Table de matière

- On dispose d'une fonction f, connue par exemple uniquement par ses valeurs en certains points,
- On cherche à remplacer ou à approcher f par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme.
- Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points donnés,
- Et l'interpolation par morceaux, en particulier les fonctions splines où l'expression du polynôme est différente sur chaque sous-intervalle.

- On dispose d'une fonction f, connue par exemple uniquement par ses valeurs en certains points,
- On cherche à remplacer ou à approcher f par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme.
- Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points donnés,
- Et l'interpolation par morceaux, en particulier les fonctions splines où l'expression du polynôme est différente sur chaque sous-intervalle.

- On dispose d'une fonction f, connue par exemple uniquement par ses valeurs en certains points,
- On cherche à remplacer ou à approcher f par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme.
- Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points donnés,
- Et l'interpolation par morceaux, en particulier les fonctions splines où l'expression du polynôme est différente sur chaque sous-intervalle.

- On dispose d'une fonction f, connue par exemple uniquement par ses valeurs en certains points,
- On cherche à remplacer ou à approcher f par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme.
- Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points donnés,
- Et l'interpolation par morceaux, en particulier les fonctions splines où l'expression du polynôme est différente sur chaque sous-intervalle.

Polynôme d'interpolation d'une fonction

On suppose connues les valeurs d'une fonction f en un nombre fini de points distincts selon le tableau suivant :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

Un tel tableau peut être le résultat de mesures effectuées expérimentalement.
On se propose alors d'approcher f par une fonction simple de type polynomial P_n, de degré inférieur ou égal à n et telle que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

On montrera que P_n existe et est unique. On l'appelle le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$.

La représentation graphique de cette fonction P_n est une courbe passant par les $n+1$ points de coordonnées

$$(x_0, f_0),\ (x_1, f_1),\ \cdots,\ (x_n, f_n).$$

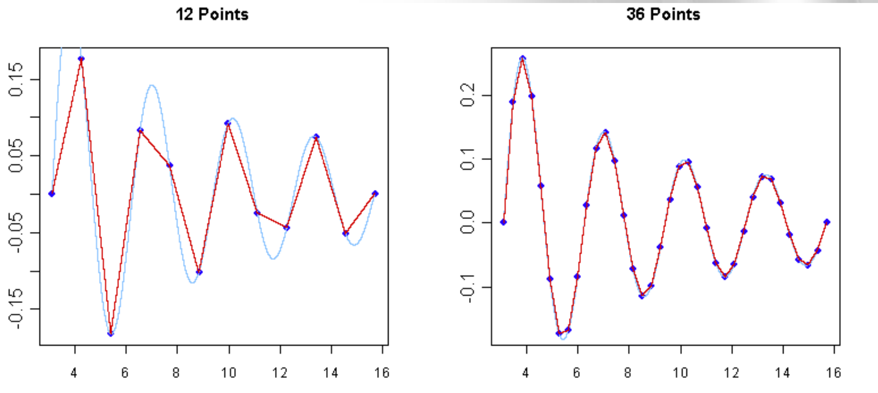


FIGURE – Exemple d'interpolation polynomial

Lorsqu'on travaille sur un intervalle $[a, b]$ l'interpolation polynômiale :

- permet de donner une approximation numérique $P_n(\alpha)$ de $f(\alpha)$ pour α appartenant à $[a, b]$ et $\alpha \neq x_i, \; i = 0, ..., n$. On dira qu'on a interpolé,
- sert à construire des formules explicites utiles pour le calcul approché d'intégrales.

Théorème d'existence et d'unicité de P_n

Theorème

Il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Démonstration.

Démontrons ce résultat pour $n = 2$. Le cas général se fait d'une manière similaire. En écrivant

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

et

$$P_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 2,$$

on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 & = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 & = f_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 & = f_2 \end{cases}$$

Theorème

Il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Démonstration.

Démontrons ce résultat pour $n = 2$. Le cas général se fait d'une manière similaire. En écrivant

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

et

$$P_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 2,$$

on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 & = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 & = f_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 & = f_2 \end{cases}$$

Démonstration.

qu'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

□

Démonstration.

Le déterminant de la matrice de ce système (appelé déterminant de Vandermonde) se calcule sous Matlab :

```
>> syms x0 x1 x2;
>> A=[1 x0 x0^2 ; 1 x1 x1^2 ; 1 x2 x2^2] ;
>> factor (det(A))

ans =

(-x2+x0)*(-x2+x1)*(x1-x0)
```

Ce déterminant est différent de zéro puisque les points x_i sont distincts. D'où l'existence et l'unicité des a_i. $\square$

Remarque

Dans le cas général, on montre que la résolution du système, permettant le calcul des coefficients du polynôme d'interpolation, nécessite un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(n^3)$. On utilisera plutôt d'autres méthodes, moins coûteuses en nombre d'opérations dès que n devient grand. Par exemple, l'utilisation des polynômes de Lagrange nécessite un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(n^2)$.

Avant de présenter les différentes méthodes d'interpolation, on rappelle de Théorème important suivant :

Theorème (Rolle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que

$$f(a) = f(b).$$

Alors, il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Avant de présenter les différentes méthodes d'interpolation, on rappelle de Théorème important suivant :

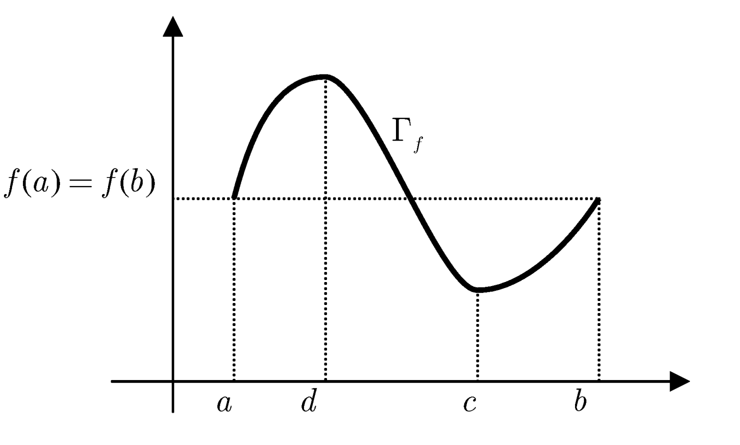
Theorème (Rolle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que

$$f(a) = f(b).$$

Alors, il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$


$f(a) = f(b)$
Γ_f
a
d
c
b

Les polynômes de Taylor

Theorème

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$. On suppose que $f \in C^{n+1}([a, b])$ et $x_0 \in [a, b]$. Si $x \in [a, b]$, alors il existe un élément c entre x_0 et x tel que

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x).$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

P_n est le polynôme qui peut être utilisé comme approximation de f, $E_n(x)$ est l'erreur commise lors de cette approximation.

Démonstration.

Voir le cours. □

- Exemple d'estimation de l'erreur :

Q : Donner une approximation de $exp(1)$ de l'ordre de 10^{-13} par le polynôme de Taylor ?

Nous allons montré dans cet exemple pourquoi nous avons eu besoin de prendre $n = 15$ pour obtenir une approximation de e (c-à-d fonction exponentielle au point 1) par S_{15} avec une précision de 10^{-13} avec $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$.
$f(x) = e^x$, $f^n(x) = e^x$, le développement de Taylor au point $x_0 = 0$ à l'ordre 15 de f est donné par $f(x) = P_{15}(x) + E_{15}(x)$.

$$P_{15}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{15}}{15!}$$

$P_{15}(1) = S_{15}$. L'erreur est donnée par :

$$E_{15}(x) = \frac{f^{16}(c)x^{16}}{16!}, \quad c \in]0, 1[$$

A partir de $f^{16}(c) = e^c$ et de $1 < e^c < e < 3$, on obtient une majoration de l'erreur (pour $x = 1$) :

- Exemple d'estimation de l'erreur :

Q : Donner une approximation de $exp(1)$ de l'ordre de 10^{-13} par le polynôme de Taylor ?

Nous allons montré dans cet exemple pourquoi nous avons eu besoin de prendre $n = 15$ pour obtenir une approximation de e (c-à-d fonction exponentielle au point 1) par S_{15} avec une précision de 10^{-13} avec $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.
$f(x) = e^x$, $f^n(x) = e^x$, le développement de Taylor au point $x_0 = 0$ à l'ordre 15 de f est donné par $f(x) = P_{15}(x) + E_{15}(x)$.

$$P_{15}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{15}}{15!}$$

$P_{15}(1) = S_{15}$. L'erreur est donnée par :

$$E_{15}(x) = \frac{f^{16}(c)x^{16}}{16!}, \quad c \in]0, 1[$$

A partir de $f^{16}(c) = e^c$ et de $1 < e^c < e < 3$, on obtient une majoration de l'erreur (pour $x = 1$) :

Remarque

Il est évident que :

i) la précision du polynôme de Taylor est d'autant meilleure que n est grand,

ii) la précision de chaque polynôme de Taylor décroît lorsque x est loin de x_0.

Un compromis entre (i) et (ii) et de choisir :

- n assez grand,
- restreindre le domaine de validité de l'approximation de f par P_n a un voisinage de x_0.

Remarque

Il est évident que :

i) *la précision du polynôme de Taylor est d'autant meilleure que n est grand,*

ii) *la précision de chaque polynôme de Taylor décroît lorsque x est loin de x_0.*

Un compromis entre (i) et (ii) et de choisir :

- n assez grand,
- restreindre le domaine de validité de l'approximation de f par P_n a un voisinage de x_0.

Si on choisit x dans un intervalle de centre x_0 et de rayon R (c-à-d $|x - x_0| \leq R$), on obtient la majoration de l'erreur suivante :

$$|E_n(x)| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \tag{16}$$

où $\quad \max\{|f^{n+1}(x)| \leq M : \ x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\}.$

On remarque alors que :

- Si n est fixé, et $|f^{n+1}(t)|$ est bornée sur $[x_0 - R, x_0 + R]$, le majorant de l'erreur (16) est donc proportionnelle à $R^{n+1}/(n+1)!$ et décroît lorsque $R \to 0$.
- Si R est fixé, le majorant de l'erreur (16) est inversement proportionnel à $(n+1)!$ et tend vers zéro lorsque n devient suffisamment grand. Ceci est schématisé dans la figure suivante :

Si on choisit x dans un intervalle de centre x_0 et de rayon R (c-à-d $|x - x_0| \leq R$), on obtient la majoration de l'erreur suivante :

$$|E_n(x)| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \tag{16}$$

où $\max\{|f^{n+1}(x)| \leq M : \; x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\}$.

On remarque alors que :

- Si n est fixé, et $|f^{n+1}(t)|$ est bornée sur $[x_0 - R, x_0 + R]$, le majorant de l'erreur (16) est donc proportionnelle à $R^{n+1}/(n+1)!$ et décroît lorsque $R \to 0$.
- Si R est fixé, le majorant de l'erreur (16) est inversement proportionnel à $(n+1)!$ et tend vers zéro lorsque n devient suffisamment grand. Ceci est schématisé dans la figure suivante :

Si on choisit x dans un intervalle de centre x_0 et de rayon R (c-à-d $|x - x_0| \leq R$), on obtient la majoration de l'erreur suivante :

$$|E_n(x)| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \tag{16}$$

où $\max\{|f^{n+1}(x)| \leq M : \ x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\}$.

On remarque alors que :

- Si n est fixé, et $|f^{n+1}(t)|$ est bornée sur $[x_0 - R, x_0 + R]$, le majorant de l'erreur (16) est donc proportionnelle à $R^{n+1}/(n+1)!$ et décroît lorsque $R \to 0$.
- Si R est fixé, le majorant de l'erreur (16) est inversement proportionnel à $(n+1)!$ et tend vers zéro lorsque n devient suffisamment grand. Ceci est schématisé dans la figure suivante :

Si on choisit x dans un intervalle de centre x_0 et de rayon R (c-à-d $|x - x_0| \leq R$), on obtient la majoration de l'erreur suivante :

$$|E_n(x)| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \tag{16}$$

où $$\max\{|f^{n+1}(x)| \leq M : \; x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\}.$$
On remarque alors que :

- Si n est fixé, et $|f^{n+1}(t)|$ est bornée sur $[x_0 - R, x_0 + R]$, le majorant de l'erreur (16) est donc proportionnelle à $R^{n+1}/(n+1)!$ et décroît lorsque $R \to 0$.
- Si R est fixé, le majorant de l'erreur (16) est inversement proportionnel à $(n+1)!$ et tend vers zéro lorsque n devient suffisamment grand. Ceci est schématisé dans la figure suivante :

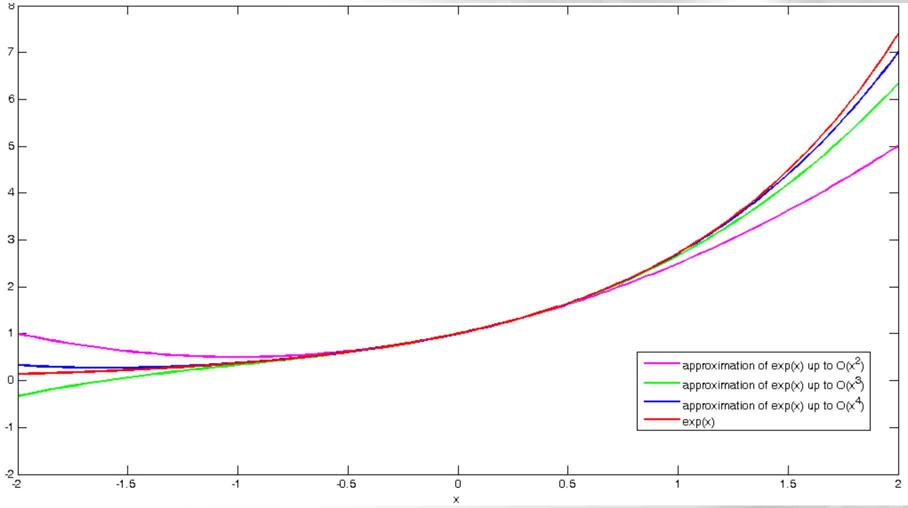


FIGURE – Approximation polynômiale de Taylor.

Sur cette figure on remarque que l'on approche bien e^x par $P_4(x)$ sur $[-2, 2]$.

Interpolation polynômiale de Lagrange

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ connue en $n+1$ points distincts $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$. Il s'agit de construire un polynôme P de degré inférieur ou égal n tel que

$$\forall i = 0, 1, \dots n, \quad P_n(x_i) = f(x_i). \tag{17}$$

Théorème

Il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n solution de (17). Le polynôme s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \tag{18}$$

où,

$$L_i(x) = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{x_i - x_k}, \tag{19}$$

Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$. Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ connue en $n+1$ points distincts x_0, x_1, ..., x_n. Il s'agit de construire un polynôme P de degré inférieur ou égal n tel que

$$\forall i = 0, 1, ...n, \quad P_n(x_i) = f(x_i). \tag{17}$$

Theorème

Il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n solution de (17). Le polynôme s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \tag{18}$$

où,

$$L_i(x) = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{x_i - x_k}, \tag{19}$$

Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points x_0, x_1, ..., x_n. Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

Exemple

Nous allons construire le polynôme de Lagrange passant par les 4 points :

$$A_0(2,1),\ A_1(3,2),\ A_2(-1,3),\ A_3(4,4),$$

on pose : $x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ x_2 = -1$ *et* $x_3 = 4$. $f_0 = 1,\ f_1 = 2,\ f_2 = 3$ *et* $f_3 = 4$.

Les polynômes de Lagrange élémentaires :

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-(-1))(x-4)}{(2-3)(2-(-1))(2-4)} = \frac{1}{6}(x-3)(x-(-1))(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-(-1))(x-4)}{(3-2)(3-(-1))(3-4)} = \frac{-1}{4}(x-2)(x-(-1))(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)} = \frac{-1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-(-1))}{(4-2)(4-3)(4-(-1))} = \frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x-(-1))$$

Le polynôme de Lagrange est donné par :

$$P(x) = 1L_0(x) + 2L_1(x) + 3L_2(x) + 4L_3(x)$$

$$= \frac{1}{60}x^3 + \frac{7}{20}x^2 - \frac{16}{15}x + \frac{8}{5}$$

Exemple

Nous allons construire le polynôme de Lagrange passant par les 4 points :

$$A_0(2,1),\ A_1(3,2),\ A_2(-1,3),\ A_3(4,4),$$

on pose : $x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ x_2 = -1$ *et* $x_3 = 4$. $f_0 = 1,\ f_1 = 2,\ f_2 = 3$ *et* $f_3 = 4$.

Les polynômes de Lagrange élémentaires :

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-(-1))(x-4)}{(2-3)(2-(-1))(2-4)} = \frac{1}{6}(x-3)(x-(-1))(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-(-1))(x-4)}{(3-2)(3-(-1))(3-4)} = \frac{-1}{4}(x-2)(x-(-1))(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)} = \frac{-1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-(-1))}{(4-2)(4-3)(4-(-1))} = \frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x-(-1))$$

Le polynôme de Lagrange est donné par :

$$P(x) = 1L_0(x) + 2L_1(x) + 3L_2(x) + 4L_3(x)$$

$$= \frac{1}{60}x^3 + \frac{7}{20}x^2 - \frac{16}{15}x + \frac{8}{5}$$

- Estimation de l'erreur :

Theorème

Soit f une fonction de classe $C^{n+1}[a, b]$. Si x_0, x_1, ..., $x_n \in [a, b]$, P le polynôme d'interpolation de Lagrange au points :
$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ *alors :*

$$\forall x \in [a, b],$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta) \qquad (20)$$

où $a < \min(x, x_0) < \theta < \max(x, x_n) < b$

Interpolation polynômiale de Newton

- Polynôme de Newton
  - L'inconvenient majeur des polynômes de Lagrange c'est qu'il n'y a pas de relation de récurrence entre eux.
  - Chaque polynôme doit être construit individuellement et il n'y a pas moyen de calculer le polynôme de degré n à partir de celui de degré $n-1$: les deux polynômes sont complètement indépendants.
  - La méthode de Newton nous permettra de déduire P_n à partir de P_{n-1}.

- Polynôme de Newton
  - L'inconvenient majeur des polynômes de Lagrange c'est qu'il n'y a pas de relation de récurrence entre eux.
  - Chaque polynôme doit être construit individuellement et il n'y a pas moyen de calculer le polynôme de degré n à partir de celui de degré $n-1$: les deux polynômes sont complètement indépendants.
  - La méthode de Newton nous permettra de déduire P_n à partir de P_{n-1}.

- Polynôme de Newton
  - L'inconvenient majeur des polynômes de Lagrange c'est qu'il n'y a pas de relation de récurrence entre eux.
  - Chaque polynôme doit être construit individuellement et il n'y a pas moyen de calculer le polynôme de degré n à partir de celui de degré $n-1$: les deux polynômes sont complètement indépendants.
  - La méthode de Newton nous permettra de déduire P_n à partir de P_{n-1}.

- Polynôme de Newton
  - L'inconvenient majeur des polynômes de Lagrange c'est qu'il n'y a pas de relation de récurrence entre eux.
  - Chaque polynôme doit être construit individuellement et il n'y a pas moyen de calculer le polynôme de degré n à partir de celui de degré $n-1$: les deux polynômes sont complètement indépendants.
  - La méthode de Newton nous permettra de déduire P_n à partir de P_{n-1}.

Cette méthode est introduite récursivement de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) && (21)\\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) && (22)\\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (23)\\
\vdots &= \vdots \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + && (24)\\
&\quad a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots + a_n(x - x0)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

On remarque que P_n est obtenu à partir de P_{n-1} en utilisant la relation :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Le polynôme P_n (24), de degré $\leq n$, est appelé **polynôme de Newton** au points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$.

Cette méthode est introduite récursivement de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) && (21)\\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) && (22)\\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (23)\\
\vdots &= \vdots \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (24)\\
&\quad a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots + a_n(x - x0)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

On remarque que P_n est obtenu à partir de P_{n-1} en utilisant la relation :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Le polynôme P_n (24), de degré $\leq n$, est appelé **polynôme de Newton** au points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$.

Cette méthode est introduite récursivement de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) && (21)\\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) && (22)\\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (23)\\
\vdots &= \vdots \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (24)\\
&\quad a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots + a_n(x - x0)\dots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

On remarque que P_n est obtenu à partir de P_{n-1} en utilisant la relation :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Le polynôme P_n (24), de degré $\leq n$, est appelé **polynôme de Newton** au points $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$.

Cette méthode est introduite récursivement de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) && (21)\\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) && (22)\\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (23)\\
\vdots &= \vdots \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && (24)\\
& a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + ... + a_n(x - x0)...(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

On remarque que P_n est obtenu à partir de P_{n-1} en utilisant la relation :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Le polynôme P_n (24), de degré $\leq n$, est appelé **polynôme de Newton** au points x_0, x_1, ..., x_{n-1}.

Exemple

Étant donné les points $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ *et* $x_3 = 4.5$ *et les coefficients* $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = -0.1$ *et* $a_4 = 0.003$. *Trouver* $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ *et* $P_4(x)$ *et calculer* $P_i(2.5)$ *pour* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. En utilisant les formules précédentes on a :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 5 - 2(x-1) \\ P_2(x) &= 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3) \\ P_3(x) &= 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3) - 0.1(x-1)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} P_1(2.5) &= 2 \\ P_2(2.5) &= P_1(2.5) + 0.5(1.5)(-0.5) = 1.625 \\ P_3(2.5) &= P_2(2.5) - 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5) = 1.5125 \end{aligned}$$

Exemple

Étant donné les points $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ *et* $x_3 = 4.5$ *et les coefficients* $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = -0.1$ *et* $a_4 = 0.003$. *Trouver* $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ *et* $P_4(x)$ *et calculer* $P_i(2.5)$ *pour* $i = 1, 2, 3, 4$.*En utilisant*

les formules précédentes on a :

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 5 - 2(x-1) \\
P_2(x) &= 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3) \\
P_3(x) &= 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3) - 0.1(x-1)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
P_1(2.5) &= 2 \\
P_2(2.5) &= P_1(2.5) + 0.5(1.5)(-0.5) = 1.625 \\
P_3(2.5) &= P_2(2.5) - 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5) = 1.5125
\end{aligned}$$

• Interpolation polynômiale de Newton

Nous allons déterminer les coefficients a_k pour tout les polynômes P_1, P_2, ..., P_n qui approchent une fonction f donnée. La détermination des constantes a_k se fait à partir du fait que les polynômes de Newton P_j coïncident avec la fonction f au points $x_0, x_1, \ldots, x_j$: $f(x_i) = P_j(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, j$.

Pour le polynôme P_1, a_0 et a_1 sont déterminés à partir de

$$P_1(x_0) = f(x_0) \text{ et } P_1(x_1) = f(x_1)$$

On trouve :

$$a_0 = f(x_0) \tag{25}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{26}$$

Les coefficients a_0 et a_1 de P_2 sont les mêmes que ceux qui figurent dans P_1 et qu'on vient de calculer (25), (26).

Interpolation polynômiale de Newton

Nous allons déterminer les coefficients a_k pour tout les polynômes $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ qui approchent une fonction f donnée. La détermination des constantes a_k se fait à partir du fait que les polynômes de Newton P_j coïncident avec la fonction f au points
$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_j:\ f(x_i) = P_j(x_i),\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ j.$
Pour le polynôme P_1, a_0 et a_1 sont déterminés à partir de

$$P_1(x_0) = f(x_0) \text{ et } P_1(x_1) = f(x_1)$$

On trouve :

$$a_0 = f(x_0) \tag{25}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{26}$$

Les coefficients a_0 et a_1 de P_2 sont les mêmes que ceux qui figurent dans P_1 et qu'on vient de calculer (25), (26).

Le coefficient a_2 de P_2 est déterminé de la façon suivante :

$$P_2(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

a_2 est donc donné par :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} && (27) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_0)} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] && (28) \end{aligned}$$

Cela nous amène a introduire le concept des différences divisées :

Definition

Les différences divisées d'une fonction f sont définies comme suit :

$$
\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k)\\
f[x_{k-1},x_k] &= \frac{f[x_k]-f[x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}\\
f[x_{k-2},x_{k-1},x_k] &= \frac{f[x_{k-1},x_k]-f[x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-2}}\\
f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k] &= \frac{f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]-f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-3}}\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

La formule de récurrence est donc définie par :

$$
f[x_{k-i},x_{k-i+1},\ldots,x_k] = \frac{f[x_{k-i+1},\ldots,x_k]-f[x_{k-i},\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-i}} \tag{29}
$$

Definition

Les différences divisées d'une fonction f sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k)\\
f[x_{k-1},x_k] &= \frac{f[x_k]-f[x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}\\
f[x_{k-2},x_{k-1},x_k] &= \frac{f[x_{k-1},x_k]-f[x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-2}}\\
f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k] &= \frac{f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]-f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-3}}\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

La formule de récurrence est donc définie par :

$$f[x_{k-i},x_{k-i+1},\ldots,x_k] = \frac{f[x_{k-i+1},\ldots,x_k]-f[x_{k-i},\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-i}} \tag{29}$$

Theorème

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. *Si* $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ *sont* $n+1$ *points distincts de* $[a,b]$, *alors il existe un unique polynôme* P_n, *dit polynôme de Newton, de degré au plus égal à* n *tel que :*

$$\begin{aligned}
P_n(x_i) &= f(x_i) \text{ pour } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \\
\text{où } a_i &= f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \text{ pour } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n
\end{aligned}$$

de plus, pour tout $x \in [a,b]$ *il existe* $\theta \in]a,b[$ *tel que :*

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
E_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta)
\end{aligned} \tag{30}$$

E_n *est l'erreur de l'approximation de Newton.*

- Exemple de construction du Polynôme de Newton

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1$, construisons les différences divisées basées sur les points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ et $x_5 = 6$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$	$f[x_{i-5}, ..., x_i]$
$x_0 = 1$	-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x_1 = 2$	1	3	$-$	$-$	$-$	$-$
$x_2 = 3$	32	31	14	$-$	$-$	$-$
$x_3 = 4$	139	107	38	8	$-$	$-$
$x_4 = 5$	394	255	74	12	1	$-$
$x_5 = 6$	893	499	122	16	1	0

Le polynôme de Newton s'écrit donc comme suit :

$$P_4(x) = -2 + (x-1)[3 + (x-2)[14 + (x-3)[8 + (x-4)]]]$$

• Exemple de construction du Polynôme de Newton

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1$, construisons les différences divisées basées sur les points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ et $x_5 = 6$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-5}, \ldots, x_i]$
$x_0 = 1$	-2	–	–	–	–	–
$x_1 = 2$	1	3	–	–	–	–
$x_2 = 3$	32	31	14	–	–	–
$x_3 = 4$	139	107	38	8	–	–
$x_4 = 5$	394	255	74	12	1	–
$x_5 = 6$	893	499	122	16	1	0

Le polynôme de Newton s'écrit donc comme suit :

$$P_4(x) = -2 + (x-1)[3 + (x-2)[14 + (x-3)[8 + (x-4)]]]$$

- Exemple de construction du Polynôme de Newton

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1$, construisons les différences divisées basées sur les points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ et $x_5 = 6$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$	$f[x_{i-5}, ..., x_i]$
$x_0 = 1$	-2	–	–	–	–	–
$x_1 = 2$	1	3	–	–	–	–
$x_2 = 3$	32	31	14	–	–	–
$x_3 = 4$	139	107	38	8	–	–
$x_4 = 5$	394	255	74	12	1	–
$x_5 = 6$	893	499	122	16	1	0

Le polynôme de Newton s'écrit donc comme suit :

$$P_4(x) = -2 + (x-1)[3 + (x-2)[14 + (x-3)[8 + (x-4)]]]$$

Interpolation Spline cubique

- Approximation par des fonctions polynômiales par morceaux

  × Le nombre de points de contrôle influence directement le degré du polynôme d'interpolation.

  × Risque d'avoir des erreurs d'interpolation importantes.

De plus il est souvent nécessaire d'obtenir des courbes de plus en plus régulières. On peut mesurer la régularité de fonction par le biais de ses dérivées. En effet, plus une courbe est différentiable, plus la courbe qui lui ai associé est lisse plus la fonction est régulière.

- Approximation par des fonctions polynômiales par morceaux
  - × Le nombre de points de contrôle influence directement le degré du polynôme d'interpolation.
  - × Risque d'avoir des erreurs d'interpolation importantes.

De plus il est souvent nécessaire d'obtenir des courbes de plus en plus régulières. On peut mesurer la régularité de fonction par le biais de ses dérivées. En effet, plus une courbe est différentiable, plus la courbe qui lui ai associé est lisse plus la fonction est régulière.

Le problème lorsqu'on utilise des polynômes de faible degré, provient du fait qu'il faut utiliser plusieurs pour relier tout les points. C'est le cas de l'interpolation linéaire par morceaux illustré dans la figure 10 qui consiste à relier chaque pairs de points par un segment de droite. La restriction de

l'approximation P à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est donnée par :

$$P_i(x) = f[x_{i-1}] + f[x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1}).$$

La fonction P ainsi construite est évidemment continue sur l'intervalle $[a, b]$.

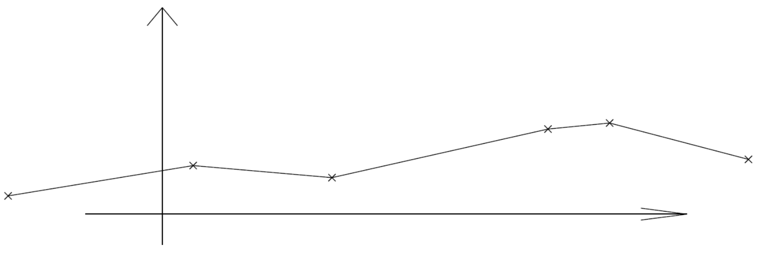


Figure – Approximation linéaire par morceaux

Il est clair qu'une telle courbe n'est pas lisse, il faut donc être prudent à la jonction de ses différents segments de courbe. Une voie très populaire consiste à utiliser dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ un polynôme de degré 3 de la forme

$$P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, ..., n$$

et à relier ces différents polynômes de façon à ce que la courbe résultante soit deux fois différentiable. C'est l'interpolation par *Spline cubique*.

Supposons que l'on a $(n+1)$ points d'interpolation est n intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, cela indique qu'il y a $4n$ coefficients $(a_i, b_i, c_i, d_i, \ i = 1, ..., n)$ à déterminer. La situation est décrite dans la figure 11 pour $n = 4$.

Il est clair qu'une telle courbe n'est pas lisse, il faut donc être prudent à la jonction de ses différents segments de courbe. Une voie très populaire consiste à utiliser dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ un polynôme de degré 3 de la forme

$$P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

et à relier ces différents polynômes de façon à ce que la courbe résultante soit deux fois différentiable. C'est l'interpolation par *Spline cubique*.

Supposons que l'on a $(n+1)$ points d'interpolation est n intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, cela indique qu'il y a $4n$ coefficients $(a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ i = 1, \dots, n)$ à déterminer. La situation est décrite dans la figure 11 pour $n = 4$.

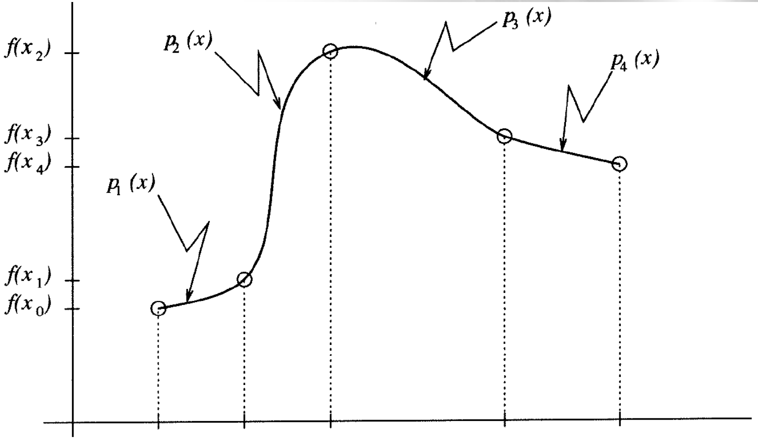


FIGURE – Spline cubique

Voyons combien de conditions ou d'équations nous pouvons imposer pour calculer les $4n$ coefficients. Ces équations proviennent des conditions de régularité que l'on souhaite imposer à la courbe résultante. Voici les contraintes imposés aux n polynômes de degré 3.

- $$P_1(x_0) = f(x_0) \text{ et } P_n(x_n) = f(x_n).$$
- Les splines P_{i-1} et P_i sont reliées au point de contrôle x_i, $i = 1, ..., n-1$, alors
$$P_i(x_i) = f(x_i) = P_{i+1}(x_i).$$
- Pour assurer la régularité de la courbe, on doit imposer que les dérivés premières et secondes soient continuent aux points $i = 1, ..., n-1$

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i) \quad (31)$$
$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i) \quad (32)$$

Voyons combien de conditions ou d'équations nous pouvons imposer pour calculer les $4n$ coefficients. Ces équations proviennent des conditions de régularité que l'on souhaite imposer à la courbe résultante. Voici les contraintes imposés aux n polynômes de degré 3.

- $$P_1(x_0) = f(x_0) \text{ et } P_n(x_n) = f(x_n).$$
- Les splines P_{i-1} et P_i sont reliées au point de contrôle x_i, $i = 1, ..., n-1$, alors
$$P_i(x_i) = f(x_i) = P_{i+1}(x_i).$$
- Pour assurer la régularité de la courbe, on doit imposer que les dérivés premières et secondes soient continuent aux points $i = 1, ..., n-1$

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i) \quad (31)$$
$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i) \quad (32)$$

Au total on a $4n - 2$ équations en $4n$ inconnues et il manque donc 2 équations pour pouvoir résoudre ce système linéaire. Voyons maintenant comment déterminer l'équation de la spline $p_i(x)$ dans chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

Il est possible de ramener ce système de $4n - 2$ équations en $4n$ inconnues en un système beaucoup plus petit de $(n-1)$ équations en $(n-1)$ inconnues. Ces $(n-1)$ inconnues sont tout simplement les valeurs des dérivés secondes $(f_i^{''})$ de la spline au points d'interpolation.

La résolution du système est basée sur la constatation suivante : puisque la spline est constitué de polynôme de degré 3 dans chaque intervalle, la dérivé seconde de la spline étant un polynôme de degré 1 dans chaque intervalle. De plus ses dérivés secondes sont continues en chacun des points x_i.

Au total on a $4n-2$ équations en $4n$ inconnues et il manque donc 2 équations pour pouvoir résoudre ce système linéaire. Voyons maintenant comment déterminer l'équation de la spline $p_i(x)$ dans chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

Il est possible de ramener ce système de $4n-2$ équations en $4n$ inconnues en un système beaucoup plus petit de $(n-1)$ équations en $(n-1)$ inconnues. Ces $(n-1)$ inconnues sont tout simplement les valeurs des dérivés secondes $(f_i^{''})$ de la spline au points d'interpolation.

La résolution du système est basée sur la constatation suivante : puisque la spline est constitué de polynôme de degré 3 dans chaque intervalle, la dérivé seconde de la spline étant un polynôme de degré 1 dans chaque intervalle. De plus ses dérivés secondes sont continues en chacun des points x_i.

Au total on a $4n-2$ équations en $4n$ inconnues et il manque donc 2 équations pour pouvoir résoudre ce système linéaire. Voyons maintenant comment déterminer l'équation de la spline $p_i(x)$ dans chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

Il est possible de ramener ce système de $4n-2$ équations en $4n$ inconnues en un système beaucoup plus petit de $(n-1)$ équations en $(n-1)$ inconnues. Ces $(n-1)$ inconnues sont tout simplement les valeurs des dérivés secondes $(f_i^{''})$ de la spline au points d'interpolation.

La résolution du système est basée sur la constatation suivante : puisque la spline est constitué de polynôme de degré 3 dans chaque intervalle, la dérivé seconde de la spline étant un polynôme de degré 1 dans chaque intervalle. De plus ses dérivés secondes sont continues en chacun des points x_i.

Ainsi dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, la formule de l'interpolation de Lagrange donne

$$P_i''(x) = f_{i-1}'' \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i'' \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

En intégrant deux fois cette équation, on obtient d'abord

$$P_i'(x) = f_{i-1}'' \frac{(x - x_i)^2}{2(x_{i-1} - x_i)} + f_i'' \frac{(x - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})} + \alpha_i$$

et par la suite

$$P_i(x) = f_{i-1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6(x_{i-1} - x_i)} + f_i'' \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i$$

où α_i et β_i sont les constantes d'intégration. On exprime ses constantes d'intégration en fonctions des inconnues f_i''.

La courbe du polynôme $P_i(x)$ défini dans $[x_{i-1}, x_i]$ doit passer par les points $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et $(x_i, f(x_i))$, on en déduit que

$$p_i(x_i) = f(x_i) = f_i'' \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \beta_i = f_i'' \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} + \beta_i$$

ce qui entraîne que

$$\beta_i = f(x_i) - f_i'' \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}$$

De même en $x = x_{i-1}$

$$p_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = f_{i-1}'' \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{6} + \alpha_i(x_{i-1} - x_i) + \beta_i$$

d'où l'on tire

$$\alpha_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{(f_i'' - f_{i-1}'')(x_i - x_{i-1})}{6}$$

On en déduit que l'équation de la spline sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + f''_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} \\
&+ \left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} - \frac{(f''_i-f''_{i-1})(x_i-x_{i-1})}{6}\right)(x-x_i) \\
&+ f(x_i) - f''_i\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{6}
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + f''_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} \\
&- \left(\frac{f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f''_{i-1}(x_i-x_{i-1})}{6}\right)(x-x_i) \\
&+ \left(\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f''_i(x_i-x_{i-1})}{6}\right)(x-x_i) \\
&+ f(x_i) - f''_i\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{6}
\end{aligned}
$$

On en déduit que l'équation de la spline sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + f''_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} \\
&+ \left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} - \frac{(f''_i-f''_{i-1})(x_i-x_{i-1})}{6}\right)(x-x_i) \\
&+ f(x_i) - f''_i\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{6}
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + f''_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} \\
&- \left(\frac{f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f''_{i-1}(x_i-x_{i-1})}{6}\right)(x-x_i) \\
&+ \left(\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f''_i(x_i-x_{i-1})}{6}\right)(x-x_i) \\
&+ f(x_i) - f''_i\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{6}
\end{aligned}
$$

pour obtenir une formule plus compacte, on remplace le monôme $(x - x_i)$ par l'expression équivalente $(x - x_{i-1}) + (x_{i-1} - x_i)$, on obtient alors :

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= -f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + f''_i \frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} \\
&- \left(\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - f''_{i-1}\frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x - x_i) \\
&+ \left(\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - f''_{i}\frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

On peut simplifier l'expression en posant $h_i = x_i - x_{i-1}$ pour $i = 1, \ldots, n$ ce qui donne

$$
\begin{aligned}
P_i(x) &= -f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + f''_i \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} \\
&- \left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i f''_{i-1}}{6}\right)(x - x_i) \\
&+ \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i f''_{i}}{6}\right)(x - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

qui est l'équation de la spline dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

pour obtenir une formule plus compacte, on remplace le monôme $(x - x_i)$ par l'expression équivalente $(x - x_{i-1}) + (x_{i-1} - x_i)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} P_i(x) &= -f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + f''_i \frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} \\ &- \left(\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - f''_{i-1}\frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x - x_i) \\ &+ \left(\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - f''_i\frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

On peut simplifier l'expression en posant $h_i = x_i - x_{i-1}$ pour $i = 1, ..., n$, ce qui donne

$$\begin{aligned} P_i(x) &= -f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + f''_i \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} \\ &- \left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i f''_{i-1}}{6}\right)(x - x_i) \\ &+ \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i f''_i}{6}\right)(x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

qui est l'équation de la spline dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

Des $(4n-2)$ conditions retenues, seule la continuité de la première dérivé n'a pas était imposée. Pour ce faire, il faut dériver $p_i(x)$ dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et $p_{i+1}(x)$ dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, puis évaluer $p_i(x_i)$ et$p_{i+1}(x_i)$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} p_i^{'}(x) = & - f_{i-1}^{''}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + f_i^{''}\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} \\ & - \left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i f_{i-1}^{''}}{6}\right) \\ & + \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i f_i^{''}}{6}\right) \end{aligned}$$

et d'autre part

Des $(4n-2)$ conditions retenues, seule la continuité de la première dérivé n'a pas était imposée. Pour ce faire, il faut dériver $p_i(x)$ dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et $p_{i+1}(x)$ dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, puis évaluer $p_i(x_i)$ et$p_{i+1}(x_i)$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} p_i^{'}(x) = & - f_{i-1}^{''}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + f_i^{''}\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} \\ & - \left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i f_{i-1}^{''}}{6}\right) \\ & + \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i f_i^{''}}{6}\right) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} p_{i+1}^{'}(x) = & - f_i^{''}\frac{(x-x_{i+1})^2}{2h_{i+1}} + f_{i+1}^{''}\frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}} \\ & - \left(\frac{f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1} f_i^{''}}{6}\right) \\ & + \left(\frac{f(x_{i+1})}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1} f_{i+1}^{''}}{6}\right) \end{aligned}$$

En égalisons ces deux expressions évalués en $x = x_i$ et en les simplifiant, on obtient les $n-1$ équations

$$h_i f''_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) f''_i + h_{i+1} f''_{i+1} = 6(f[x_i, x_{i+1}] - f([x_{i-1} - x_i])) \text{ pour } i = 1, \dots, n-1.$$

Une dernière simplification est possible si on divise chaque terme de cette équation par :

$$h_i + h_{i+1} = x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i = x_{i+1} - x_{i-1}$$

En égalisons ces deux expressions évalués en $x = x_i$ et en les simplifiant, on obtient les $n-1$ équations

$$h_i f''_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) f''_i + h_{i+1} f''_{i+1} = 6(f[x_i, x_{i+1}] - f([x_{i-1} - x_i])) \text{ pour } i = 1, ..., n-1.$$

Une dernière simplification est possible si on divise chaque terme de cette équation par :

$$h_i + h_{i+1} = x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i = x_{i+1} - x_{i-1}$$

ce qui donne

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} f''_{i-1} + 2f''_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} f''_{i+1} = 6f([x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]) \text{ pour } i = 1, ..., n-1.$$

On remarque que le terme de droite fait intervenir les deux différences divisées. Il y a au total $(n+1)$ inconnues f''_i et on a que $(n-1)$ équations. On doit donc fixer de façon arbitraire deux des inconnues. Il existe plusieurs possibilités, mais la plus simple consiste à imposer

$$f''_0 = f''_n = 0$$

on qualifie la spline naturelle la courbe qui en résulte. La spline naturelle impose que la dérivé seconde est nulle aux deux extrémités et donc que la courbe y est linéaire. Un autre choix possible consiste à imposer

$$f''_0 = f''_1 \text{ et } f''_n = f''_{n-1}$$

ce qui revient à imposer une courbure constante dans le premier et le dernier intervalle.

Nous pouvons alors écrire ce système d'équations linéaires de $n-1$ équations

$$\begin{bmatrix} 2 & u_2 & & & & \\ v_2 & 2 & u_3 & & & \\ & v_3 & 2 & u_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & v_{n-2} & 2 & u_{n-1} \\ & & & & v_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ v_3 \\ \vdots \\ f_{n-2}'' \\ f_{n-1}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ v_i &= \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \qquad\qquad i = 1, ..., n-1 \\ w_i &= 6f([x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]) \end{aligned}$$

Le problème initiale nous a conduit à un système tridiagonale de dimension $(n-1)$ à diagonale strictement dominante donc il admet une solution unique. On sait que les systèmes tridiagonale sont très facile à résoudre puisque la décomposition LU se réduit dans ce cas à peu d'opérations.

- Estimation de l'erreur

Theorème

Soit $f \in C^4([a,b])$ sur l'intervalle $]a,b[$, Si $a < x_0 < \cdots < x_n < b$, alors

$$|f(x) - P_i(x)| \leq \frac{h_{i-1}^4}{384} \max_{\epsilon \in]x_{i-1,i}[} |f^4(\epsilon)|$$

où ϵ tel que $a \leq \min(x, x_0) < \epsilon < \max(x, x_n) \leq b$

Exercice

Trouver l'expression des splines cubiques passant par les points suivants :

x_i	0.9	1.3	1.9	2.1
y_i	1.3	1.5	1.85	2.1

- Estimation de l'erreur

Theorème

Soit $f \in C^4([a,b])$ *sur l'intervalle* $]a,b[$, *Si* $a < x_0 < \cdots < x_n < b$, *alors*

$$|f(x) - P_i(x)| \leq \frac{h_{i-1}^4}{384} \max_{\epsilon \in]x_{i-1},i[} |f^4(\epsilon)|$$

où ϵ *tel que* $a \leq \min(x, x_0) < \epsilon < \max(x, x_n) \leq b$

Exercice

Trouver l'expression des splines cubiques passant par les points suivants :

x_i	0.9	1.3	1.9	2.1
y_i	1.3	1.5	1.85	2.1

- Estimation de l'erreur

Theorème

Soit $f \in C^4([a,b])$ *sur l'intervalle* $]a,b[$, *Si* $a < x_0 < \cdots < x_n < b$, *alors*

$$|f(x) - P_i(x)| \leq \frac{h_{i-1}^4}{384} \max_{\epsilon \in]x_{i-1},i[} |f^4(\epsilon)|$$

où ϵ *tel que* $a \leq \min(x, x_0) < \epsilon < \max(x, x_n) \leq b$

Exercice

Trouver l'expression des splines cubiques passant par les points suivants :

x_i	0.9	1.3	1.9	2.1
y_i	1.3	1.5	1.85	2.1