n) = 0$ on pose $a_{n+1} = b_{n+1} = c_{n+1}$
- sinon :
- si $f(a_n)f(c_n) < 0$ on pose $a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n$
- si $f(b_n)f(c_n) < 0$ on pose $a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n$

## Algorithme (Algorithme de dichotomie)

On définit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ de la manière suivante :

- $a_0 = a,\ b_0 = b$ et $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
- si $f(a_0)f(c_0) < 0$ alors $a_1 = a_0,\ b_1 = c_0$ et $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
- si $f(b_0)f(c_0) < 0$ alors $a_1 = c_0,\ b_1 = b_0$ et $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

Si $a_n, b_n$ sont connus alors $a_{n+1}, b_{n+1}$ sont définis comme suit :

- on pose : $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ alors;
- si $f(c_n) = 0$ on pose $a_{n+1} = b_{n+1} = c_{n+1}$
- sinon :
- si $f(a_n)f(c_n) < 0$ on pose $a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n$
- si $f(b_n)f(c_n) < 0$ on pose $a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n$

Cela étant schématisé dans la figure suivante :

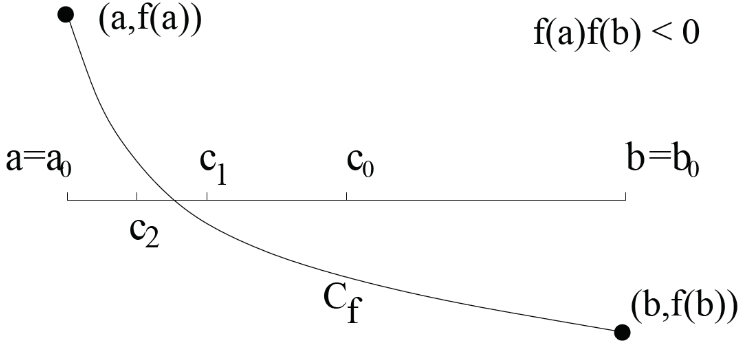


FIGURE – Principe de la méthode de dichotomie.

D'après le graphe on remarque que :

$$
\begin{aligned}
|c_n - s| &< \frac{|b_n - a_n|}{2}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\
&< \frac{b-a}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

On en conclut donc que la suite $(c_n)$ ainsi formée converge vers la racine $s$ de $f(x) = 0$. $c_n$ est une approximation de $s$, l'erreur $e_n$ au bout de la $n^{ième}$ opération est donnée par $e_n = |c_n - s|$. On a la majoration de l'erreur suivante :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Pour avoir une approximation de $s$ par $c_n$ avec une précision $\epsilon$, il suffit qu'on ait :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon,$$

et donc

$$n > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{ln(2)} - 1.$$

D'après le graphe on remarque que :

$$\begin{aligned} |c_n - s| &< \frac{|b_n - a_n|}{2}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ &< \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

On en conclut donc que la suite $(c_n)$ ainsi formée converge vers la racine $s$ de $f(x) = 0$. $c_n$ est une approximation de $s$, l'erreur $e_n$ au bout de la $n^{ième}$ opération est donnée par $e_n = |c_n - s|$. On a la majoration de l'erreur suivante :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Pour avoir une approximation de $s$ par $c_n$ avec une précision $\epsilon$, il suffit qu'on ait :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

et donc

$$n > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{ln(2)} - 1.$$

D'après le graphe on remarque que :

$$
\begin{aligned}
|c_n - s| &< \frac{|b_n - a_n|}{2}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\
&< \frac{b-a}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

On en conclut donc que la suite $(c_n)$ ainsi formée converge vers la racine $s$ de $f(x) = 0$. $c_n$ est une approximation de $s$, l'erreur $e_n$ au bout de la $n^{me}$ opération est donnée par $e_n = |c_n - s|$. On a la majoration de l'erreur suivante :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Pour avoir une approximation de $s$ par $c_n$ avec une précision $\epsilon$, il suffit qu'on ait :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

et donc

$$n > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{ln(2)} - 1.$$

D'après le graphe on remarque que :

$$\begin{aligned} |c_n - s| &< \frac{|b_n - a_n|}{2}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ &< \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

On en conclut donc que la suite $(c_n)$ ainsi formée converge vers la racine $s$ de $f(x) = 0$. $c_n$ est une approximation de $s$, l'erreur $e_n$ au bout de la $n^{me}$ opération est donnée par $e_n = |c_n - s|$. On a la majoration de l'erreur suivante :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Pour avoir une approximation de $s$ par $c_n$ avec une précision $\epsilon$, il suffit qu'on ait :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon,$$

et donc

$$n > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{ln(2)} - 1.$$

D'après le graphe on remarque que :

$$\begin{aligned} |c_n - s| &< \frac{|b_n - a_n|}{2}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ &< \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

On en conclut donc que la suite $(c_n)$ ainsi formée converge vers la racine $s$ de $f(x) = 0$. $c_n$ est une approximation de $s$, l'erreur $e_n$ au bout de la $n^{me}$ opération est donnée par $e_n = |c_n - s|$. On a la majoration de l'erreur suivante :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Pour avoir une approximation de $s$ par $c_n$ avec une précision $\epsilon$, il suffit qu'on ait :

$$|c_n - s| < \frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon,$$

et donc

$$n > \frac{ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{ln(2)} - 1.$$

**Remarque**

- $n$ est le nombre d'itération nécessaire pour avoir une approximation de $s$ à l'erreur $\epsilon$.
- Sur le plan pratique on doit avoir $n$ le plus petit possible, pour cela on doit choisir un intervalle de longueur aussi petite que possible.

## Exemple

Soit à résoudre par la méthode de dichotomie $f(x) = log(x) + x = 0$. $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0.5, 1]$, de plus $f(0.5)f(1) < 0$ et $f$ est strictement croissante sur $[0.5, 1]$ donc $f$ admet une racine unique $s \in ]0.5, 1[$. D'après l'algorithme de dichotomie, on a le tableau suivant :

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $c_n$ | $\lvert c_{n+1} - c_n \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 1 | 0.75 | - |
| 1 | 0.5 | 0.75 | 0.625 | 0.125 |
| 2 | 0.5 | 0.625 | 0.5625 | 0.0625 |
| 3 | 0.5625 | 0.625 | 0.59375 | 0.03125 |
| 4 | 0.5625 | 0.59375 | 0.578125 | 0.015625 |
| 5 | 0.5625 | 0.578125 | 0.5703125 | 0.0078125 |
| 6 | 0.5625 | 0.5703125 | 0.56640625 | 0.00390625 |
| 7 | 0.56640625 | 0.5703125 | 0.568359375 | 0.001953125 |
| 8 | 0.56640625 | 0.568359375 | 0.5673828125 | 0.0009765625 |
| 9 | 0.56640625 | 0.5673828125 | 0.56689453125 | 0.00048828125 |
| 10 | 0.56689453125 | 0.5673828125 | 0.567138671875 | 0.00024414062 |
| 11 | 0.567138671875 | 0.5673828125 | 0.5672607421875 | 0.00012207031 |
| 12 | 0.567138671875 | 0.5672607421875 | 0.56719970703125 | 0.0000610351 |

L'erreur au bout de la $12^{me}$ itération est inférieure à $\frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{0.5}{2^{13}} = 0.0000610$. La valeur approchée de $s$ à $10^{-15}$ près est donnée par 0.567143290409784.

**Remarque**

*a)* *L'erreur* $e_{12} = |c_{12} - s| = 0.00005641662147$ *au bout de la* $12^{me}$ *opération est inférieure à* $\frac{b-a}{2^{12+1}} = 0.0000610351562 5$.

*b)* $c_n$ *est une approximation de* $s$, $|c_{n+1} - c_n|$ *donne aussi une information sur l'ordre de grandeur de l'erreur. Pour* $n = 11$ *on a :* $|c_{12} - c_{11}| \approx 0.0000610351562 5$

L'erreur au bout de la $12^{me}$ itération est inférieure à $\frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{0.5}{2^{13}} = 0.0000610$. La valeur approchée de $s$ à $10^{-15}$ près est donnée par $0.567143290409784$.

## Remarque

*a)* *L'erreur* $e_{12} = |c_{12} - s| = 0.00005641662147$ *au bout de la* $12^{me}$ *opération est inférieure à* $\frac{b-a}{2^{12+1}} = 0.00006103515625$.

*b)* $c_n$ *est une approximation de* $s$, $|c_{n+1} - c_n|$ *donne aussi une information sur l'ordre de grandeur de l'erreur. Pour* $n = 11$ *on a :* $|c_{12} - c_{11}| \approx 0.00006103515625$

## Remarque

- La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre du moment où on a un intervalle avec changement de signe.
- Il existe des cas où la méthode de bissection ne fonctionne pas :
  1. La première situation critique est celle où la fonction $f$ est tangente à l'axe des abscisse et ne présente pas de changement de signe, la bissection ne peut alors s'appliquer.
  2. Il y'a aussi le cas où deux racines (en général un nombre pairs de racines) présentes dans l'intervalle de départ ; dans ce cas il n'y aura pas de changement de signe.
  3. Enfin si l'intervalle de départ contient un nombre impaire de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.

On peu facilement éviter ces écueils en illustrant graphiquement la fonction $f$ dans l'intervalle d'intérêt.

## Remarque

- La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre du moment où on a un intervalle avec changement de signe.
- Il existe des cas où la méthode de bissection ne fonctionne pas :
  1. La première situation critique est celle où la fonction $f$ est tangente à l'axe des abscisse et ne présente pas de changement de signe, la bissection ne peut alors s'appliquer.
  2. Il y'a aussi le cas où deux racines (en général un nombre pairs de racines) présentes dans l'intervalle de départ ; dans ce cas il n'y aura pas de changement de signe.
  3. Enfin si l'intervalle de départ contient un nombre impaire de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.

On peu facilement éviter ces écueils en illustrant graphiquement la fonction $f$ dans l'intervalle d'intérêt.

## Remarque

- *La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre du moment où on a un intervalle avec changement de signe.*
- *Il existe des cas où la méthode de bissection ne fonctionne pas :*
  1. *La première situation critique est celle où la fonction $f$ est tangente à l'axe des abscisse et ne présente pas de changement de signe, la bissection ne peut alors s'appliquer.*
  2. *Il y'a aussi le cas où deux racines (en général un nombre pairs de racines) présentes dans l'intervalle de départ ; dans ce cas il n'y aura pas de changement de signe.*
  3. *Enfin si l'intervalle de départ contient un nombre impaire de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.*

*On peu facilement éviter ces écueils en illustrant graphiquement la fonction $f$ dans l'intervalle d'intérêt.*

## Remarque

- La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre du moment où on a un intervalle avec changement de signe.
- Il existe des cas où la méthode de bissection ne fonctionne pas :
  1. La première situation critique est celle où la fonction $f$ est tangente à l'axe des abscisse et ne présente pas de changement de signe, la bissection ne peut alors s'appliquer.
  2. Il y'a aussi le cas où deux racines (en général un nombre pairs de racines) présentes dans l'intervalle de départ ; dans ce cas il n'y aura pas de changement de signe.
  3. Enfin si l'intervalle de départ contient un nombre impaire de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.

On peu facilement éviter ces écueils en illustrant graphiquement la fonction $f$ dans l'intervalle d'intérêt.

## Remarque

- La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre du moment où on a un intervalle avec changement de signe.
- Il existe des cas où la méthode de bissection ne fonctionne pas :
  1. La première situation critique est celle où la fonction $f$ est tangente à l'axe des abscisse et ne présente pas de changement de signe, la bissection ne peut alors s'appliquer.
  2. Il y'a aussi le cas où deux racines (en général un nombre pairs de racines) présentes dans l'intervalle de départ ; dans ce cas il n'y aura pas de changement de signe.
  3. Enfin si l'intervalle de départ contient un nombre impaire de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.

On peu facilement éviter ces écueils en illustrant graphiquement la fonction $f$ dans l'intervalle d'intérêt.

## Remarque

- *La convergence de la méthode de la bissection n'est pas très rapide, mais elle est sûre du moment où on a un intervalle avec changement de signe.*
- *Il existe des cas où la méthode de bissection ne fonctionne pas :*
  1. *La première situation critique est celle où la fonction $f$ est tangente à l'axe des abscisse et ne présente pas de changement de signe, la bissection ne peut alors s'appliquer.*
  2. *Il y'a aussi le cas où deux racines (en général un nombre pairs de racines) présentes dans l'intervalle de départ ; dans ce cas il n'y aura pas de changement de signe.*
  3. *Enfin si l'intervalle de départ contient un nombre impaire de racines, $f(x)$ change de signe, mais l'algorithme peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines.*

*On peu facilement éviter ces écueils en illustrant graphiquement la fonction $f$ dans l'intervalle d'intérêt.*

# La méthode de point fixe

Avant d'aborder les méthodes de points fixes, il est important de définir ce qu'est un point fixe d'une fonction.

**Definition**

*On appelle **point fixe** de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ un réel $x$ qui vérifie $f(x) = x$.*

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on construit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

à partir d'une valeur estimé $x_0$, l'intérêt de cet algorithme réside dans sa

généralité et la facilité avec laquelle on peut faire l'analyse de convergence. Il en résulte l'algorithme suivant :

Avant d'aborder les méthodes de points fixes, il est important de définir ce qu'est un point fixe d'une fonction.

### *Definition*

*On appelle* ***point fixe*** *de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ un réel $x$ qui vérifie $f(x) = x$.*

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on construit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

à partir d'une valeur estimé $x_0$, l'intérêt de cet algorithme réside dans sa

généralité et la facilité avec laquelle on peut faire l'analyse de convergence. Il en résulte l'algorithme suivant :

Avant d'aborder les méthodes de points fixes, il est important de définir ce qu'est un point fixe d'une fonction.

### Definition

*On appelle* ***point fixe*** *de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ un réel $x$ qui vérifie $f(x) = x$.*

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on construit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

à partir d'une valeur estimé $x_0$, l'intérêt de cet algorithme réside dans sa

généralité et la facilité avec laquelle on peut faire l'analyse de convergence. Il en résulte l'algorithme suivant :

Avant d'aborder les méthodes de points fixes, il est important de définir ce qu'est un point fixe d'une fonction.

**Definition**

*On appelle **point fixe** de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ un réel $x$ qui vérifie $f(x) = x$.*

Il existe un algorithme très simple permettant de déterminer des points fixes. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on construit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

à partir d'une valeur estimé $x_0$, l'intérêt de cet algorithme réside dans sa

généralité et la facilité avec laquelle on peut faire l'analyse de convergence. Il en résulte l'algorithme suivant :

**Algorithme (Algorithme des points fixes)**

1. Étant donné un critère d'arret $\epsilon$, le nombre maximal d'itération $N$ et $x_0$ une valeur estimé du point fixe.
2. Calculer $x_1 = f(x_0)$.
3. Tant que $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} > \epsilon$ et le nombre d'itération n'est pas atteint
4. Effectuer $x_{n+1} = f(x_n)$.
5. Arrêt.

**Remarque**

L'algorithme des points fixes peut diverger complètement dans certains cas, Il faut donc déterminer dans quelles conditions la méthode converge.

### Algorithme (Algorithme des points fixes)

1. Étant donné un critère d'arret $\epsilon$, le nombre maximal d'itération $N$ et $x_0$ une valeur estimé du point fixe.
2. Calculer $x_1 = f(x_0)$.
3. Tant que $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} > \epsilon$ et le nombre d'itération n'est pas atteint
4. Effectuer $x_{n+1} = f(x_n)$.
5. Arrêt.

### Remarque

L'algorithme des points fixes peut diverger complètement dans certains cas, Il faut donc déterminer dans quelles conditions la méthode converge.

## → Conditions de convergence

Pour qu'un point fixe existe il faut que :

a) L'ensemble de définition ($D_f$) et l'ensemble image ($f(D_f)$) vérifient : $f(Df) \subseteq D_f$.

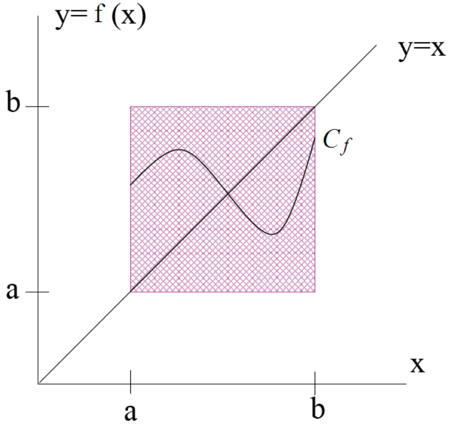


FIGURE – Condition nécessaire d'existence de point fixe $f(D_f) \subseteq D_f$

La condition a) à elle seule est insuffisante car on peut avoir une fonction qui vérifie bien $f(D_f) \subseteq D_f$ et qui ne possède pas de point fixe comme le montre le graphe de la fonction suivante 3 où $f$ est discontinue en $\alpha$.

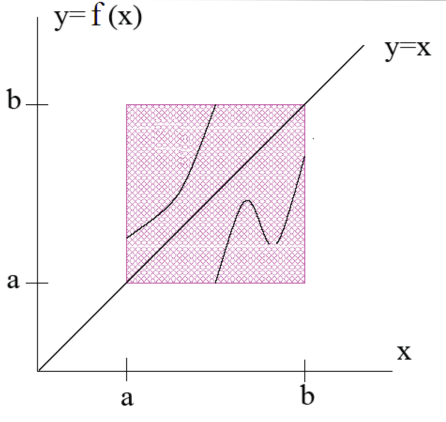


FIGURE – $f$ discontinue en $\alpha$, $f(D_f) \subseteq D_f$ n'est pas suffisante

Donc comme seconde condition pour qu'un point fixe existe il faut que :

b) $f$ soit une fonction continue.

Une question capitale se pose,

si ce point fixe existe et il unique ?

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle pour tout $x_0 \in D_f$ ?

Donc comme seconde condition pour qu'un point fixe existe il faut que :

b) $f$ soit une fonction continue.

Une question capitale se pose,

si ce point fixe existe et il unique ?
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle pour tout $x_0 \in D_f$ ?

## Theorème (Existence)

*Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle dont le domaine $D_f$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dont l'image $f(D_f)$ vérifie $f(D_f) \subseteq [a, b] = D_f$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Alors $f$ a un point fixe sur $[a, b]$ c'est à dire qu'il existe un point $s \in [a, b]$ tel que $s = f(s)$.*

*Démonstration.*

Soit $g$ une fonction définie à partir de $f$ par : $g(x) = x - f(x)$.

- $g(a) = a - f(a) < 0$ car $f(D_f) \subseteq [a, b]$.
- $g(b) = b - f(b) > 0$ car $f(Df) \subseteq [a, b]$.

Or $g$ est une fonction continue (comme différence de deux fonctions continues) d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0 \Longrightarrow f(s) = s$. □

## Theorème (Existence)

*Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle dont le domaine $D_f$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dont l'image $f(D_f)$ vérifie $f(D_f) \subseteq [a, b] = D_f$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Alors $f$ a un point fixe sur $[a, b]$ c'est à dire qu'il existe un point $s \in [a, b]$ tel que $s = f(s)$.*

## Démonstration.

Soit $g$ une fonction définie à partir de $f$ par : $g(x) = x - f(x)$.

- $g(a) = a - f(a) < 0$ car $f(D_f) \subseteq [a, b]$.
- $g(b) = b - f(b) > 0$ car $f(Df) \subseteq [a, b]$.

Or $g$ est une fonction continue (comme différence de deux fonctions continues) d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0 \Longrightarrow f(s) = s$. $\square$

## Theorème (Existence)

*Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle dont le domaine $D_f$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dont l'image $f(D_f)$ vérifie $f(D_f) \subseteq [a, b] = D_f$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Alors $f$ a un point fixe sur $[a, b]$ c'est à dire qu'il existe un point $s \in [a, b]$ tel que $s = f(s)$.*

## Démonstration.

Soit $g$ une fonction définie à partir de $f$ par : $g(x) = x - f(x)$.

- $g(a) = a - f(a) < 0$ car $f(D_f) \subseteq [a, b]$.
- $g(b) = b - f(b) > 0$ car $f(Df) \subseteq [a, b]$.

Or $g$ est une fonction continue (comme différence de deux fonctions continues) d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0 \Longrightarrow f(s) = s$. □

## Theorème (Existence)

*Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle dont le domaine $D_f$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dont l'image $f(D_f)$ vérifie $f(D_f) \subseteq [a, b] = D_f$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Alors $f$ a un point fixe sur $[a, b]$ c'est à dire qu'il existe un point $s \in [a, b]$ tel que $s = f(s)$.*

## Démonstration.

Soit $g$ une fonction définie à partir de $f$ par : $g(x) = x - f(x)$.

- $g(a) = a - f(a) < 0$ car $f(D_f) \subseteq [a, b]$.
- $g(b) = b - f(b) > 0$ car $f(Df) \subseteq [a, b]$.

Or $g$ est une fonction continue (comme différence de deux fonctions continues) d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0 \Longrightarrow f(s) = s$. $\square$

## Theorème (Existence)

*Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle dont le domaine $D_f$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dont l'image $f(D_f)$ vérifie $f(D_f) \subseteq [a, b] = D_f$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Alors $f$ a un point fixe sur $[a, b]$ c'est à dire qu'il existe un point $s \in [a, b]$ tel que $s = f(s)$.*

## Démonstration.

Soit $g$ une fonction définie à partir de $f$ par : $g(x) = x - f(x)$.

- $g(a) = a - f(a) < 0$ car $f(D_f) \subseteq [a, b]$.
- $g(b) = b - f(b) > 0$ car $f(Df) \subseteq [a, b]$.

Or $g$ est une fonction continue (comme différence de deux fonctions continues) d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0 \Longrightarrow f(s) = s$. □

## Theorème (Existence)

*Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle dont le domaine $D_f$ est un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dont l'image $f(D_f)$ vérifie $f(D_f) \subseteq [a, b] = D_f$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$. Alors $f$ a un point fixe sur $[a, b]$ c'est à dire qu'il existe un point $s \in [a, b]$ tel que $s = f(s)$.*

## Démonstration.

Soit $g$ une fonction définie à partir de $f$ par : $g(x) = x - f(x)$.

- $g(a) = a - f(a) < 0$ car $f(D_f) \subseteq [a, b]$.
- $g(b) = b - f(b) > 0$ car $f(Df) \subseteq [a, b]$.

Or $g$ est une fonction continue (comme différence de deux fonctions continues) d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in [a, b]$ tel que $g(s) = 0 \Longrightarrow f(s) = s$. □

## Remarque

- *Si $D_f$ est non borné ça ne marche plus. Prenons par exemple la fonction $f(x) = x + 1$ définie sur $D_f = \mathbb{R}$ qui n'est pas borné et qui vérifie néanmoins $f(D_f) \subseteq D_f$ mais pour tout $x \in D_f,\ x \neq x + 1$.*
- *Les conditions imposées ci-dessus n'interdisent pas l'existence de plusieurs points fixes. Si on souhaiterait avoir une seule solution on doit supposer que $f$ ne varie pas trop rapidement.*

Une façon d'imposer que l'intersection du graphe de $f$ et de la droite $y = x$ soit non vide est de supposer $|f^{'}| < L$ avec $L < 1$. On arrive ainsi à la notion d'application contractante mais la dérivabilité n'est pas nécessaire. Dans ce cas on a plus besoin de supposer que $D_f$ est borné et ceci est contenu dans le théorème suivant :

## Remarque

- *Si $D_f$ est non borné ça ne marche plus. Prenons par exemple la fonction $f(x) = x + 1$ définie sur $D_f = \mathbb{R}$ qui n'est pas borné et qui vérifie néanmoins $f(D_f) \subseteq D_f$ mais pour tout $x \in D_f$, $x \neq x + 1$.*
- *Les conditions imposées ci-dessus n'interdisent pas l'existence de plusieurs points fixes. Si on souhaiterait avoir une seule solution on doit supposer que $f$ ne varie pas trop rapidement.*

Une façon d'imposer que l'intersection du graphe de $f$ et de la droite $y = x$ soit non vide est de supposer $|f'| < L$ avec $L < 1$. On arrive ainsi à la notion d'application contractante mais la dérivabilité n'est pas nécessaire. Dans ce cas on a plus besoin de supposer que $D_f$ est borné et ceci est contenu dans le théorème suivant :

## Theorème (Existence et unicité)

*soit $f$ une fonction d'une variable réelle dont le domaine de définition $D_f$ est un intervalle fermé (pas forcément borné). Donc $D_f = [a, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$. On suppose :*

1. *que l'image de $D_f$ par $f$ vérifie : $f(D_f) \subseteq D_f$.*
2. *et qu'il existe une constante $L$ telle que $0 < L < 1$ et que*

$$\forall x, y \in D_f : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

*alors :*

- a) *$f$ a un point fixe unique $s$,*
- b) *La suite $x_n$ définie par $x_0 \in D_f$ : $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $s$ quel que soit $x_0 \in D_f$.*
- c) *pour $n = 1, 2, \ldots$ on a $e_n = |x_n - s| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$.*
  *$e_n$ définie l'erreur à l'itération $n$.*

## Démonstration.

Voir le cours. □

### Remarque

- *pour n fixe, l'erreur $|x_n - s|$ est d'autant plus petite que L est proche de 0.*
- *pour n fixe, l'erreur diminue très lentement si $L \approx 1$.*

### Proposition

*Soit f une fonction dérivable dans $[a, b]$, si $f'$ vérifie :*
$\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| = L < 1$ *alors f est contractante sur l'intervalle $[a, b]$.*

### Démonstration.

d'après la formule des accroissements finis : $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, $\xi \in ]x, y[$ donc
$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|$ avec $0 \leq L < 1$.

### Remarque

- *pour n fixe, l'erreur* $|x_n - s|$ *est d'autant plus petite que L est proche de 0.*
- *pour n fixe, l'erreur diminue très lentement si* $L \approx 1$.

### Proposition

*Soit f une fonction dérivable dans* $[a, b]$, *si* $f'$ *vérifie :*
$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = L < 1$ *alors f est contractante sur l'intervalle* $[a, b]$.

### Démonstration.

d'après la formule des accroissements finis : $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, $\xi \in ]x, y[$ donc
$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|$ avec $0 \leq L < 1$. □

## Remarque

- *pour n fixe, l'erreur* $|x_n - s|$ *est d'autant plus petite que L est proche de 0.*
- *pour n fixe, l'erreur diminue très lentement si* $L \approx 1$.

## Proposition

*Soit f une fonction dérivable dans* $[a, b]$, *si* $f'$ *vérifie :*
$\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| = L < 1$ *alors f est contractante sur l'intervalle* $[a, b]$.

## Démonstration.

d'après la formule des accroissements finis : $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, $\xi \in ]x, y[$ donc
$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|$ avec $0 \leq L < 1$. $\square$

## Remarque

*Il faut que* $\max|f^{'}(x)| < 1$ *et non* $|f^{'}(x)| < 1$ *comme le montre le contre exemple suivant :*
*si* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *pour* $x \in [1, +\infty[,\ f^{'}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. *On a pour tout* $x \in [1, +\infty[,\ |f'(x)| < 1$ *mais* $\max|f^{'}(x)| = 1$ *pour* $x \geq 1$ *on a aussi* $|f(x) - f(y)| = |x - y|f^{'}(\xi) < |x - y|$ *avec* $\xi \in [1, +\infty[$ *mais* $f$ *n'a pas de point fixe.*

### Theorème

*$f$ une fonction définie sur $[a, b] = D_f$ on suppose :*

- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.
- $\max |f'(x)| = L < 1$ *pour tout* $x \in [a, b]$.

*alors on a la majoration de l'erreur* $e_n = |x_n - s|$ *suivante :* $e_n \leq L^n e_0$. *Le nombre minimal d'itérations qui assure* $e_n \leq \epsilon$ *est* $n = N$ *avec :*
$N \geq \frac{log(\epsilon) - log(e_0)}{log(L)}$.

### Démonstration.

$e_n = |x_n - s| = |f(x_{n-1}) - f(s)| \leq L|x_{n-1} - s| \leq L^n|x_0 - s| \leq L^n e_0$. □

## Theorème

*$f$ une fonction définie sur $[a, b] = D_f$ on suppose :*

- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.
- $\max |f'(x)| = L < 1$ *pour tout* $x \in [a, b]$.

*alors on a la majoration de l'erreur $e_n = |x_n - s|$ suivante : $e_n \leq L^n e_0$. Le nombre minimal d'itérations qui assure $e_n \leq \epsilon$ est $n = N$ avec :*
$N \geq \frac{\log(\epsilon) - \log(e_0)}{\log(L)}$.

## Démonstration.

$$e_n = |x_n - s| = |f(x_{n-1}) - f(s)| \leq L|x_{n-1} - s| \leq L^n|x_0 - s| \leq L^n e_0. \quad \square$$

## Proposition

Soit $s$ une solution de $f(x) = x$ avec $f^{'}$ continue :

- si $|f^{'}(s)| < 1$ alors il existe un intervalle $[a, b]$ contenant $s$ pour lequel la suite définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $s$.
- si $|f^{'}(s)| > 1$, pour tout $x_0 \neq s$ la suite définie par $x_0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ne converge pas vers $s$.

## Exemple

Soit à résoudre $e^{-x} - x = 0 \iff e^{-x} = x$.
pour $x \in [0,1] = D_f$, $f(x) = e^{-x}$ : $f([0,1]) = [e^{-1}, 1] \subseteq [0,1]$.
$f'(x) = -e^{-x}$, $\max|f'(x)| = 1$ sur l'intervalle $[0,1]$ n'est pas inférieur à 1, donc il faut changer d'intervalle.
Prenons par exemple $D_f = \left[\frac{1}{2}, log(2)\right]$ on a
$f\left(\left[\frac{1}{2}, log(2)\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, e^{-2}\right] \subseteq \left[\frac{1}{2}, log(2)\right]$, $\max|f'(x)]$ sur $[\frac{1}{2}, log(2)]$ qui vaut $L = e^{\frac{-1}{2}}$ qui est bien inférieur à 1.
Partant de $x_0 = 0.5$ on a le tableau des itérations suivantes :

## Exemple

| $n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.50000 | 0.606531 | 0.106531 |
| 1 | 0.606531 | 0.545239 | 0.061292 |
| 2 | 0.545239 | 0.579703 | 0.034464 |
| 3 | 0.579703 | 0.560065 | 0.019638 |
| 4 | 0.560065 | 0.571172 | 0.011107 |
| 5 | 0.571172 | 0.564863 | 0.006309 |
| 6 | 0.564863 | 0.568438 | 0.003875 |
| 7 | 0.568738 | 0.566410 | 0.002328 |
| 8 | 0.566410 | 0.567560 | 0.00115 |
| 9 | 0.567560 | 0.566907 | 0.000653 |
| 10 | 0.566907 | 0.567278 | 0.000371 |
| 11 | 0.567278 | 0.567067 | 0.000211 |
| 12 | 0.567067 | 0.567187 | 0.00012 |
| 13 | 0.567187 | 0.567199 | 0.000119 |
| 14 | 0.567119 | 0.567157 | 0.000067 |

l'erreur lors de la $14^{me}$ itération est inférieure à :

$\frac{L^{14}}{1-L}|x_1 - x_0| = \frac{e^{-7}}{0.393469}0.106531 = 0.000247.$

## Exemple

| $n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.50000 | 0.606531 | 0.106531 |
| 1 | 0.606531 | 0.545239 | 0.061292 |
| 2 | 0.545239 | 0.579703 | 0.034464 |
| 3 | 0.579703 | 0.560065 | 0.019638 |
| 4 | 0.560065 | 0.571172 | 0.011107 |
| 5 | 0.571172 | 0.564863 | 0.006309 |
| 6 | 0.564863 | 0.568438 | 0.003875 |
| 7 | 0.568738 | 0.566410 | 0.002328 |
| 8 | 0.566410 | 0.567560 | 0.00115 |
| 9 | 0.567560 | 0.566907 | 0.000653 |
| 10 | 0.566907 | 0.567278 | 0.000371 |
| 11 | 0.567278 | 0.567067 | 0.000211 |
| 12 | 0.567067 | 0.567187 | 0.00012 |
| 13 | 0.567187 | 0.567199 | 0.000119 |
| 14 | 0.567119 | 0.567157 | 0.000067 |

*l'erreur lors de la $14^{me}$ itération est inférieure à :*

$$\frac{L^{14}}{1-L}|x_1 - x_0| = \frac{e^{-7}}{0.393469}0.106531 = 0.000247.$$

La proposition suivante donne des précisions sur l'ordre de convergence d'une méthode de point fixe.

*Proposition (Ordre de convergence)*

*On considère l'équation $g(x) = x$ où $g$ est une fonction au moins $p+1$ fois dérivable avec $p \geq 1$. Supposons que les hypothèses du théorème 27 soient vérifiées de sorte que $g$ admette un unique point fixe $x^* \in [a; b]$. Si $g^{'}(x^*) = g^{''}(x^*) = \cdots = g^{(p)}(x^*) = 0$ et $g^{(p+1)}(x^*) \neq 0$, alors la convergence de la méthode $x_{n+1} = g(x_n)$ est **superlinéaire** d'ordre $\mathbf{p+1}$.*

La proposition suivante donne des précisions sur l'ordre de convergence d'une méthode de point fixe.

**Proposition (Ordre de convergence)**

*On considère l'équation $g(x) = x$ où $g$ est une fonction au moins $p + 1$ fois dérivable avec $p \geq 1$. Supposons que les hypothèses du théorème 27 soient vérifiées de sorte que $g$ admette un unique point fixe $x^* \in [a; b]$. Si $g^{'}(x^*) = g^{''}(x^*) = \cdots = g^{(p)}(x^*) = 0$ et $g^{(p+1)}(x^*) \neq 0$, alors la convergence de la méthode $x_{n+1} = g(x_n)$ est **superlinéaire** d'ordre $\boldsymbol{p+1}$.*

# La méthode de Newton-Raphson

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continûment derivable et soit $\hat{x}$ un zero simple de $f$, c'est à dire $f(\hat{x})=0$, $f'(\hat{x})\neq 0$. Supposons que l'on connaisse une valeur $x_n$ proche de $\hat{x}$, pour calculer $x_{n+1}$ nous prenons l'intersection de l'axe $(Ox)$ avec la droite tangente au graphe de $f$ passant par le point $(x_n, f(x_n))$, comme cela est indiqué sur la figure (4)

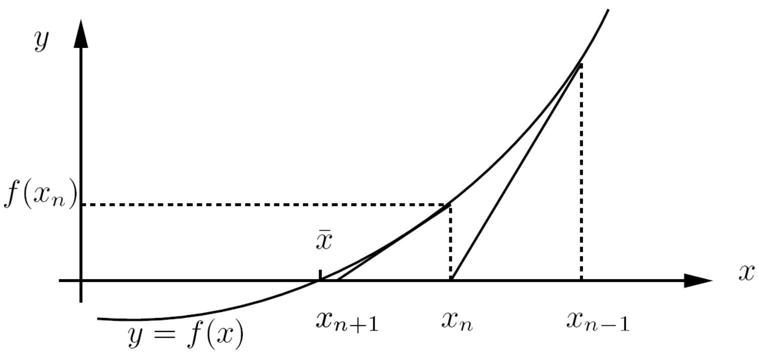


FIGURE – Méthode de Newton

Clairement, nous avons la relation $f(x_n)/(x_n - x_{n+1}) = f^{'}(x_n)$ qui donne, lorsque $x_0$ est choisi proche de $\hat{x}$, la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Nous voyons ainsi que la méthode de Newton est une méthode de point fixe pour calculer $\hat{x}$. En effet, il suffit de constater que si on pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

alors $f(x) = 0$ est équivalent à $g(x) = x$ et (11) est équivalent à $x_{n+1} = g(x_n)$.

Clairement, nous avons la relation $f(x_n)/(x_n - x_{n+1}) = f'(x_n)$ qui donne, lorsque $x_0$ est choisi proche de $\hat{x}$, la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, .... \tag{11}$$

Nous voyons ainsi que la méthode de Newton est une méthode de point fixe pour calculer $\hat{x}$. En effet, il suffit de constater que si on pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

alors $f(x) = 0$ est équivalent à $g(x) = x$ et (11) est équivalent à $x_{n+1} = g(x_n)$.

Clairement, nous avons la relation $f(x_n)/(x_n - x_{n+1}) = f^{'}(x_n)$ qui donne, lorsque $x_0$ est choisi proche de $\hat{x}$, la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, .... \tag{11}$$

Nous voyons ainsi que la méthode de Newton est une méthode de point fixe pour calculer $\hat{x}$. En effet, il suffit de constater que si on pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

alors $f(x) = 0$ est équivalent à $g(x) = x$ et (11) est équivalent à $x_{n+1} = g(x_n)$.

En vue d'utiliser le théorème 27, calculons $g^{'}(x)$ puis $g^{'}(\hat{x})$. Nous vérifions que si $f$ est deux fois continûment dérivable :

$$g^{'}(x) = 1 - \frac{f^{'}(x)^2 - f(x)f^{''}(x)}{f^{'}(x)^2},$$

et par suite, puisque $f(\hat{x}) = 0$ et $f^{'}(\hat{x}) \neq 0$

$$g^{'}(\hat{x}) = 0. \qquad (12)$$

Nous annonçons ainsi le théorème suivant

**Theorème (Convergence globale de la méthode de Newton-Raphson)**

*Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ et supposons que $\hat{x}$ soit tel que $f(\hat{x}) = 0$ et $f^{'}(\hat{x}) \neq 0$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $x_0$ satisfait $|\hat{x} - x_0| < \epsilon$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton (11) converge vers $\hat{x}$, de plus la convergence est quadratique.*

En vue d'utiliser le théorème 27, calculons $g'(x)$ puis $g'(\hat{x})$. Nous vérifions que si $f$ est deux fois continûment dérivable :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

et par suite, puisque $f(\hat{x}) = 0$ et $f'(\hat{x}) \neq 0$

$$g'(\hat{x}) = 0. \tag{12}$$

Nous annonçons ainsi le théorème suivant

*Theorème (Convergence globale de la méthode de Newton-Raphson)*

*Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ et supposons que $\hat{x}$ soit tel que $f(\hat{x}) = 0$ et $f'(\hat{x}) \neq 0$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $x_0$ satisfait $|\hat{x} - x_0| < \epsilon$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton (11) converge vers $\hat{x}$, de plus la convergence est quadratique.*

En vue d'utiliser le théorème 27, calculons $g^{'}(x)$ puis $g^{'}(\hat{x})$. Nous vérifions que si $f$ est deux fois continûment dérivable :

$$g^{'}(x) = 1 - \frac{f^{'}(x)^2 - f(x)f^{''}(x)}{f^{'}(x)^2},$$

et par suite, puisque $f(\hat{x}) = 0$ et $f^{'}(\hat{x}) \neq 0$

$$g^{'}(\hat{x}) = 0. \qquad (12)$$

Nous annonçons ainsi le théorème suivant

**Theorème (Convergence globale de la méthode de Newton-Raphson)**

*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et supposons que $\hat{x}$ soit tel que $f(\hat{x}) = 0$ et $f^{'}(\hat{x}) \neq 0$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $x_0$ satisfait $|\hat{x} - x_0| < \epsilon$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode de Newton (11) converge vers $\hat{x}$, de plus la convergence est quadratique.*

*Démonstration.*

Nous avons observé que la méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et que $|g'(\hat{x})| < 1$ en vertu de la relation (12). Ainsi le résultat de la convergence annoncé dans ce théorème est une conséquence de la proposition 8. A priori la convergence est linéaire, nous allons démontrer que la convergence est quadratique, ceci étant une conséquence du fait que $g'(\hat{x}) = 0$. Si nous développons $f$ autour du point $x_n$ nous obtenons :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\epsilon_x)}{2}(x - x_n)^2,$$

où $\epsilon_x$ appartient à l'intervalle d'extrémité $x$ et $x_n$. en choisissons $x = \hat{x}$ dans l'égalité ci-dessus, en divisant pas $f'(x_n)$ et en tenant compte du fait que $f(\hat{x}) = 0$, on obtient

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \hat{x} - x_n + \frac{f''(\epsilon_x)}{2f'(x_n)}(\hat{x} - x_n)^2 = 0.$$

*Démonstration.*

Nous avons observé que la méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et que $|g^{'}(\hat{x})| < 1$ en vertu de la relation (12). Ainsi le résultat de la convergence annoncé dans ce théorème est une conséquence de la proposition 8. A priori la convergence est linéaire, nous allons démontrer que la convergence est quadratique, ceci étant une conséquence du fait que $g^{'}(\hat{x}) = 0$. Si nous développons $f$ autour du point $x_n$ nous obtenons :

$$f(x) = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n) + \frac{f^{''}(\epsilon_x)}{2}(x - x_n)^2,$$

où $\epsilon_x$ appartient à l'intervalle d'extrémité $x$ et $x_n$. en choisissons $x = \hat{x}$ dans l'égalité ci-dessus, en divisant pas $f^{'}(x_n)$ et en tenant compte du fait que $f(\hat{x}) = 0$, on obtient

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \hat{x} - x_n + \frac{f^{''}(\epsilon_x)}{2f'(x_n)}(\hat{x} - x_n)^2 = 0.$$

*Démonstration.*

en utilisant l'équation (11) nous obtenons,

$$|\hat{x} - x_{n+1}| = \frac{|f''(\epsilon_x)|}{2|f'(x_n)|}|\hat{x} - x_n|^2.$$

Il suffit maintenant de poser,

$$C = \frac{\max\limits_{x\in[\hat{x}-\epsilon,\hat{x}+\epsilon]} |f''(x)|}{2\min\limits_{x\in[\hat{x}-\epsilon,\hat{x}+\epsilon]} |f'(x)|},$$

pour obtenir

$$|\hat{x} - x_{n+1}| \leq C|\hat{x} - x_n|^2.$$

Cette dernière inégalité montre que la convergence est bien quadratique. □

### Theorème

*soit* $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ *on suppose que :*

- *i)* $f(a)f(b) < 0$,
- *ii)* *pour tout* $x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$ *(f est monotone sur* $[a,b]$ *),*
- *iii)* *pour tout* $x \in [a,b]$, $f''(x) > 0$ *ou* $f''(x) < 0$ *(*$f''$ *est de signe constant sur* $[a,b]$*),*
- *iv)* *on choisit* $x_0 \in ]a,b[$ *tel que* $f(x_0)f''(x_0) > 0$,

*alors* $\forall x_0 \in ]a,b[$, *satisfaisant (iv), la méthode de Newton-Raphson converge vers l'unique solution s de* $f(x) = 0$ *dans* $]a,b[$.

## Démonstration.

On a 4 cas possible

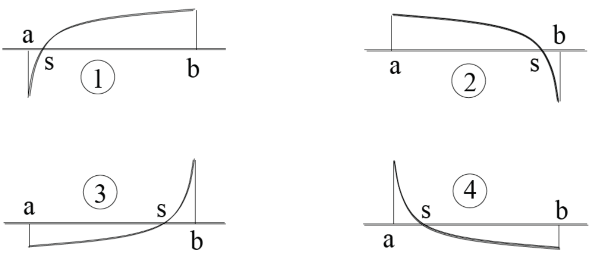


FIGURE – Méthode de Newton : les 4 cas possible

1. $f(a) < 0, \; f(b) > 0 \; f''(x) \leq 0$ sur $[a, b]$.
2. $f(a) > 0, \; f(b) < 0 \; f''(x) \leq 0$ sur $[a, b]$.
3. $f(a) < 0, \; f(b) > 0 \; f''(x) \geq 0$ sur $[a, b]$.
4. $f(a) > 0, \; f(b) < 0 \; f''(x) \geq 0$ sur $[a, b]$.

## Démonstration.

On a 4 cas possible

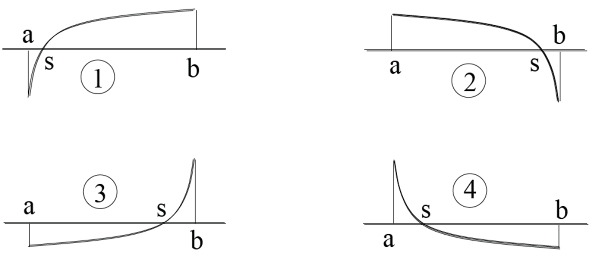


FIGURE – Méthode de Newton : les 4 cas possible

1. $f(a) < 0, \; f(b) > 0 \; f''(x) \leq 0$ sur $[a, b]$.
2. $f(a) > 0, \; f(b) < 0 \; f''(x) \leq 0$ sur $[a, b]$.
3. $f(a) < 0, \; f(b) > 0 \; f''(x) \geq 0$ sur $[a, b]$.
4. $f(a) > 0, \; f(b) < 0 \; f''(x) \geq 0$ sur $[a, b]$.

## Remarque

*On se place toujours dans le cas 1 de la démonstration précédente.*

- *Si* $f(\tilde{x}_0) < 0$, *d'après ce qui précède, la suite est convergente vers* $s$.
- *Si* $f(\tilde{x}_0) > 0$ *c-à-d* $\tilde{x}_0 > s$. $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 - \frac{f(\tilde{x}_0)}{f'(\tilde{x}_0)} < \tilde{x}_0$, *en appliquant la formule de Taylor, on a :*

$$f(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_0) + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)f'(\tilde{x}_0) + \frac{(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0)^2}{2} f''(c), \quad c \in [\tilde{x}_1, \tilde{x}_0] \tag{13}$$

$$= f(\tilde{x}_0) - \frac{f(\tilde{x}_0)}{f'(\tilde{x}_0)} f'(\tilde{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{f(\tilde{x}_0)}{f'(\tilde{x}_0)}\right)^2 f''(c) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(\tilde{x}_0)}{f'(\tilde{x}_0)}\right)^2 f''(c) < 0 \tag{15}$$

*ainsi, on a trouvé un autre point d'initialisation* $\tilde{x}_1$ *tel que* $f(\tilde{x}_1)f''(\tilde{x}_1) > 0$.

# La méthode de sécante

La méthode de Newton possède de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivé de la fonction $f$. Si la fonction $f$ est complexe, cette dérivée peut être difficile à évaluer. On contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente $f^{'}(x_n)$ de la droite tangente par l'expression suivante :

$$f^{'}(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Cela revient à utiliser la droite sécante passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ au lieu de la tangente passant par $(x_n, f(x_n))$.

La méthode de Newton possède de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivé de la fonction $f$. Si la fonction $f$ est complexe, cette dérivée peut être difficile à évaluer. On contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente $f^{'}(x_n)$ de la droite tangente par l'expression suivante :

$$f^{'}(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Cela revient à utiliser la droite sécante passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ au lieu de la tangente passant par $(x_n, f(x_n))$.

La méthode de Newton possède de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivé de la fonction $f$. Si la fonction $f$ est complexe, cette dérivée peut être difficile à évaluer. On contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente $f'(x_n)$ de la droite tangente par l'expression suivante :

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Cela revient à utiliser la droite sécante passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ au lieu de la tangente passant par $(x_n, f(x_n))$.

Graphiquement : on localise deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ tels que $f(a)f(b) < 0$ (voir la figure (6)), on trace le segment de droite $(AB)$ joignant $A$ et $B$. L'équation de cette droite est donnée par :

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

soit $A_1(x_1, 0)$ le point d'intersection de la droite $(AB)$ avec l'axe des abscisses, $A_1$ vérifie l'équation de la droite $AB$, donc

$$x_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

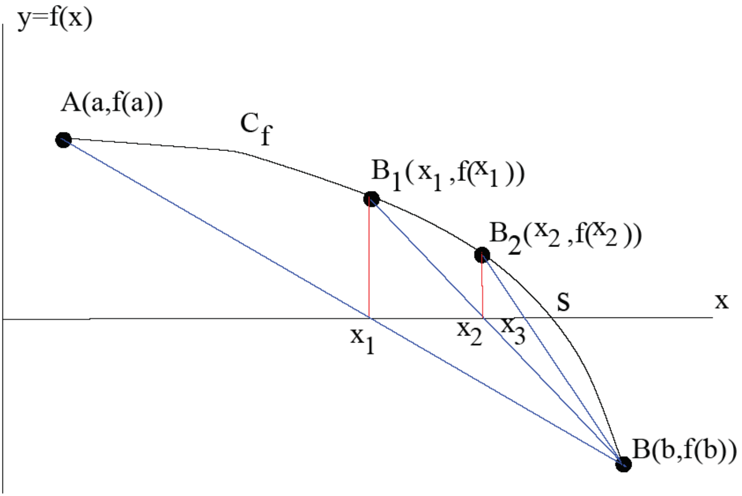


FIGURE – Principe de la méthode de la secante.

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}(x-x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est, soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1 B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1 B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}(x - x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1 B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1 B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est, soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1 B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1 B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}(x - x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1 B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1 B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est, soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1 B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1 B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}(x - x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1 B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1 B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est, soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}(x - x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1 B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1 B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}(x - x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1 B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1 B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

Considérons le point $B_1(x_1, f(x_1))$ et traçons le morceau de droite $(B_1B)$ joignant $B_1$ et $B$.
L'équation de la droite $(B_1B)$ est donnée par :

$$y = f(x_1) + \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x_1}(x - x_1)$$

soit $A_2(x_2, 0)$ le point d'intersection de la droite $(B_1B)$ avec l'axe des abscisses, $A_2$ vérifie l'équation de la droite $(B_1B)$, donc

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

la même opération répétée plusieurs fois permet d'obtenir une suite $(x_n)$ telle que

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}}$$

La suite $(x_n)$ ainsi obtenue est convergente. Dans le cas où la dérivée seconde $f''$ a un signe constant : la suite $(x_n)$ est, soit croissante majorée, soit décroissante minorée. En effet, deux cas se présentent :

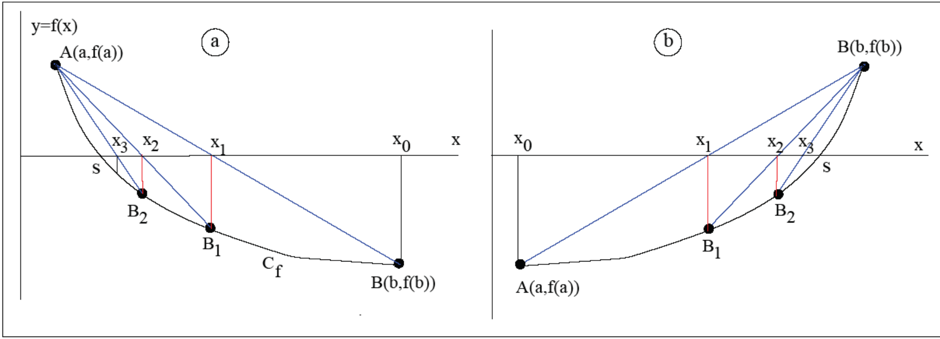


FIGURE – Méthode de la sécante avec $f''(x) > 0$ et $f(a) > 0$ figure (a), $f(a) < 0$ figure (b).

a) $f''(x) > 0$ et $f(a) > 0$ : Dans ce cas l'extrémité $a$ est fixe et les approximations successives sont :

$$\begin{cases} x_0 & = b \\ x_{n+1} & = x_n - f(x_n)\frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \end{cases}$$

d'après la figure on remarque que :

$$a < s < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0$$

Dans ce cas la suite $(x_n)$ est décroissante minorée par $a$ et est donc convergente.

- b) $f''(x) > 0$ et $f(a) < 0$ : Dans ce cas l'extrémité $b$ est fixe et les approximations successives sont :

$$\begin{cases} x_0 & = a \\ x_{n+1} & = x_n - f(x_n)\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} \end{cases}$$

d'après la figure on remarque que :

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} < ... < s < b$$

Dans ce cas de figure la suite $(x_n)$ est croissante majorée par $b$ et est donc convergente.

### Remarque

Si $f''(x) < 0$ , on se ramène au cas précédent en considérant $-f(x) = 0$.

### Theorème

Soit $f$ deux fois continûment différentiable sur un intervalle ouvert de centre $\tilde{x}$ vérifiant :

$$f(\tilde{x}) = 0, \; f'(\tilde{x}) \neq 0.$$

Alors, si $x_0$, $x_1$ sont choisis assez près de $\tilde{x}$, l'algorithme de la sécante défini par :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \; \forall n > 1$$

converge vers $\tilde{x}$ et la convergence est au moins d'ordre $p = 1,618....$

### Démonstration.

La démonstration de ce résultat suit essentiellement les mêmes étapes que celle du théorème 27. □

## Remarque

Si $f''(x) < 0$ , on se ramène au cas précédent en considérant $-f(x) = 0$.

## Theorème

Soit $f$ deux fois continûment différentiable sur un intervalle ouvert de centre $\tilde{x}$ vérifiant :

$$f(\tilde{x}) = 0, \ f'(\tilde{x}) \neq 0.$$

Alors, si $x_0$, $x_1$ sont choisis assez près de $\tilde{x}$, l'algorithme de la sécante défini par :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \ \forall n > 1$$

converge vers $\tilde{x}$ et la convergence est au moins d'ordre $p = 1,618....$

## Démonstration.

La démonstration de ce résultat suit essentiellement les mêmes étapes que celle du théorème 27. □

## Remarque

Si $f''(x) < 0$ , on se ramène au cas précédent en considérant $-f(x) = 0$.

## Theorème

Soit $f$ deux fois continûment différentiable sur un intervalle ouvert de centre $\tilde{x}$ vérifiant :

$$f(\tilde{x}) = 0, \; f'(\tilde{x}) \neq 0.$$

Alors, si $x_0$, $x_1$ sont choisis assez près de $\tilde{x}$, l'algorithme de la sécante défini par :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \; \forall n > 1$$

converge vers $\tilde{x}$ et la convergence est au moins d'ordre $p = 1,618....$

## Démonstration.

La démonstration de ce résultat suit essentiellement les mêmes étapes que celle du théorème 27. □

# Comparaison des algorithmes

| Méthodes | Avantages | Inconvénients |
| --- | --- | --- |
| **Dichotomie** | ✓ la convergence est assurée<br>✓ on a un encadrement de la solution<br>✓ un seul calcul de fonction à chaque itération. | × vitesse de convergence linéaire, donc lente<br>× sensible aux erreurs d'arrondi ; exemple : la fonction $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ s'annule théoriquement en $x = 0$ seulement. Numériquement, elle change de signe un grand nombre de fois autour de $x = 0$. |

| Méthodes | Avantages | Inconvénients |
|---|---|---|
| Point fixe | ✓ méthode d'intérêt théorique<br>✓ elle a permis de déduire l'analyse mathématique de la méthode de Newton<br>✓ elle joue un rôle considérable pour adapter des algorithmes linéaires à des situations non linéaires. | × convergence souvent difficile à réaliser en pratique<br>× certains points fixes -dits instables- ne peuvent être atteints<br>× convergence lente de type linéaire, en général. |

| Méthodes | Avantages | Inconvénients |
|---|---|---|
| Newton | ✓ converge rapidement quand elle converge<br>✓ relativement stable et peu sensible aux erreurs d'arrondis si $f'(x_n)$ n'est pas trop petit quand $n \to \infty$. | × peut diverger ou converger vers un autre zéro que celui cherché si la donnée initiale est mal choisie<br>× nécessite le calcul de la dérivée d'une fonction, ce qui est numériquement difficile si on ne la connaît pas explicitement<br>× chaque étape nécessite deux évaluations de fonctions |

| Méthodes | Avantages | Inconvénients |
|---|---|---|
| **Sécante** | ✓ nécessite une seule évaluation de fonction à chaque étape<br>✓ convergence relativement rapide, bien que moins que celle de Newton. | × comme la méthode de Newton, peut diverger si les données initiales sont mal choisies<br>× le calcul de $f(x_n) - f(x_{n-1})$ peut produire des erreurs de chute. |

### Exercice

*Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$ par les quatres méthodes.*