Cours Analyse III

Pr. Abla CHAOUNI BENABDELLAH

Benabdellahchaouni.abla@gmail.com

IV-Intégration

Définition : On appelle description hiérarchisée du domaine Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$: l'existence de 2 réels a et b et de 2 applications continues sur $[a,b]$, notées u et v tels que $a < b$ et $\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leqslant v(x)$, avec

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases}$$

Exemple : On va prendre le domaine du plan défini par : $y \geqslant 0, \quad x \geqslant y, \quad x \leqslant 1.$
Il est élémentaire de faire une figure de ce domaine, qui est un triangle.

En travaillant sur cette figure, on obtient facilement une description hiérarchisée : $\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,x] \end{cases}$

Définition : f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, si on dispose d'une description hiérarchisée de Δ, on appelle intégrale double de f sur Δ :

$$\mathrm{I} = \iint_{\Delta} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

En un mot, on transforme cette intégrale double en 2 intégrales simples emboîtées

Exemple : On va intégrer la fonction $(x, y) \to f(x, y) = xy$ sur D : $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 1 \end{cases}$

Théorème de Fubini : inversion des bornes

Théorème :

Si on a par ailleurs : $(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [c, d] \\ x \in [\alpha(y), \beta(y)] \end{cases}$ avec $c < d$ et $\forall y \in [c, d]$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, alors :

$$\mathrm{I} = \iint_\Delta f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

1.4. Un cas particulier

On va se placer dans un cas très particulier puisque : $(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [c, d] \end{cases}$

Le domaine est un rectangle. Et d'autre part : $\forall (x, y) \in \Delta$, $f(x, y) = \varphi(x)\, \psi(y)$

Ainsi, dans ce cas : $\boxed{\iint_\Delta \varphi(x)\, \psi(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{d}x \times \int_c^d \psi(y)\, \mathrm{d}y}$

- **Exemple 1.–**

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x \cos y \; dxdy$$

- **Exemple 2.–**

$$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2 y - 1) \; dxdy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], \; y \in [x^2, 1]\}.$$

$$\iint_D x^2 y \; dx \; dy$$

Exemples.

- Calculer $I = \displaystyle\iint_C xy\,dxdy$ sur sur le carré plein $C = [0,1]\times[0,1]$.

- Calculer $J = \displaystyle\iint_C (x+y)^2 dxdy$ sur $C = [0,1]\times[0,1]$.

1.6. Changement de variables

Théorème : $\varphi : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathscr{U}$, et, $\Delta \subset \mathscr{V}$.
De plus : $\varphi(D) = \Delta$.
On suppose que les points de Δ qui ont plusieurs antécédents sont de surface nulle.
On note : $(x, y) = \varphi(u, v)$, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le jacobien de φ en (u, v), et, $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ la valeur absolue du jacobien.
Alors : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D g(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$

On rappelle que : $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Théorème : On pose $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ $(x, y) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta) \in \Delta$, et $f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g(\rho, \theta)$

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_\Delta g(\rho, \theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \iint_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$: \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0$$

Exemple : On va intégrer la fonction $(x, y) \to f(x, y) = xy$ sur D : $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$

On cherche d'abord une description hiérarchisée du domaine en polaires : $\begin{cases} \theta \in [0, \pi/2] \\ \rho \in [0, 1] \end{cases}$, ce qui

donne, compte tenu que $xy = \rho^2 \cos\theta \sin\theta$:

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Intégrales triples

Δ un fermé borné de $\mathbb{R}^3$, une description hiérarchisée de Δ est de la forme :

$$(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in [\alpha(x, y), \beta(x, y)] \end{cases}$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.
On définit alors l'intégrale triple de f continue sur Δ par :

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

2.2. Changement de variables

Sous des hypothèses équivalentes à la dimension 2,
$(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, $(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (u, v, w) \in \Delta$, et $f(x, y, z) = g(u, v, w)$, on a alors :

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta g(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

2.3. Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta, z) \in \Delta, \text{ et } f(x, y, z) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g(\rho, \theta, z)$$

On regardera la figure 6, page 8.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta g(\rho, \theta, z)\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

Le calcul du jacobien est facile $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho$ et on a encore $\rho \geqslant 0$.

2.4. Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad (x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta, \varphi) \in \Delta, \text{ et } f(x, y, z) = g(\rho, \theta, \varphi)$$

On regardera la figure 8, page 10.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta g(\rho, \theta, \varphi)\rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Le calcul du jacobien est facile : $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \cos\varphi$, et on a bien : $\cos\varphi \geqslant 0$.

La figure 9, page 11, indique le mode de calcul.

Les coordonnées sphériques du physicien sont illustrées sur la figure 10, page 12.

Dans ce cas, le calcul du jacobien donne : $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta$, et on a bien : $\sin\theta \geqslant 0$.

- Soit à calculer

$$J = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz.$$

- Soit à calculer

$$J = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz.$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\, (x^2 - 2yz) \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz \right) \\
&= \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right) dz = \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \right]_2^3 \\
&= \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}
\end{aligned}$$

- Considérons à nouveau l'intégrale J de la fonction

$$f(x, y, z) = 1 - 2yz$$

sur le cylindre plein Ω de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}$$

En coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 \right\} \\ &= \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, 1],\ \varphi \in [0, 2\pi[,\ z \in [0, 3] \right\} \end{aligned}$$

Puisque $dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, on a

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_{\Omega}(1-2yz)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi} (1-2\rho \sin\varphi z)\, d\varphi \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho \left[\varphi + 2\rho \cos\varphi z\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \left(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\right) \rho\, d\rho \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\, d\rho \\
&= 3\,\pi \left[\rho^2\right]_0^1 \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Fin.