Cours Analyse III

Pr. Abla CHAOUNI BENABDELLAH

Benabdellahchaouni.abla@gmail.com

Chapitre II: Suites et séries de fonctions

Pr. Abla CHAOUNI BENABDELLAH

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à la convergence de suites de fonctions définies sur un même domaine non vide D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le module sur $\mathbb{C}$ est noté $|\cdot|$, c'est-à-dire $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1 – convergence simple

Soit f une application de D dans $\mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge simplement*** vers f si pour tout x de D, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit aussi que f est la ***limite simple*** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout x de D, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N,\ \text{ on ait } |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

⚠ **Attention** : dans l'expression ci-dessus, l'entier N dépend de x dans D (et de ε).

Exemple. Considérons l'intervalle $[0,+\infty[$ et la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : x \mapsto x^n$.

- Si $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$;
- Si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$;
- Si $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$.

On en déduit que la suite (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

On peut déjà faire une première observation : bien que toutes les fonctions f_n soient continues sur $[0,1]$, leur limite simple f présente une discontinuité en 1. C'est là un des défauts de la convergence simple, sur lequel on reviendra : les propriétés locales (continuité, limite, ...) ne sont pas préservées par ce mode de convergence.

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n : x \to \cos\left(\frac{nx}{1+n}\right)$$

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n : x \to \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

En l'absence d'hypothèses supplémentaires, les seules propriétés préservées par la convergence simple sont celles qui ne font pas intervenir le comportement local des fonctions, comme par exemple :

Proposition 1.1 — *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes qui converge simplement sur l'intervalle* I *vers une fonction f. Alors f est aussi croissante sur* I.

Proposition 1.2 — *Soit (f_n) une suite de fonctions positives qui converge simplement sur l'intervalle* I *vers une fonction f. Alors f est aussi positive sur* I.

Pour obtenir des propriétés plus fortes, il faut adopter une définition de la convergence plus exigeante.

→ **Convergence uniforme**

II- Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Dans le chapitre relatif aux espaces vectoriels normés, nous avons donné un cadre général pour définir la convergence d'une suite : choisir une norme $\|\cdot\|$ et dire que la suite (f_n) converge vers f lorsque $\lim \|f_n - f\| = 0$. En dimension finie, nous avons admis que le choix de la norme n'importe pas : toutes les normes sont équivalentes. Mais ce n'est pas le cas dans les espaces fonctionnels, qui sont de dimensions infinies. Ainsi, pour une suite de fonctions, *le choix de la norme revêt une importance particulière*. Nous allons choisir la norme uniforme, définie par :

$$\boxed{\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in \mathrm{I}\right\}}$$

Remarque. Pour que cette définition ait un sens, il est nécessaire que f soit bornée. Ainsi, ceci n'est une norme que sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I. Il reste cependant possible de mesurer la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ entre deux fonctions non bornées à condition que la fonction $f - g$ soit bornée.

Définition 2 – convergence uniforme

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément*** vers f sur D si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On dit aussi que f est la ***limite uniforme*** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N,\ \text{ on ait : } \forall x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

⚠ **Attention** : dans l'expression ci-dessus, l'entier N ne dépend pas de x dans D (il dépend seulement de ε). On observera la différence avec la définition 1.

On peut noter $f_n \xrightarrow{CVU} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur D).

Proposition 3 – la convergence uniforme entraine la convergence simple

Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction f, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.

Preuve

Soit $z_0 \in D$.

On a $0 \leq |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|$. *Donc si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0$, *d'après le théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(z_0) - f(z_0)| = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$. $\square$

- Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx}$$

- Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,1]$ avec

$$f_n(x) = x^n (ln(x))^2$$

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

Proposition 0.2.

S'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur A

Exercice. 0.9 . Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

Exercice. 0.10 . Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n(x) = x^n$$

III- Convergence simple d'une série de fonctions

On considère un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On donne les définitions de ce chapitre dans le cas de fonctions $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$, mais on peut généraliser sans problème dans le cas de fonctions $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ ou $f : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{E}$ où E est un evn. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module ou la norme.

DÉFINITION 6.3 **Série de fonctions**
Soit $(f_n) \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On appelle *série de fonctions de terme général* f_n la suite (S_n) de terme général

$$\mathrm{S}_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array} \right.$$

On note $\sum f_n$ une telle série de fonctions. La fonction S_n s'appelle la *nième somme partielle* de la série $\sum f_n$.

DÉFINITION 6.4 Convergence simple d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$ fixé, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

Si $\sum f_n$ est simplement convergente sur I, on définit alors la fonction

$$\mathrm{S} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

1. La fonction S s'appelle la *somme de la série de fonctions* et est notée $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathrm{S} - \mathrm{S}_n$ s'appelle le *reste d'ordre n* de la série de fonctions et est noté

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ et calculons sa somme, ses sommes partielles et son reste d'ordre n.

La série converge simplement sur $]-1,1[$ et la somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

ses sommes partielles :

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

et son reste d'ordre n :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

- Etudier la convergence simple de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,1]$ avec

$$f_n(x) = x^n \ln(x)$$

- Etudier la convergence simple de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n(x) = \frac{(-x)^n}{n+1}.$$

- Etudier la convergence simple de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ avec

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)}$$

IV- Convergence absolue et uniforme d’une série de fonctions

DÉFINITION Convergence absolue d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge absolument* sur I si et seulement si pour tout $x \in$ I fixé, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge .

DÉFINITION Convergence uniforme d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément* sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sommes partielles) converge uniformément sur I.

Etudier la convergence absolue de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Etudier la convergence absolue de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n(x) = \frac{(-x)^n}{(n+1)^2}$$

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,1]$ avec

$$f_n(x) = x^n \ln(x)$$

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ avec

$$f_n(x) = \frac{(-x)^n}{n+1}$$

PROPOSITION 6.18 **CV uniforme $\Longrightarrow$ CV simple**

$\sum f_n$ CV uniformément vers S sur I $\Longrightarrow$ $\sum f_n$ CV simplement vers S sur I.

PROPOSITION 6.19 **Une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions**

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Démonstration *Si $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur* I *alors la la suite* (S_n) *de ses somme partielles converge uniformément vers f et la suite $f_n = S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur* I.

Remarque 6.22 On se sert souvent de cette proposition pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément, il suffit de montrer que la suite numérique $\|f_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0. Comme pour les séries numériques, si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 6.9 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathrm{I} = [1, +\infty]$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx}$. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $|f_n(x)|$ est décroissante et de limite nulle donc par le critère spécial $\sum f_n(x)$ est convergente. Donc $\sum f_n$ est simplement convergente sur I. Par ailleurs, toujours grâce au critère spécial, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n}$$

donc $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par le critère de convergence uniforme, la série converge uniformément sur I.

DÉFINITION 6.7 **Convergence normale**

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ bornée sur I *converge normalement* sur I, si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$$

converge où $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathrm{I}} |f_n(x)|$.

THÉORÈME 6.22 **Comparaison des modes de convergence**

$$\sum f_n \text{ CV normalement sur I} \Longrightarrow \begin{cases} \sum f_n & \text{CV uniformément sur I} \\ \sum f_n & \text{CV absolument sur I} \end{cases} \Longrightarrow \sum f_n \text{ CV simplement sur I.}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \sum f_n \ CVA \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\sum f_n \ CVN \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum f_n \ CVS \\
 & \sum f_n \ CVU \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

V- Convergence uniforme et propriétés

THÉORÈME **La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue**

Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$ et une suite $(f_n) \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur X et $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Soit un point $x_0 \in A$. On suppose que :

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue au point x_0.

H2 La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f.

Alors la fonction f est continue au point x_0.

Démonstration *Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$. Posons $n = N$. Puisque la fonction f_n est continue au point x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in X$, $|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon/3$. Soit alors $x \in X$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$. Majorons :*

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \Big|[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x_0)] + [f_n(x_0) - f(x_0)]\Big| \\
&\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Exemple 6.3 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$$

Études la convergence simple et uniforme de cette suite. On sait, d'après l'exemple 6.1 qu'elle converge simplement vers la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Il n'y a pas convergence uniforme puisque les fonctions f_n sont continues au point 1 mais pas la fonction f.

Exemple 6.4 Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Exemple 6.4 Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{cvs}} f$ où f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
2. On a $f_n(n) = n^2 \sin \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc on ne peut avoir convergence uniforme de f_n sur $\mathbb{R}$ vers f.
3. Posons $K = [-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha > 0$. Alors, en utilisant l'inégalité classique $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|$, il vient pour tout $x \in K$,

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{\left|x^2\right|}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{\alpha}{n}$$

donc $\|f - f_n\|_{\infty,K} \leqslant \frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que f_n converge vers f uniformément sur tout segment $K = [-\alpha, \alpha]$. Si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ alors $[a, b] \subset [-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha = \max(|a|, |b|)$ et donc on a aussi convergence uniforme de f_n vers f sur $[a, b]$. En conclusion, f_n converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Théorème 23 – convergence uniforme et continuité en un point

Soient $a \in D$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions définies sur D. Supposons :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a,
2. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D.

Alors, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, la fonction S est continue en a.

Montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+sin(nx)}{3^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1,1[$

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin(nx)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

- On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$$

Pour $n \geq 2$

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions f_n sont continues donc f est continue.

- On pose

$$g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Pour $n \geq 2$

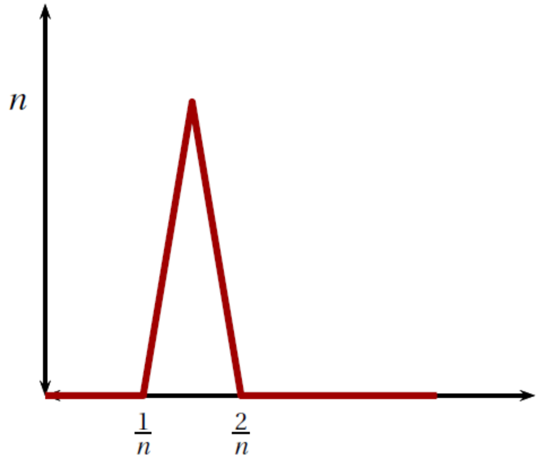
$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général g_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions g_n sont continues donc g est continue.

- On pose
$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+1}$$
Il s'agit d'une série alternée la suite $\left(\frac{1}{nx+1}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 car $x > 0$ donc la série de fonctions de terme général h_n converge simplement vers 0. Grâce aux TSSA nous allons montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a,b]$ avec $a > 0$. Le reste vérifie
$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)x+1} \leq \frac{1}{(n+1)a+1}$$
Donc
$$\sup_{x\in[a,b]} \left| h(x) - \sum_{n=0}^{N} h_n(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)a+1} \to 0$$
Lorsque $n \to +\infty$
Cela montre que la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$.
En un point $x > 0$, on choisit a et b tels que $a < x < b$, la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$ et les fonctions h_n sont continues donc h est continue en x et ceci pour tout $x > 0$

On a souvent à étudier la limite d'une suite d'intégrales. Par exemple, chercher la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{n^4+x^4}{(n+x)^4}\,\mathrm{d}x$$



La tentation est grande de dire qu'à x fixé,

$$\frac{n^4+x^4}{(n+x)^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et « donc » que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$. Ce « raisonnement » peut être faux comme le montre l'exemple suivant.
Considérons la suite de fonctions (f_n) continues sur $[0,1]$ définies selon la figure $\boxed{6.5}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x$$

En effet, $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$ et on a montré auparavant que (f_n) convergeait simplement (et pas uniformément...) vers la fonction nulle. Donc $\displaystyle\int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x = 0$.

THÉORÈME **Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues**

On considère une suite de fonctions $(f_n) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que

H1 La suite de fonctions (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sur le segment $[a,b]$.

Alors la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, et

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration *Comme (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, f est continue sur $[a,b]$ et donc intégrable sur $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant (b-a)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de convergence uniforme, on peut donc inverser limite et intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

On peut se servir de ce théorème pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^2 x^n(1-x) \end{array}\right.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. Calculer pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire que la convergence n'est pas uniforme.
4. Calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ et retrouver le résultat.

1. *Si* $x = 1$, $f_n(1) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Si* $x \in [0,1[$, *la suite géométrique* (x^n) *converge vers* 0 *et* $x^n = o(n^2)$. *Donc* $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Par conséquent, la suite de fonctions* (f_n) *converge vers la fonction nulle* f.
2. On calcule $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. *Il ne peut pas y avoir convergence uniforme de* (f_n) *vers* f *car alors d'après le théorème précédent, on aurait* $\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. On étudie les variations de f_n :

$$f_n'(x) = n^2 x^{n-1}[n-(n+1)x]$$

et donc

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$$

On a donc $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et il n'y a pas convergence uniforme.

Théorème 25 – convergence uniforme et intégration sur un segment

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues (ou continues par morceaux) de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$. Alors :

(i) la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$,

(ii) la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \right)$ converge dans $\mathbb{C}$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\mathrm{d}t.$$

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n.3^n}$

Montrer que $\forall x \in]-1,1[, ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

et $\forall x \in]-1,1[, ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = 1$

THÉORÈME **Dérivation et convergence uniforme sur tout segment**

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$.

H3 La suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur tout segment $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$ vers une application $g : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$.

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$.
2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I
3. $f' = g$.

THÉORÈME 6.29 ♡ **CV uniforme et dérivation, théorème de dérivation terme à terme**

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I.

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur I.

H3 La série de fonctions $\sum f_n'$ converge *uniformément* sur I

Alors :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$;
2. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
3. On peut inverser dérivation et signe somme : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ avec $]0, +\infty[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

1. Il s'agit d'une série alternée, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant, d'après le TSSA, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général f_n converge simplement.
2. $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ donc

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{(n+x)^2} < \frac{1}{n^2}$$

$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur $]0, +\infty[$, donc uniformément sur $]0, +\infty[$, comme les fonctions f_n sont dérivable, le théorème de dérivation des série entraine que la somme est dérivable et que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$