Cours Analyse III

Pr. Abla CHAOUNI BENABDELLAH

Benabdellahchaouni.abla@gmail.com

Introduction

Vous vous êtes peut-être déjà posé des questions comme :

- "à quoi va me servir la trigonométrie à l'avenir ?",
- "pourquoi et comment dresser un tableau de variations ?",
- "pourquoi calculer avec des nombres négatifs si je n'en ai aucune application dans mon métier plus tard ?",
- "à quoi sert concrètement la détermination d'un vecteur, une équation différentielle, le théorème de Pythagore, les séries, les intervalles de confiance, le calcul littéral ou encore l'étude graphique d'une fonction ou d'une droite ?"

Il est parfois complexe d'y apporter une réponse convaincante sans en donner des usages concrets dans la vie de tous les jours

Introduction

Quand vous faites vos courses

Les maths vous entourent dès que vous franchissez les portes automatiques de votre supermarché préféré !

- Les portes et le portique de sécurité que vous franchissez à l'entrée du magasin sont constitués de systèmes électroniques qui n'auraient jamais pu être conçus sans les maths.
- Les produits ont tous des code-barres qui indique, grâce à ses chiffres, le constructeur du produit et le code spécifique de celui-ci.
- Les produits, grâce au code-barres, seront scannés en caisse avec un laser. Il ne vous reste plus qu'à payer vos achats par chèque, carte bleue ou en espèces. T

Tous ces moyens de paiement font appel aux mathématique encore une fois !

Introduction

Pour acheter une maison ou un appartement

- L’achat d’un bien immobilier est probablement l’exemple le plus parlant et le plus concret de l’utilisation des mathématiques dans votre vie courante. Probablement aussi parce qu’un tel achat n’est pas anodin et qu’il vaut mieux être attentif et sûr de son fait, notamment mathématiquement parlant !

- Lorsque vous souhaitez emprunter, on vous propose des échelons de remboursement à prendre en compte avec un taux d’intérêt, parfois fixe, parfois variable mais surtout différent de l’horizon de votre emprunt : le taux est en effet différent si vous empruntez à 2 ans, à 10 ans, à 25 ans ou à 30 ans.

Introduction

Pour faire du bricolage

- Que ce soit pour des petits ou grands travaux, les maths seront vos meilleures alliées au moment du bricolage !

- Que vous deviez mélanger divers produits ou que vous deviez calculer des angles pour poser une cloison, vous devez connaître les règles de la règle de 3 mais aussi savoir comment on calcule un angle (cosinus, sinus, angle droit), savoir déterminer l'hypoténuse d'un triangle, prévoir le nombre de planches pour réaliser une étagère ou encore être à l'aise avec les surfaces en mètres carré ou les volumes en mètres cubes

Introduction

Pour vos déplacements

- Bien sûr, de nos jours, il y a le GPS intégré dans nos voitures ou sur nos smartphones et déjà là, les maths sont présentes !

- Mais avant toute cette technologie, il y avait la boussole, le rapporteur, le sextant, l'astrolabe : c'est en utilisant la méthode de triangulation que l'on peut déterminer à quelle distance on se situe par rapport à un point fixe ou dans quelle direction on peut se diriger !

- La triangulation (aujourd'hui perfectionnée avec les satellites) avec ses calculs d'angles et de distances sont toujours très utiles en cartographie et en navigation…

Introduction

Pour vos voyages

- En partant à l'étranger, vous allez vous rendre compte à quel point vous auriez dû écouter plus souvent les cours de maths terminale s.

- En arrivant à destination il vous faudra échanger votre argent avec la monnaie locale et bien retenir la méthode de conversion. Les galipettes mathématiques seront votre quotidien en voyage. Dès que vous devrez acheter quelque chose il faudra utiliser le taux de change pour savoir à combien vous revient réellement votre achat.

- Mais la conversion de la monnaie n'est pas la seule à effectuer à l'étranger. Dans une moindre mesure, il faudra également peut-être convertir les pouces en mètres, les livres en grammes ou les degrés Fahrenheit en degré Celsius. Tout un processus qui finit par devenir avec le temps mais qui vous demandera de l'entraînement.

Introduction

- **En psychologie et en sociologie :** tous les résultats sont analysés et comparés grâce à des méthodes mathématiques ou statistiques !
- **En biologie :** les maths sont utiles pour trouver le nombre de molécules produites dans une réaction chimique
- **En couture :** les maths se retrouvent là aussi pour utiliser la symétrie axiale, pour effectuer des découpes d'angles, etc.
- **Au théâtre :** les maths vous aident à vous repérer dans l'espace mais aussi à prévoir la durée d'une pièce, ou calculer l'intensité d'une lumière.
- **Aux échecs :** avoir un esprit d'anticipation, calculer le déplacement de vos pièces sur l'échiquier.
- **En plongée sous-marine :** pour connaître régulièrement ses constantes, pour ne pas se mettre en danger, pour évaluer la profondeur, la quantité d'air restant, pour évaluer le temps à attendre avant de replonger, il faut avoir un minimum d'esprit mathématique et logique.

Introduction

- L’enseignement des mathématiques contribue à former un être humain méthodique, inventif et critique, doué de la faculté de raisonner de façon correcte et autonome.

- Dans cette optique, il convient d’encourager la pensée logique et abstraite, de développer le sens de l’organisation des connaissances et l’habitude de la rigueur.

- Pour pouvoir distinguer le vrai du faux, pour participer au développement harmonieux de la société, on a besoin de chercheurs créatifs, critiques, méthodiques, rigoureux et intuitifs, toutes qualités que l’étude des mathématiques contribue à développer

Introduction

« Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc.

Elles se divisent en mathématiques pures et en mathématiques mixtes:

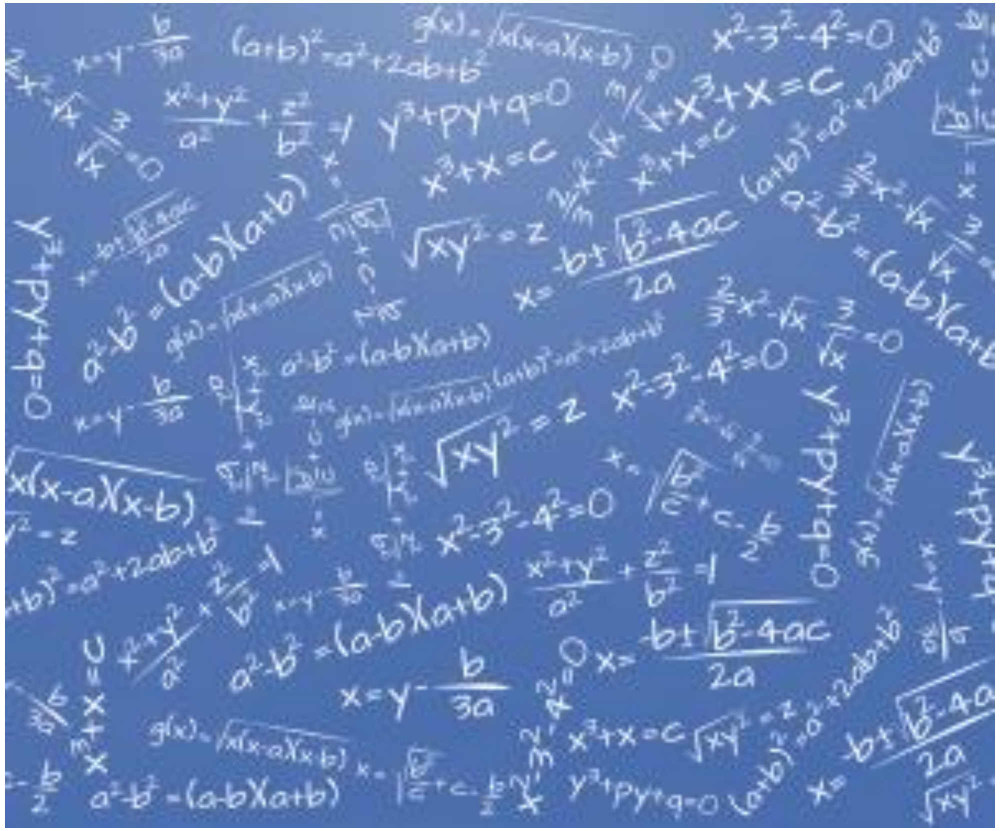
- **Les mathématiques pures** considèrent la grandeur d'une manière simple, générale et abstraite … Elles comprennent :

1. L'arithmétique ou l'art de compter
2. La géométrie qui apprend à mesurer l'étendue
3. L'analyse, science des grandeurs en général
4. La géométrie mixte, combinaison de la géométrie ordinaire et de l'analyse

Introduction

- **Les mathématiques mixtes** empruntent de la physique …

1. La mécanique, science de l’équilibre et du mouvement des corps solides
2. L’hydrodynamique qui considère l’équilibre et le mouvement des corps liquides
3. L’acoustique ou la théorie des sons
4. L’optique ou la théorie des mouvements de la lumière
5. L’astronomie, science du mouvement des corps célestes. »



Introduction

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin(x/3)}{x/3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin(x/3)}{x/3}\,\frac{\sin(x/5)}{x/5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Mathématiques Pures

L'analyse, science des grandeurs en général

Plan du cours

Introduction

- Chapitre I: Suites et séries numériques
- Chapitre II: Suites et séries de fonctions
- Chapitre III: Fonctions de plusieurs variables
- Chapitre IV: Intégrales Multiples

Conclusion

Chapitre I: Suites et séries numériques

Chapitre I: Suites et séries numériques

Introduction

- I- Suites numériques: rappels et compléments
- II- Séries numériques: généralités
- III- Séries à termes positifs
- IV- Séries à termes quelconques

Introduction

- La notion de suite est présente des qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, à l’époque babylonienne, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou, plus récemment en Egypte au 1er siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Heron d'Alexandrie.

- Quelques siècles plus tard, des mathématiciens comme Bernoulli, Newton, De Moivre, Stirling et Wallis, se sont intéressés aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est a Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle.

- Dans la seconde moitie du 20eme siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs a donné un second soue à l’étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis.

- L'usage des suites et des séries, en particulier la série géométrique, est largement répandu en mathématiques financières.

- Un ordinateur ne sait faire que les quatre opérations élémentaires.
- Comment calculer les valeurs des différentes fonctions avec seulement les opérations élémentaires? Quelles sont les erreurs, les précisions ?
- On utilise des séries pour cela.
- On peut aussi les utiliser pour intégrer certaines fonctions.
- La notion de série repose sur la notion de suite.
- Nous allons étudier la convergence des séries infinies.
- Ceci permettra ensuite d'étudier les séries de Taylor pour la représentation des fonctions.

I-1: Définition d'une suite

Definition

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$n \to u(n) \qquad \text{souvent noté } u_n.$$

La suite sera notée u *ou bien* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. u_n *s'appelle le terme général de la suite.*

I-1: Définition d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième, u_2 le troisième, etc... Enfin, on note u_n le terme général et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite. En les choisissant les uns après les autres, on peut construire n'importe quelle suite de nombres. Par exemple,

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 2, u_5 = 14, \ldots$$

I-1: Définition d'une suite

Il y a deux façons de construire une suite logique :

- définition explicite.
  On donne une expression de u_n en fonction de n.
  Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n - 4$
- suites récurrentes.
  On se donne la règle permettant de passer d'un terme au suivant. Le terme u_n s'exprime en fonction de u_{n-1}.
  Un procédé classique est le suivant :

$$(u_n) \; : \; \begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

I-1: Définition d'une suite

Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois,on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également se donner le premier terme.

Exemples :

- $(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = u_{n-1} + 2 \end{cases}$

  Ici, on a $u_1 = 3,\ u_2 = 3 + 2 = 5,\ u_3 = 5 + 2 = 7$, etc...

I-2: Sens de variation d'une suite

Proposition

- *Une suite u est stationnaire s'il existe un entier p tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+p} = u_p.$$
- *Une suite u est croissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \geq u_n.$$
- *Une suite u est décroissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leq u_n.$$

I-2: Sens de variation d'une suite

Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. $u_n = \dfrac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = \dfrac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
7. $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
8. $u_n = \dfrac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

I-3: Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

- *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée ; autrement dit s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

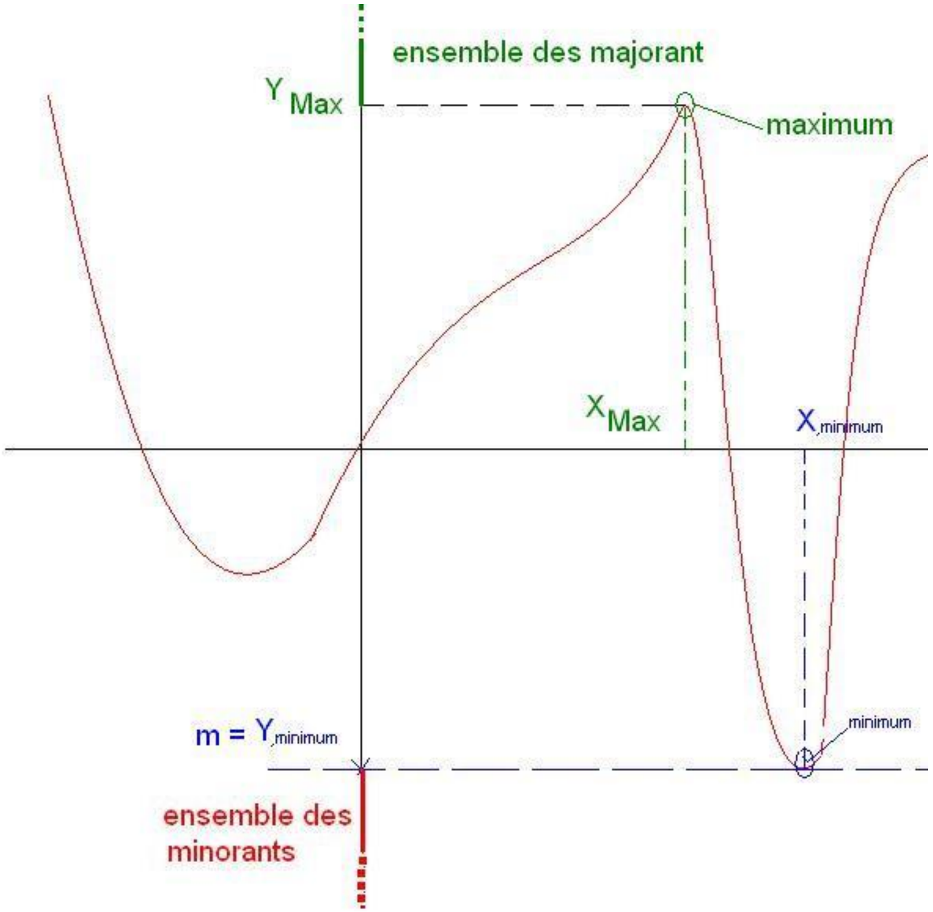
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Définition Maximum minimum

1. Un réel b est un maximum de A si $b \in A$ et $\forall x \in A$, $x \leq b$: autrement dit si $b \in A$ et b majore A. Notation : $b = max(A)$. On l'appelle aussi le plus grand élément de A.
2. Un réel a est un minimum de A si $a \in A$ et $\forall x \in A$, $x \geq a$: autrement dit si $a \in A$ et a minore A. Notation : $a = min(A)$. On l'appelle aussi le plus petit élément de A.

Définition Borne supérieure inférieure

1. Soit A une partie **majorée**. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément (un minimum), alors cet élément est appelé borne supérieure de A et est notée $sup(A)$.
   $sup(A)$ est donc le plus petit majorant de A.
2. Soit A une partie **minorée**. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément (un maximum), alors cet élément est appelé borne inférieure de A et est notée $inf(A)$.
   $inf(A)$ est donc le plus grand minorant de A.



Assez souvent, pour des raisons pratiques, on utilisera plutot la définition suivante :

$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \exists A > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq A.$$

- La suite (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée.
- La suite (v_n) : $v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ est bornée.
- La suite (w_n) : $w_n = \sin(n^2 - n + 1)$ est bornée.
- la suite (x_n) : $x_n = n^2$ n'est pas bornée.

I-4: Convergence d'une suite

Definition

Une suite u est convergente si elle admet une limite l quand n tend vers l'infini.
sinon on dit la la suite est divergente.

Remarque : Si une suite est convergente, la limite est unique.
On note $\lim_n u_n = l$.

Formellement, une suite (u_n) admet comme limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans cette définition, $\forall \epsilon > 0$ se lit “pour ϵ aussi petit que l’on veut”et $|u_n - \ell| < \epsilon$ se lit “la distance entre u_n et ℓ est plus petite que ϵ”.
Autrement dit, cette définition nous dit que quitte à prendre n assez grand, la suite (u_n) se rapproche de ℓ aussi près que l’on veut.

I-4: Convergence d'une suite (exemples)

- la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

a ses termes qui se rapprochent de 0 quand n grandit.On dit alors que (u_n) a pour limite 0 et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

I-4: Convergence d'une suite (exemples)

- Contrairement à la suite (u_n) précédente, la suite (v_n) définie par $v_n = n^2$ ne se rapproche d'aucun nombre. Les termes v_n sont de plus en plus grands. Dans ce cas, on note
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

I-4: Convergence d'une suite (exemples)

- Enfin la suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$, prend alternativement les valeurs 1 et -1.Une telle suite n'a donc pas de limite.

I-4: Convergence d'une suite

Proposition

On a :

1. *Toute suite croissante et majorée, converge.*
2. *Toute suite décroissante et minorée, converge.*

I-5: Limites et inégalités

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes et soient ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. Si $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Remarque : si $u_n < v_n$ pour tout n, on peut avoir $\ell_1 = \ell_2$.

Penser à $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

I-5: Limites et inégalités

Théorème

Soient (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites telles que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$
2. (u_n) *et* (w_n) *sont convergentes et* $\lim_n u_n = \lim_n w_n = \ell.$

Alors la suite (v_n) *converge également et* $\lim_n v_n = \ell.$

Exemple d'application : $u_n = \frac{|cos(n)|}{n}$
(Utiliser l'encadrement $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$)

I-6: Suites arithmétiques (définition)

Definition

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant ***en ajoutant*** *la même quantité r (raison) alors la suite est dite arithmétique.*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

I-6: Suites arithmétiques (terme général)

Théorème

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

$$u_n = u_0 + nr$$

De manière plus générale, le n ième terme s'obtient à partir du p iéme en ajoutant $n-p$ fois la raison r :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

I-6: Suites arithmétiques (propriétés élémentaires)

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

- *Si $r > 0$, la suite u est croissante.*
- *Si $r < 0$, la suite u est décroissante.*
- *Si $r = 0$, la suite u est stationnaire.*

I-6: Suites arithmétiques (propriétés élémentaires)

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

- *Si $r > 0$, la suite u diverge vers $+\infty$.*
- *Si $r < 0$, la suite u diverge vers $-\infty$.*
- *Si $r = 0$, la suite u converge vers u_0.*

I-6: Suites arithmétiques (formule sommatoire)

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétiques de raison r. Posons

$$S_N = \sum_{k=0...N} u_k.$$

Alors, pour tout n, on a :

$$S_n = \frac{(N+1)(u_0+u_N)}{2} = \frac{(N+1)(2u_0+Nr)}{2}.$$

I-7: Suites géométriques (définition)

Definition

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant ***en multipliant*** *par la même quantité q (raison) alors la suite est dite géométrique.*

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

I-7: Suites géométriques (terme général)

Théorème

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

De manière plus générale, le n iéme terme s'obtient à partir du p iéme en multipliant $n-p$ fois la raison q :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

I-7: Suites géométriques (propriétés élémentaires)

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

- *Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$, la suite u est stationnaire égale à 0.*
- *Si $u_0 \neq 0$ et $q = 1$, la suite u est stationnaire égale à u_0.*
- *Si $u_0 \neq 0$, $q \neq 1$ et $q > 0$ la suite est monotone :*
  - *croissante si $u_0 \times (q - 1) > 0$,*
  - *décroissante sinon.*
- *Si $u_0 \neq 0$, $q \neq 1$ et $q < 0$ la suite est alternée.*

I-7: Suites géométriques (propriétés élémentaires)

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

- *Si $q < -1$, la suite u diverge (oscillation de signe et $|u_n|$ tend vers $+\infty$).*
- *Si $|q| < 1$, la suite u converge vers 0.*
- *Si $q > 1$, la suite u tend vers $\pm\infty$, selon le signe de u_0.*
- *Si $q = 1$, la suite u converge vers u_0.*
- *Si $q = -1$, la suite est alternée (elle vaut $-u_0$ puis u_0, etc...) elle ne converge pas.*

I-7: Suites géométriques (fonction sommable)

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Posons

$$S_N = \sum_{k=0\ldots N} u_k.$$

Alors, pour tout n, on a :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

TD 1