مفاهيم أساسية في الدارات الكهربائية

****

الدكتور المهندس
حسان محمد أحمد

****

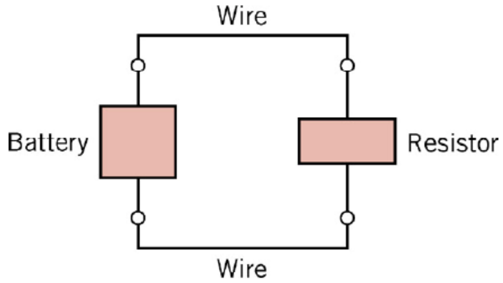
Dr.eng. Hassan Ahmad, istamo48@mail.ru

الخطة الدراسية والمراجع المعتمدة

كتب باللغة الانكليزية	كتب باللغة العربية
1. Robert L. Boylested, Introductory Circuit Analysis, 11-th Ed. Pierson Prentice Hall, 2007. 2. J. W. Nilsson and S. A. Riedel, *Electric Circuits*, Eighth Edition, Pierson Prentice Hall, 2008. 3. C.K. Alexander and M.N.O. Sadiku. *Fundamentals of Electric Circuits*. 3-th & 4-th. Edition, McGraw-Hill, 2007, 2009	الدارات الكهربائية، الدكتور محمد خالد شاهين، منشورات جامعة دمشق، كلية الهندسة المعلوماتية، ٢٠٠٩.

تعاريف

الدارة الكهربائية (electric circuit) أو الشبكة الكهربائية تتمثل بمجموعة من العناصر الكهربائية المتصلة والمرتبطة مع بعضها البعض بمسار مغلق بحيث انه بالإمكان أن يجري فيه تيار بشكل مستمر كما هو مبين في الشكل التالي:



تعتمد **نظرية الدارات** على النمذجة (modeling) ، ونقصد بذلك استخدام نماذج، تمثل عناصر مثالية بغية تسهيل وتبسيط عملية تحليل النظام الفيزيائي الواقعي، والذي نقصد به اجتماع العناصر المكونة للدارات الكهربائية المدروسة.

تعاريف

نقصد **بالتحليل (analysis)** معرفة استجابة دارة معلومة عند تحريض معطى (يقود غالبا إلى حل وحيد)، وله طرق عدة:

- التحليل الحسابي باستخدام القوانين والمعلومات الرياضية
- التحليل بالقياس باستخدام أدوات القياس المخبرية المختلفة
- التحليل باستخدام البرمجيات الحاسوبية

أما **التركيب (synthesis & design)** فهو بناء دارة بغية الحصول على استجابة معينة. (ليس من الضرورة التوصل إلى حل، ولكننا عندما نصل إلى حل، إننا قد نصل إلى حلول أخرى مكافئة).

تصنيف الدارات

١. دارات **مطاوعة**: لا تولد ولا تضخم الطاقة.
٢. دارات **عديمة الضياع**: لا يوجد فيها ضياع للطاقة.
٣. دارات **خطية**: فيها عناصر خطية ومولدات مستقلة فقط، والعنصر الخطي يحقق:
   a. القيمة المميزة له ثابتة عندما يتغير التيار.
   b. مطال الأستجابة متناسب مباشرة مع مطال التحريض.
   c. الفلطية تتغير تغيراً خطياً مع تغير التيار المار في العنصر.

والعناصر الخطية نوعان:

- **مبددة للطاقة**: كالمقاومة.
- **مخزنة للطاقة**: كالوشيعة والمكثفة.

٤. دارات **غير متغيرة مع الزمن**: تحوي عنصر غير متغير مع الزمن، ونقصد بذلك العنصر الذي لا يتغير منحنى خواصه مع الزمن.

تصنيف الدارات

٥. دارات **عكسية:** إذا بقيت الأستجابة ذاتها مع تبديل مواقع المولدات والمقاييس في الدارة.
٦. دارات **بدون ذاكرة:** لا تتضمن عناصر تخزين طاقة.
٧. دارات **ديناميةية:** تتضمن عناصر تخزين طاقة.
٨. دارات **ذات عناصر مجمعة:** الأبعاد الفيزيائية لعناصر الدارة مهملة بالمقارنة مع طول موجة الأشارة، فتكون قوانين كرشوف صالحة للتطبيق.
٩. دارات **ذات عناصر موزعة:** التيار في أي فرع يتغير بتغير نقاط الفرع بين عقدتين.

النظام الدولي لوحدات القياس
International System of Units

يعتمد **النظام العالمي SI** لوحدات القياس على سبعة كميات معرّفة كما هو مبين في الجدول ١ .

يمكن تجميع هذه القيم المعرفة لتشكيل **وحدات مشتقة**، مثل القوة، الطاقة، الاستطاعة (القدرة) و الشحنة الكهربائية ووحدات أخرى، كما هو مبين في الجدول ٢ .

مضاعفات و كسور الوحدات (power of ten):

أهم مضاعفات و كسور الوحدات الأكثر استخداما لدى المهندسين، كما هو مبين في الجدول ٣ .

العمليات الحسابية الأساسية
Basic Arithmetic Operations

الجمع والطرح (Addition & Subtraction):

$$A\times10^n \pm B\times10^n = (A\pm B)\times10^n$$

الضرب (Multiplication):

$$(A\times10^n)(B\times10^m) = (A)(B)\times10^{n+m}$$

القسمة (Division):

$$\frac{A\times10^n}{B\times10^m} = \frac{A}{B}\times10^{n-m}$$

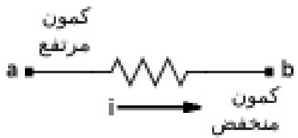
قوة القوة (Powers):

$$(A\times10^n)^m = A^m\times10^{nm}$$

المفاهيم الفيزيائية الأساسية في الدارات الكهربائية

الشحنة (charge): ويرمز لها بالرمز Q وهي نوعان: شحنه سالبه تمثل إلكترون وأخرى موجبه تمثل البروتون. وحدة قياس الشحنة كولوم (Coulomb)، ويرمز لها C ، ١ كولوم = 6.242×10^{18} الكترون (electron).

التيار (current): يعتبر التيار الكهربائي من أهم الوحدات الأساسية وهو معدل مرور الشحنة الكهربائية (q) في الدارة: $i=\frac{dq}{dt}$. يقاس بالأمبير (Ampere)، ويدل الرمز i على أن التيار ذو قيمة آنية تتبع للزمن (t)، في حين يستخدم الرمز I للدلالة على شدة تيار لا تتغير مع الزمن، وهو يتجه دوماً من نقطة ذات كمون مرتفع (+) إلى نقطة ذات كمون منخفض (-)، كما هو مبين في الشكل.



المفاهيم الفيزيائية الأساسية في الدارات الكهربائية

التيار الكهربائي (electrical current):

شدة التيار مقاسه بالأمبير يمكن أن تعرف بالعلاقة التالية: $I = \frac{Q}{t}$ [amperes, A]

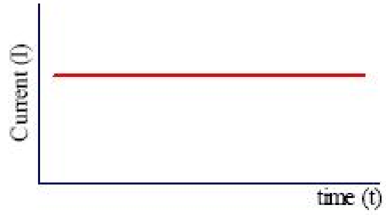
حيث أن: I = التيار (أمبير A)، Q = الشحنة (كولوم C) و t =الزمن (ثانية s).

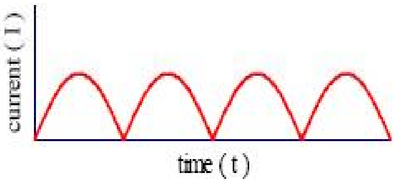
ومن هنا، بالإمكان حساب الشحنة الكهربائية وذلك بالعلاقة التالية:

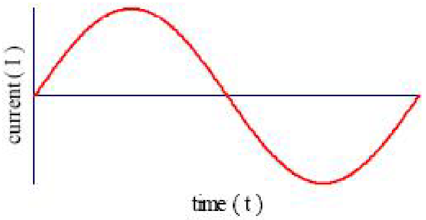
$$Q = It \quad [\text{coulombs}, \text{C}]$$

وبالتالي، وبالتعريف، فان الكولوم (C) هو كمية الشحنة الكهربائية التي تمر في الدارة وينشأ عنها تيار كهربائي قيمته واحد أمبير خلال زمن قدره ثانية واحدة.

أنواع التيار الكهربائي







التيار المستمر (Direct Current –DC): التيار المستمر ثابت القيمة ولا يغير اتجاهه بالنسبة للزمن.

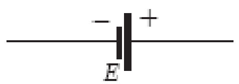
التيار النبضي (pulsating current): وهو تيار مستمر تتغير قيمته دورياً ولا يتغير اتجاهه.

تيار متناوب (Alternative Current – AC): وهو تيار متغير القيمة والاتجاه دورياً، مثل الموجة الجيبية (sin wave).

ملاحظة: يمكن الحصول على التيار المستمر من البطاريات أو مولدات DC أو من تقويم (تحويل) التيار المتناوب.

الجهد (أو الفولطية) (Voltage)

يعرف الجهد بأنه العمل اللازم لنقل وحدة الشحنات من نقطه لأخرى ويقاس بالفولت (volt). يرمز للجهد الآني v و للجهد المستمر V و يحسب بالعلاقة التالية



$$V\,[\mathrm{V}] = \frac{W\,[\mathrm{J}]}{Q\,[\mathrm{C}]}$$

حيث أنه: V - الجهد، W - العمل ويقاس بالجول، Q - الشحنه وتقاس بالكولوم.

يرمز لمصدر الجهد في الدارات الكهربائية بالرمز المبين في الشكل، حيث أن الطول النسبي للخطين المتوازيين يشير إلى قطبية المصدر.

تستخدم الفولطية للتعبير عن:

❖ فرق الكمون (potential difference) بين نقطتين: وهو العمل المطلوب لتحريك شحنة موجبة قدرها ١ كولون بين تلك النقطتين.

❖القوة المحركة الكهربائية: (electromotive force) هو فرق الكمون المطبّق بواسطة منبع للتيار الكهربائي، وهو الطاقة المحولة لكل واحدة شحنة في ذلك المنبع.

الطاقة (energy) أو العمل (work):

تعطى الطاقة اللازمة لنقل شحنة كهربائية q بين نقطتين فرق الكمون بينهما v

بالعلاقة $W = vq$

الاستطاعة (power):

وهي معدل نقل الطاقة خلال زمن معين، ووحدتها الواط (جول/ثا): $p = \frac{dW}{dt} = v\frac{dq}{dt} = vi$

تدل الحروف الصغيرة على القيم الآنية، أما الحروف الكبيرة فهي للاستطاعة الوسطى: $P = V\ I$ (Watt (W)= واط)

المقاومة الكهربائية (Resistance)

وهي العنصر الذي يمانع حركة التيار في الدارة ويرمز له R وتقاس شدة المقاومة بوحدة القياس أوم و يرمز لها (Ω) وتختلف من عنصر إلى آخر حسب طبيعة المادة التي صنع منها.

الناقلية الكهربائية (Conductance): تعرف الناقلية على أنها قدرة العنصر على تمرير التيار الكهربائي وهي مقلوب المقاومة ويرمز لها G وتقاس بالسيمنس (Siemens).

المواد العازلة و الناقلة

- **مواد عازلة (Insulators):** هي المواد التي لا تملك القدرة على نقل التيار الكهربائي بسبب عدم امتلاكها الكترونات حرة سطحية، مثل البلاستيك و الخشب....الخ.
- **مواد نصف ناقلة (Semiconductors):** هي مواد تبدي مقاومة عالية جدا لمرور التيار الكهربائي في اتجاه معين بينما تبدي مقاومة ضعيفة جدا إذا غير التيار اتجاهه، مثل الترانزيستور (Transistor).
- **مواد ناقلة (Conductors):** هي المواد التي تمتلك الكترونات سطحية ضعيفة الارتباط بالنواة ويمكنها أن تغادر الذرة وتقوم بدور الناقل و تسمى الكترونات حرة، مثل المعادن. وفي الدارات الكهربائية، تسمى النواقل بالمواد التي تسمح بتدفق الالكترونات تحت تأثير قوة خارجية صغيرة، مثل الفولطية المطبقة في الدارة.

نهاية الفصل الأول

****

حل مسائل

النظام العالمي SI

جدول 1

الرمز		وحدة القياس		الاسم	
m	م	meter	متر	Length	الطول
kg	كغ	kilogram	كيلوغرام	Mass	الوزن – الكتلة
s	ثا	second	ثانية	Time	الزمن
A	أمبير	ampere	أمبير	Current	التيار
K		kelvin	كيلفن	Temperature	الحرارة
mol	مول	mole	مول	Amount of substance	كمية المادة
cd		candela	كانديلا (شمعة)	luminous intensity	شدة الضوء

النظام العالمي SI

جدول 2

التمثيل الرياضية	الرمز	وحدة القياس		الاسم	
s^{-1}	Hz	hertz	هرتز	Frequency	التردد
$kg·m/s^2$	N	newton	نيوتن	Force	القوة/الشدة
N·m	J	joule	جول	Energy of Work	طاقة العمل
J/s	W	watt	واط	Power	الاستطاعة أو القدرة
A·s	C	coulomb	كولوم	Electric charge	الشحنة الكهربائية
J/C	V	volt	فولط	Electric potential	فرق الكمون
V/A	Ω	ohm	اوم	Electric Resistance	المقاومة الكهربائية
A/V	S	siemens	سيمنز	Electric Conductance	الناقلية الكهربائية
C/V	F	farad	فاراد	Electric Capacitance	السعة الكهربائية
V·s	Wb	weber	ويبر	Magnetic flux	التدفق المغناطيسي
Wb/A	H	henry	هنري	Inductance	التحريض

أمثلة محلولة

مثال 1-1 :

- في حساب القدرة: $2.71\times10^{9}\ \text{W} = 2.71\ \text{GW}$
- وفي حساب الزمن: $5.32\times10^{-9}\ \text{s} = 5.32\,\text{ns},\ \because\ 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$
- تحويل من ميلي متر إلى متر: $50\,\text{mm} = 50\times10^{-3}\ \text{m}$
- تحويل من ميلي غرام (مغ) الى كيلوغرام (كغ):

$$9\,\text{mg} = 9\times10^{-3}\,\text{g} = 9\times10^{-3}\times10^{-3}\,\text{kg} = 9\times10^{-6}\,\text{kg}$$

مثال 1-2:

$$6300 + 75.000 = 6.3\times10^{3} + 75\times10^{3} = (6.3+75)\times10^{3} = 81.3\times10^{3}$$

$$0.0096 - 0.00086 = 96\times10^{-4} - 8.6\times10^{-4} = (96-8.6)\times10^{-4} = 87.5\times10^{-4}$$

مثال 1-3:

$$(0.0002)(0.000007) = (2\times10^{-4})(7\times10^{-6})$$
$$= (2)(7)\times10^{(-4)+(-6)} = 14\times10^{-10}$$
$$(340.000)(0.0006) = (3.4\times10^{5})(61\times10^{-5})$$
$$= (3.4)(61)\times10^{5+(-5)} = 207.4\times10^{0} = 207.4$$

مثال 1-4:

$$\frac{0.00047}{0.002} = \frac{47\times10^{-5}}{2\times10^{-3}} = \frac{47}{2}\times10^{(-5)-(-3)} = 23.5\times10^{-2}$$

$$\frac{690.000}{0.00000013} = \frac{69\times10^{4}}{13\times10^{-8}} = \frac{69}{13}\times10^{4-(-8)} = 5.31\times10^{12}$$

1) قوة القوة (Powers): بشكل عام، يعبر عنها:

$$(A\times10^{n})^{m} = A^{m}\times10^{nm}$$

مثال 1-5:

$$(0.00003)^{3} = (3\times10^{-5})^{3} = (3)^{3}\times(10^{-5})^{3} = 27\times10^{-15}$$

$$(90.800.000)^{2} = (9.08\times10^{7})^{2} = (9.08)^{2}(10^{7})^{2} = 82.45\times10^{14}$$

مثال 6-1: أعد كتابة الأرقام التالية مستخدما معاملات العدد العشري: 2400000، 0.00042، 0.000000012.

الحل: $2400000 = 24\times10^{5} = 2.4\times10^{6}$ ، $0.00042 = 42\times10^{-5} = 4.2\times10^{-4}$

$0.000000012 = 12\times10^{-9} = 1.2\times10^{-8}$.

مثال 7-1: احسب ناتج العمليات التالية مستخدما معاملات العدد العشري:

4200 ± 48000 ، $9\times10^{4}\pm3.6\times10^{5}$ ، $(10^{3})(10^{6})$ ، $(10000)(10^{-4})(10^{12})$.

الحل: $4200\pm48000 = 4.2\times10^{3}\pm48\times10^{3} = (4.2\pm48)\times10^{3}$

$$9\times10^{4}\pm3.6\times10^{5} = 9\times10^{4}\pm36\times10^{4} = (9\pm36)\times10^{4}$$

$$(10^{3})(10^{6}) = 1\times10^{9}$$ ،

$$(10000)(10^{-4})(10^{12}) = (10^{4})(10^{-4})(10^{12}) = 10^{12}$$

مثال 8-1: احسب ناتج العمليات التالية مستخدما معاملات العدد العشري:

$\dfrac{10^{38}}{0.000100}$ ، $\dfrac{(100)^{1/2}}{0.01}$ ، $\dfrac{78\times10^{18}}{4\times10^{-6}}$ ، $\dfrac{[(0.003)^{3}][0.00007]^{-2}[(160)^{2}]}{[(200)(0.0008)]^{-1/2}}$

الحل: $\dfrac{10^{38}}{0.000100} = \dfrac{10^{38}}{10^{-4}} = 1\times10^{42}$ ، $\dfrac{(100)^{1/2}}{0.01} = \dfrac{\sqrt{100}}{10^{-2}} = \dfrac{10^{1}}{10^{-2}} = 1\times10^{3}$

$$\frac{78\times10^{18}}{4\times10^{-6}} = \frac{78}{4}\times10^{24} = 1.95\times10^{25}$$

$$\frac{[(0.003)^{3}][0.00007]^{-2}[(160)^{2}]}{[(200)(0.0008)]^{-1/2}} =$$

$$= \frac{[(3\times10^{-3})^{3}][(1.60\times10^{2})^{2}][(2\times10^{2})(8\times10^{-4})]^{1/2}}{[7\times10^{-5}]^{2}}$$

$$= \frac{(27\times10^{-9})(2.56\times10^{4})(16\times10^{-2})^{1/2}}{49\times10^{-10}}$$

$$= \frac{(69.12\times10^{-5})(4\times10^{-1})}{49\times10^{-10}} = \frac{276.48\times10^{-6}}{49\times10^{-10}}$$

$$= 5.64\times10^{4} = 56.4\times10^{3}$$

مثال 9-1: حول 0.05 ثانية إلى مايكرو ثانية و ناناثانية.

الحل:

$$0.05\,\text{s} = 0.05\times10^{6}\ \mu\text{s} = 5\times10^{4}\ \mu\text{s};\ 0.05\,\text{s} = 0.05\times10^{9}\ \text{ns} = 5\times10^{7}\ \text{ns}$$

مثال 1-10: حول 0.1 مايكروفاراد الى بيكافاراد.

الحل: $$0.1\mu\text{F}\left[\frac{10^{-6}\,\text{F}}{1\mu\text{F}}\right]\left[\frac{1\text{pF}}{10^{-12}\,\text{F}}\right] = 0.1\times10^{-6}\times10^{12}\text{pF} = 10^{5}\,\text{pF}$$

مثال 1-11: المايكرو متر ($1\mu m$) يطلق عليه غالباً مايكرون: كم من المايكرومتر في واحد كيلومتر؟

الحل: $$\frac{1\text{km}}{1\mu\text{m}} = \frac{10^{3}\,\text{m}}{10^{-6}\,\text{m}} = 10^{3}\times10^{6} = 10^{9}$$

مثال1-12 : تتدفق شحنة كهربائية عبر مقطع السلك (الشكل (3-1) وقيمتها 0.16 كولوم خلال زمن 64 ميللي ثانية (ms). احسب شدة التيار الكهربائي بالأمبير.

الحل:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{0.16\,\text{C}}{64\times10^{-3}\,\text{s}} = \frac{160\times10^{-3}\,\text{C}}{64\times10^{-3}\,\text{s}} = 2.50\,\text{A}$$

مثال1-13: احسب الزمن اللازم لعبور 4×10^{16} من الالكترونات عبر المقطع السطحي للسلك النحاسي في الدارة الكهربائية، الشكل (3-1)، إذا كانت شدة التيار الكهربائي فيها 5 ميللي أمبير(5mA).

الحل: نقوم بحساب قيمة الشحنة الكهربائية وفق التالي:

$$4\times10^{16}\,\cancel{electron}\left(\frac{1C}{6.242\times10^{18}\,\cancel{electron}}\right) = 6.41\times10^{-3}\,\text{C}$$

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{6.41\times10^{-3}\,\text{C}}{5\times10^{-3}\,\text{A}} = 1.28\,\text{s}$$

مثال1-14: احسب الجهد المطلوب لتحريك شحنة مقدارها $20\ \text{C}$ بين نقطتين إذا كانت الطاقة المطلوبة لذلك تساوي $60\,\text{J}$.

الحل: $V = \frac{W}{Q} = \frac{60\,\text{J}}{20\,\text{C}} = 3\,\text{V}$.

مثال1-15: أوجد الطاقة المبذولة لتحريك شحنة مقدارها $50\mu\text{C}$ بين نقطتين إذا كان الجهد المطبق بين هاتين النقطتين يساوي $6\,\text{V}$.

الحل: $W = QV = (50\times10^{-6}\,\text{C})(6\,\text{V}) = 300\times10^{-6}\,\text{J} = 300\mu\text{J}$

****

دارات المقاومات

Resistors circuits

****

الدكتور المهندس

حسان محمد أحمد

****

المواضيع الرئيسة

١. أنواع الدارات
٢. الفروع، العقد والحلقات
٣. المقاومة أو الممانعة الكهربائية
٤. أنواع المقاومات
٥. الناقلية
٦. قانون أوم
٧. الاستطاعة
٨. الطاقة
٩. كفاءة النظام الكهربائي

أنواع الدارات

- دارات **مطاوعة**: لا تولد ولا تضخم الطاقة.
- دارات **عديمة الضياع**: لا يوجد فيها ضياع للطاقة.
- دارات **خطية**: فيها عناصر خطية ومولدات مستقلة فقط.
- دارات **غير متغيرة مع الزمن**
- دارات **عكسية**: إذا بقيت الاستجابة ذاتها مع تبديل مواقع المولدات والمقاييس في الدارة.
- دارات **بدون ذاكرة**: لا تتضمن عناصر تخزين طاقة.
- دارات **ديناميةً**: تتضمن عناصر تخزين طاقة.
- دارات **ذات عناصر مجمعة**: الأبعاد الفيزيائية لعناصر الدارة مهملة بالمقارنة مع طول موجة الأشارة، فتكون قوانين كرشوف صالحة للتطبيق.
- دارات **ذات عناصر موزعة**: التيار في أي فرع يتغير بتغير نقاط الفرع بين عقدتين.
- **دارات تسلسلية (نفس التيار)، دارات تفرعية (نفس الجهد) و دارات تسلسلية- تفرعية**

الفروع، العقد والحلقات
Branches, Nodes and Loops

الفرع: يمثل عنصر وحيد كالمنبع أو المقاومة أو عدة عناصر موصولة على التسلسل.

بكلام آخر، الفرع يمثل أي عنصر ذو طرفين.

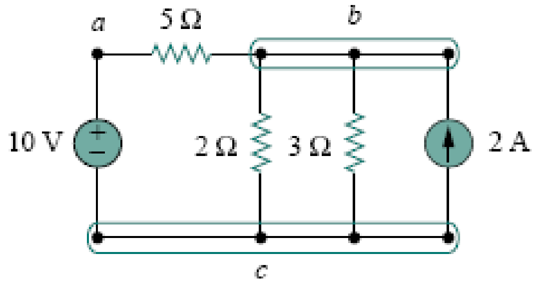
العقدة: هي نقطة اتصال بين فرعين أو أكثر.

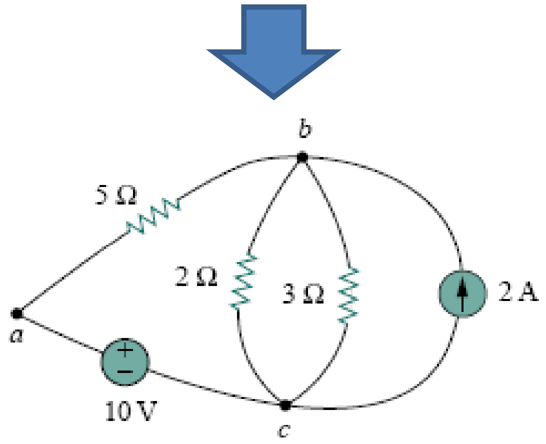
الحلقة: هي أي مسار مغلق في الدارة.

اذا كانت لدينا دارة (شبكة) مكونة من (b) فرع

و من (n) عقدة و من(l) حلقة مستقلة،

فان هذه الدارة تحقق الشرط التالي: $b = l + n - 1$.



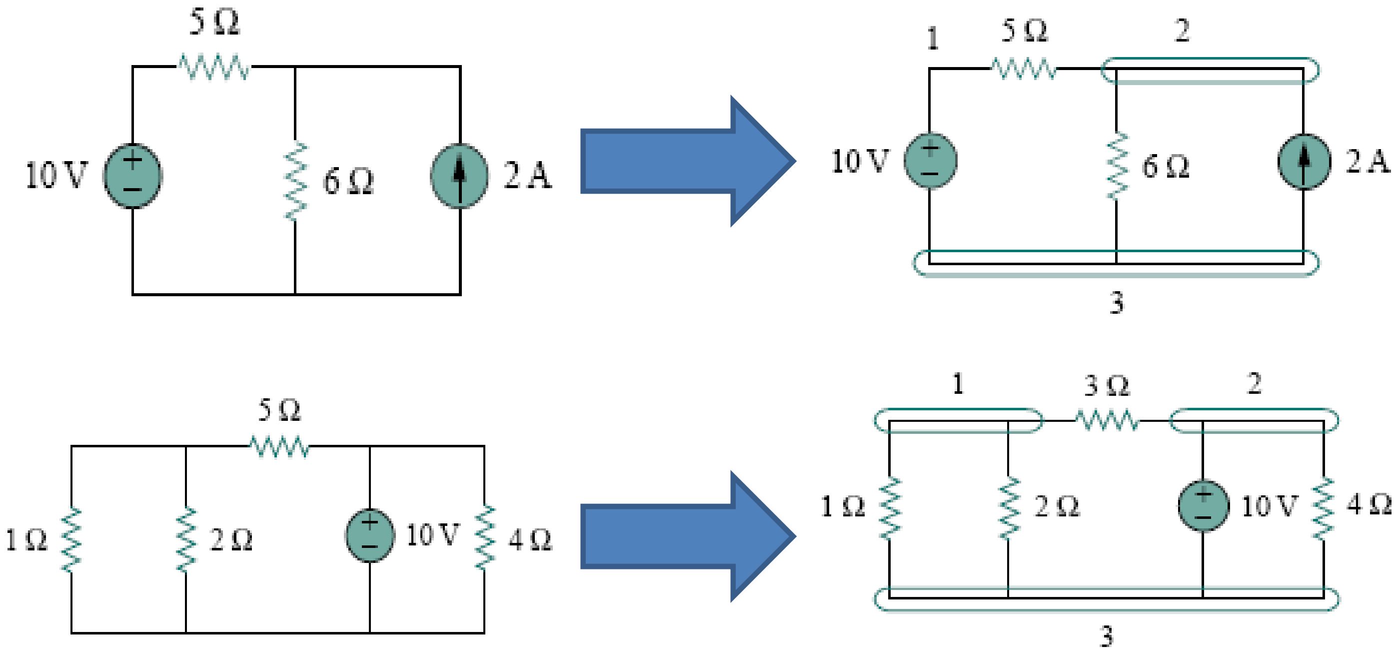


Dr.eng. Hassan Ahmad, istamo48@mail.ru

الفروع، العقد والحلقات

Branches, Nodes and Loops

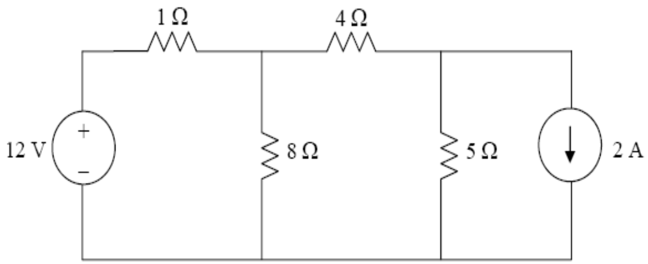
مثال ٢-١: حدد عدد الفروع والعقد في الدارة المبينة في الشكل،
و من ثم بيّن أية عناصر على التسلسل و أية على التفرع

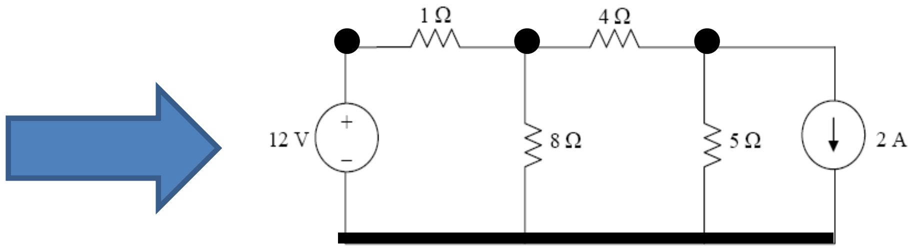


الفروع، العقد والحلقات

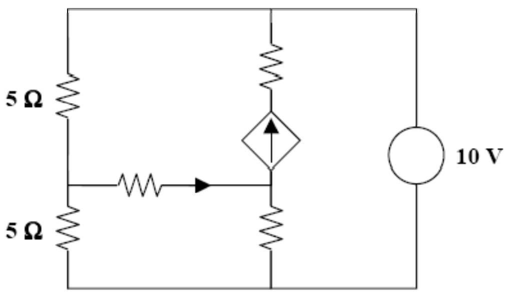
Branches, Nodes and Loops

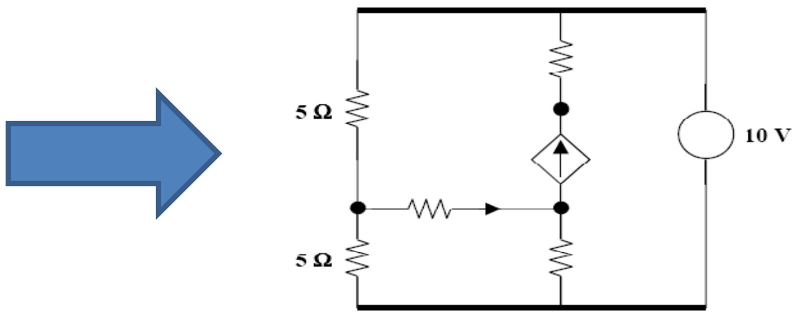
مثال ٢-٢: حدد عدد الفروع والعقد في الدارة المبينة في الشكل،





عدد الفروع = ٦ وعدد العقد = ٤



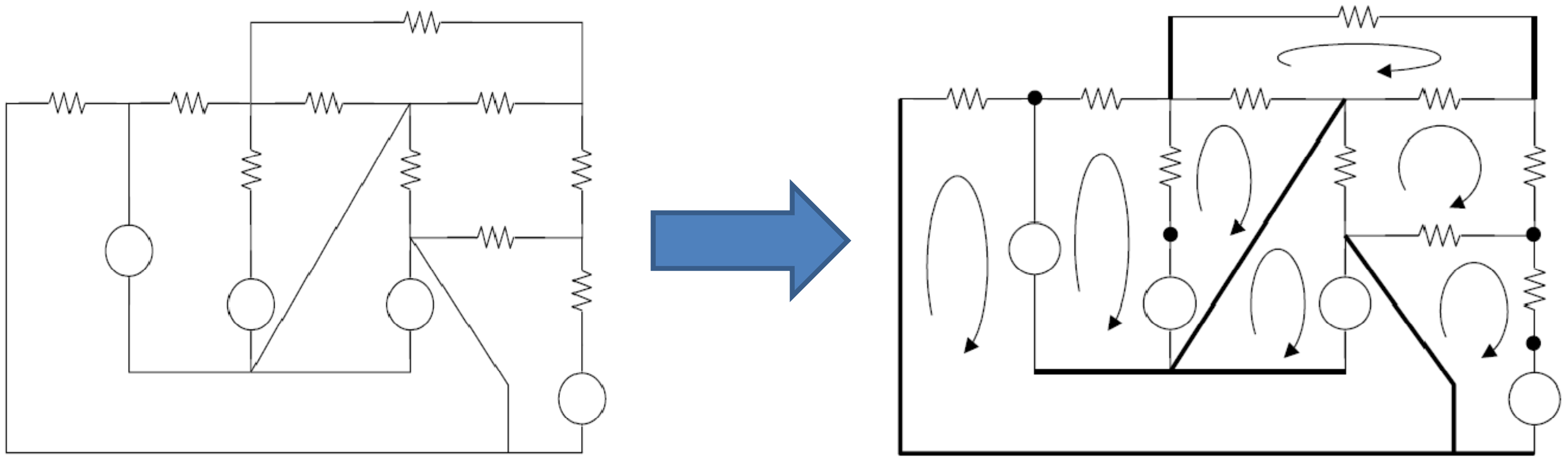


عدد الفروع = ٧ وعدد العقد = ٥

الفروع، العقد والحلقات

Branches, Nodes and Loops

مثال ٢-٣: حدد عدد الفروع والعقد والحلقات في الدارة المبينة في الشكل،



عدد الفروع = ١٤   عدد العقد = ٨   عدد الحلقات = ٧

المقاومة أو الممانعة الكهربائية
Resistance

الممانعة الكهربائية – هي خاصية فيزيائية تعني اعتراض (إعاقة) المادة لمرور الشحنات الكهربائية عبرها. وبشكل عام – **المقاومة**.

المقاومة – هي العنصر الذي يمانع حركة التيار في الدارة ويرمز لها R وتقاس شدة المقاومة بوحدة القياس أوم و يرمز لها (Ω).

تمثل المقاومة في الدارات الكهربائية كما هو مبين في الشكل

ترتبط ممانعة أي مادة (سلك) بأربعة عوامل أساسية:

- نوع المادة (Material)
- طول السلك (Length)
- مساحة مقطع السلك (Cross-Sectional area)
- الخواص الحرارية للمادة (Temperature of material).

الممانعة النوعية للمادة
Resistivity

يتميز كل نوع من المواد بما يسمى الممانعة النوعية للمادة والتي يرمز لها بالحرف اليوناني (ρ ويقرأ بالإنكليزية *rho*). تقاس الممانعة النوعية بوحدة القياس أوم×سنتمتر (Ω·cm) بدرجة حرارة 20ºC وتختلف من مادة إلى أخرى كما هو مبين في الجدول (٢-١).

تحسب ممانعة سلك ناقل وفق العلاقة التالية:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

حيث أن: ρ – الممانعة النوعية، l - طول السلك، A – مساحة مقطع السلك.

إن تغير الممانعة النوعية مرتبط بتغير درجات الحرارة وفق العلاقة التالية:

$$R = \rho \frac{l}{A}\left[1 + \alpha_{20} \Delta T\right]$$

حيث $\Delta T = T_1 - 20°C$ و T_1 - درجة الحرارة الجديدة

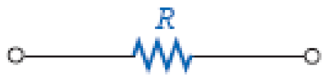
α_{20} - المعامل الحراري للمادة بدرجة حرارة $20°C$

وهذا المعامل مختلف من مادة إلى أخرى كما هو مبين في الجدول (٢-٢).

أنواع المقاومات
Types of Resistors

المقاومة الثابتة (Fixed Resistor)

تتميز هذه المقاومات بثبات قيمتها وتختلف في استخدامها على حسب قدرتها في تمرير التيار الكهربائي فهناك مقاومات ذات أحجام كبيرة تستخدم في التيارات الكبيرة وأخرى صغيرة للتيارات الصغيرة، وتعرف بالمقاومة الكربونية (Carbon Resistor).



المقاومة المتغيرة (Variable Resistor)

مقاومة يمكن تغيير قيمتها حيث تتراوح قيمتها بين الصفر وأقصى قيمة لها.

الناقلية

Conductance

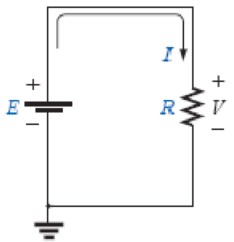
الناقلية أو الموصلية تعرف على أنها قدرة العنصر على تمرير التيار الكهربائي وهي مقلوب المقاومة و يرمز لها G وتقاس بالسيمنس (Siemens)، أي:

$$G = \frac{1}{R} \quad [\text{siemens, S}]$$

وبالتالي، نجد أنه مع ارتفاع قيمة الناقلية فان قيمة المقاومة تقل و العكس صحيح.

أمثلة: (٢-٤) – (٢-٨)

Ohm's Law قانون أوم



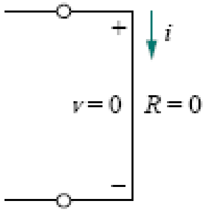
يشير قانون أوم على أن الجهد (V) المطبق على طرفي مقاومة يتناسب مباشرة (طرداً) مع التيار (I) المتدفق عبر هذه المقاومة و كذلك مع قيمة المقاومة نفسها، R. أي:

$$V = IR$$

اتجاه التيار المار عبر أية مقاومة يحدد قطبية (Polarity) هبوط الجهد على هذه المقاومة، كما هو مبين في الشكل.

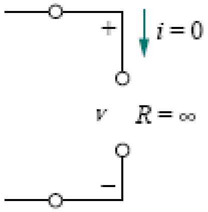
الدارة المقصورة (short circuit):

إذا كانت $R = 0$ وبالتالي $V = IR = 0$



الدارة المفتوحة (open circuit): إذا كانت $R = \infty$ وبالتالي

$$I = \lim_{R \to \infty} \frac{V}{R} = 0$$



الاستطاعة و الطاقة وفق قانون أوم (power & energy by Ohm's Law)

يشير قانون أوم على أن **الاستطاعة** **(P)** تتناسب طرداً مع الجهد (V) المطبق على طرفي عنصر في الدارة ومع التيار (I) المتدفق عبر هذا العنصر، أي: $P = VI$
لكن ينص قانون أوم على أن $V = IR$ ، وبالتالي تحسب الاستطاعة بالعلاقة

$$P = VI = (IR)I = I^2R \quad [\text{watt, W}]$$ أو $$P = EI$$

تعرف **الطاقة** المفقودة أو المكتسبة في أي نظام بأنها الاستطاعة اللازمة لإنتاج الطاقة في أي شكل كان خلال فترة زمنية محددة، ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$W = Pt \quad (\text{wattseconds, Ws, or joules})$$

وحدة قياس الطاقة "واط/ثا" تعتبر صغيرة جداً في التطبيقات العملية، ولذلك تستخدم وحدة القياس "وات/ساعة" ويرمز لها "Wh" أو "كيلووات/ساعة" أو تقاس بالاستطاعة الحصانية (horsepower)

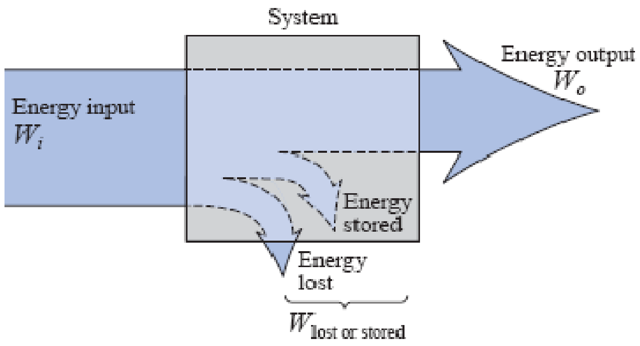
$$\text{Energy (Wh)} = \text{power(W)} \times \text{time (h)}$$

$$\text{Energy (kWh)} = \frac{\text{power(W)} \times \text{time (h)}}{1000}$$

$$1 \text{ horsepower} \cong 746 \text{ watts}$$

مثال ٢-٩

كفاءة النظام الكهربائي (Efficiency)



الحفاظ على الطاقة يتطلب أن تتحقق المعادلة التالية:

Energy input = Energy output + Energy Stored + Energy lost

طاقة الدخل = طاقة الخرج + الطاقة الضائعة والمخزنة في النظام

أي:
$$\frac{W_{in}}{t} = \frac{W_{out}}{t} + \frac{W_{\text{lost or stored by sys}}}{t}$$

وباعتبار أن الاستطاعة $P = W/t$، عندئذ:
$$P_i = P_o + P_{\text{lost or stored}}$$

كفائة (جودة) النظام الكهربائي η (تقرأ "ايتا =eta") تعرف بالعلاقة التالية:
$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \qquad \text{[decimal number]}$$

وباعتبار أن η رقم عشري، فانه يعبر عنها كنسبة مئوية وفق التالي:
$$\eta\% = \frac{P_o}{P_i} \times 100\% \qquad \text{[percent]}$$

أو باستخدام طاقة الدخل والخرج وفق التالي:
$$\eta\% = \frac{W_o}{W_i} \times 100\% \qquad \text{[percent]}$$

ملاحظة: $P_i = P_o \ \text{or} \ P_{\text{lost or stored}} = 0 \Rightarrow \eta = 100\%$

مثال ٢-١٠

نهاية المحاضرة الثانية

The end

****

يتبع

مسائل محلولة

الجدول (2-1) يبين المقاومة النوعية لبعض المواد

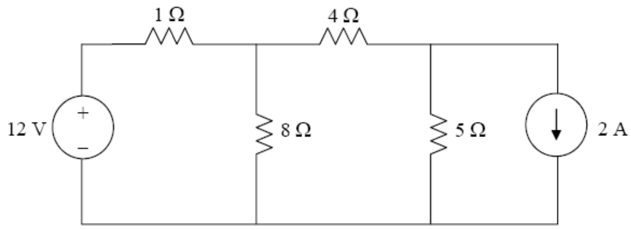
المادة		**الممانعة النوعية** $\rho(\Omega \cdot cm) @ 20^{\circ} C$
الفضة	Silver	1.645×10^{-6}
النحاس	Copper	1.723×10^{-6}
الذهب	Gold	2.443×10^{-6}
ألمنيوم	Aluminum	2.825×10^{-6}
النيكل	Nickel	7.811×10^{-6}
الحديد	Iron	12.299×10^{-6}
الكربون	Carbon	3500×10^{-6}

الجدول (2-2) - المعامل الحراري لبعض المواد

المادة		المعامل الحراري α_{20}
الفضة	Silver	0.0038
النحاس	Copper	0.00393
الذهب	Gold	0.0034
ألمنيوم	Aluminum	0.00391
النيكل	Nickel	0.006
الحديد	Iron	0.0055

أمثلة محلولة

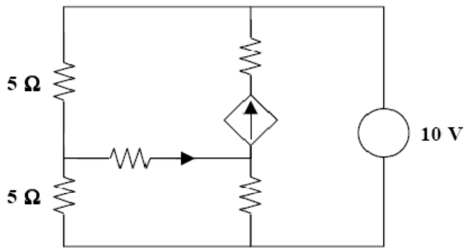
مثال 2-1: حدد عدد الفروع والعقد في الدارة التالية.



الحل:

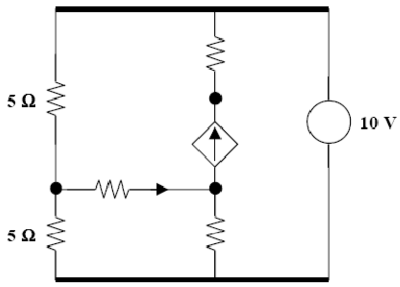
عدد الفروع = 6 وعدد العقد = 4.

مثال2-2: حدد عدد الفروع والعقد في الدارة التالية.

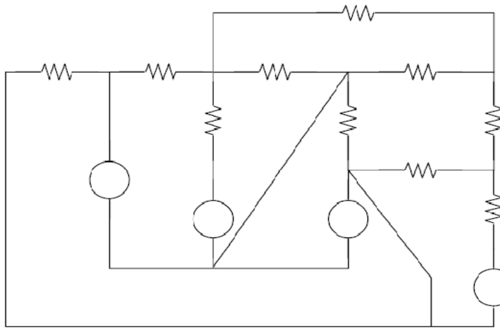


الحل:

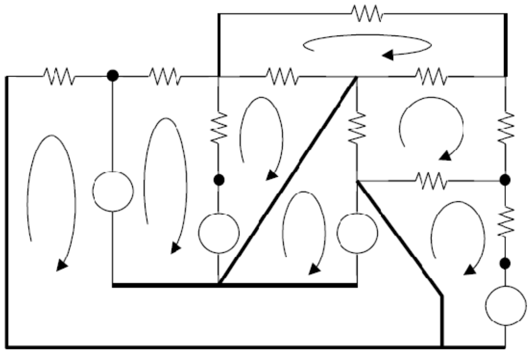
تحتوي الدارة على 7 عناصر:1 منبع مستقل للتيار، 1 منبع مستقل للجهد، و 5 مقاومات. الدارة تشكل 7 فروع و 5 عقد كما هو مشار بالخط العريض:



مثال2-3: حدد عدد الفروع، والعقد والحلقات في الدارة التالية.



عدد العقد = 8، عدد الفروع = 14، عدد الحلقات = 7.



مثال2-4: احسب ناقلية المقاومات التالية: 1 أوم، 50 كيلوأوم، 10 ميغا أوم.

الحل:

$$1\Omega : G = \frac{1}{R} = \frac{1}{1\Omega} = 1\,\text{S}$$

$$50k\Omega : G = \frac{1}{50\,\text{k}\Omega} = \frac{1}{5\times10^{3}\,\Omega} = 0.02\times10^{-3}\,\text{S} = 0.02\,\text{mS}$$

$$10\,M\Omega : G = \frac{1}{10\,\text{M}\Omega} = \frac{1}{10\times10^{6}\,\Omega} = 0.1\times10^{-6}\text{S} = 0.1\,\mu\text{S}$$

مثال 2-5: سلك ناقل طوله 5 م و قطره 1 مم تمر به شحنة كهربائية مقدارها 90 كولوم خلال زمن قدره 2 دقيقة، نتيجة لوجود جهد بين طرفيه مقداره 1.5 فولط، احسب ما يلي:

a. مقاومة السلك

b. الناقلية الكهربائية للسلك

c. الممانعة النوعية للسلك.

الحل: لدينا المعطيات التالية:

$$l = 5\,\text{m}; r = 1\,\text{mm} = 1\times10^{-3}\,\text{m}; Q = 90\,\text{C}; t = 2\times60 = 120\,\text{s}; V = 1.5\,\text{V}$$

a. $$Q = It \therefore\ I = \frac{Q}{t} = \frac{90\,\text{C}}{120\,\text{s}} = 0.75\,\text{A} \quad \therefore\ R = \frac{V}{I} = \frac{1.5\ \text{V}}{0.75\,\text{A}} = 2\ \Omega$$

b. $$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{2} = 0.5\,\text{S}$$

c. $$\rho = R\frac{A}{l} = (2)\frac{\left[\pi(1\times10^{-3})^{2}\right]}{5} = 3.14\times10^{-7}\,\Omega\cdot\text{m}$$

مثال2-6: ناقل دائري من النحاس مقاومته 5 أوم و طوله 150 م، احسب قطر هذا الناقل إذا علمت أن الممانعة النوعية للنحاس 1.723×10^{-6} cm.

الحل:

لدينا المعطيات التالية: $R = 5\Omega; l = 150\,\text{m}; \rho = 1.723\times10^{-6}\,\text{cm}$

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow A = \rho\frac{l}{R};\ \ A = \pi r^{2} \Rightarrow A = (1.723\times10^{-6})\frac{150}{5} = 5.1\times10^{-5}\,\text{cm}^{2}$$

$$r^2 = \frac{A}{\pi} = \frac{5.1\times10^{-5}}{3.14} = 1.62\times10^{-5}\ \text{cm}^2 \Rightarrow r = 4.02\times10^{-3}\ \text{cm}$$
$$d = 2r = 2(4.02\times10^{-3}) = 8.04\times10^{-3}\ \text{cm} = 0.08\,\text{mm}$$

مثال2-7: سلك من النحاس طوله 5 م و ممانعته عند درجة الغرفة تساوي 34.12 أوم. احسب مقاومة السلك عند درجة الحرارة $-20°C$، إذا علمت أن المعامل الحراري للنحاس يساوي 0.00393.

الحل: نفترض أن درجة حرارة الغرفة تساوي $27°C$:

$$R_{27} = R_{-20}\left[1+\alpha(T_{27}-T_{-20})\right] = R_{-20}\left[1+0.00393(27-(-20))\right]$$
$$R_{-20} = \frac{R_{27}}{\left[1+0.00393(47)\right]} = \frac{34.12}{\left[1+1.18471\right]} = 28.8\Omega$$

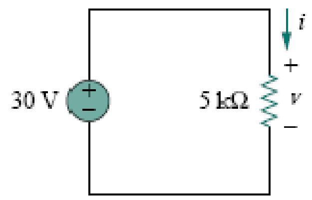
مثال2-8: سلك طوله 32.3 م ومساحة مقطعه 5 مم^2 و ممانعته عند درجة حرارة الصفر المئوي تساوي 120 أوم وعندما ارتفعت درجة الحرارة إلى $50°C$ أصبحت ممانعته 144 أوم. احسب كلاً من: معامل الممانعة الحراري للسلك و الممانعة النوعية له عند الدرجة $0°C$.

الحل:

a.
$$R = R_0\left[1+\alpha(\Delta T)\right] = 120\left[1+\alpha(50-0)\right]$$
$$144 = 120\left[1+50\alpha\right] \Rightarrow \alpha = \frac{24}{6000} = 0.004°C$$

b.
$$\rho = R\frac{A}{l}, \quad \rho_0 = R_0\frac{A}{l} \Rightarrow$$
$$\rho_0 = (0.12\,\text{k}\Omega)\frac{5\times10^{-6}}{32.3} = 18.6\times10^{-6}\Omega\cdot\text{m} = 18.6\times10^{-4}\Omega\cdot\text{cm}$$

مثال2-9: لتكن الدارة المبينة في الشكل، احسب التيار i والناقلية G و الاستطاعة P.



الحل:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{5\times10^3} = 0.2\ \text{mS} \qquad i = \frac{v}{R} = \frac{30}{5\times10^3} = 6\ \text{mA}$$

$p = vi = 30(6\times10^{-3}) = 180\ \text{mW}$ أو $p = i^2R = (6\times10^{-3})^2 5\times10^3 = 180\ \text{mW}$ أو

$$p = v^2G = (30)^2 0.2\times10^{-3} = 180\ \text{mW}$$

مثال2-10: لدينا محرك استطاعته 2 حصان ($2\,\text{hp}$) يعمل بكفاءة (فعالية) 75 %. احسب استطاعة الدخل مقدرة بالواط. إذا كان الجهد المطبق 220 فولت احسب تيار الدخل.

الحل:

$$\eta\% = \frac{P_o}{P_i} \times 100\%$$

$$0.75 = \frac{(2\ \text{hp})(746\ \text{W/hp})}{P_i}$$

and $$P_i = \frac{1492\ \text{W}}{0.75} = \mathbf{1989.33\ W}$$

$$P_i = EI \quad \text{or} \quad I = \frac{P_i}{E} = \frac{1989.33\ \text{W}}{220\ \text{V}} = \mathbf{9.04\ A}$$

مثال2-11: احسب استطاعة الخرج لمحرك مقدرة بالحصان إذا كانت فعالية المحرك 80 % و تيار الدخل 8 أمبير والجهد المطبق 220 فولت.

الحل:

$$\eta\% = \frac{P_o}{P_i} \times 100\%$$

$$0.80 = \frac{P_o}{(120\ \text{V})(8\ \text{A})}$$

and $$P_o = (0.80)(120\ \text{V})(8\ \text{A}) = 768\ \text{W}$$

with $$768\ \cancel{\text{W}}\left(\frac{1\ \text{hp}}{746\ \cancel{\text{W}}}\right) = \mathbf{1.029\ hp}$$

مثال2-11: إذا كانت $\eta = 0.85$، احسب طاقة الخرج إذا كانت الطاقة المطبقة على الدخل تساوي $50\,\text{J}$.

الحل:

$$\eta = \frac{W_o}{W_i} \Rightarrow W_o = \eta W_i$$

$$= (0.85)(50\ \text{J})$$

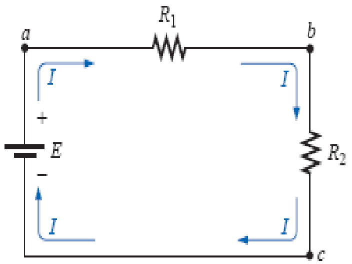
$$= \mathbf{42.5\ J}$$

الدارات التسلسلية و قانون كرشوف للجهد

(Series circuits & Kirchhoff's Voltage law)

١. الدارة التسلسلية
٢. توصيل المقاومات على التسلسل.
٣. توصيل مصادر الجهد على التسلسل.
٤. قانون كرشوف للجهد.
٥. قانون قاسم الجهد.

الدارة التسلسلية



الدارة التسلسلية – هي الدارة التي تتألف من أي عدد من العناصر ربطت على التسلسل مع بعضها البعض بنقاط طرفية (مثل: a, b, c)، بحيث تشكل على الأقل مسار واحد مغلق الذي من خلاله يمكن أن تتدفق شحنة كهربائية، كما هو مبين في الشكل.

أهم خواص الدارة التسلسلية:

❖ التيار المار عبر مصدر الجهد هو نفس التيار المار في أية نقطة من الدارة التسلسلية.

❖ في أية دارة، إذا كان هناك عنصران مرتبطان على التسلسل، فان التيار يجب أن يكون نفسه. ولكن العكس غير صحيح، أي إذا كان التيار هو نفسه في عنصران مرتبطان مع بعضهما البعض، فليس من الضروري إن يكون هذان العنصران على التسلسل.

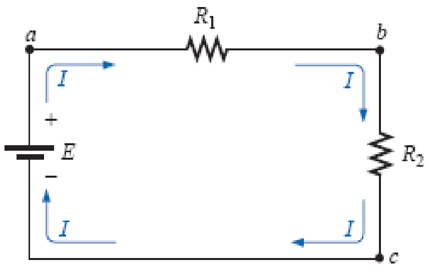
توصيل المقاومات على التسلسل
(Resistors in Series)

المقاومة الكلية في دارة تسلسلية تساوي مجموع المقاومات في هذه الدارة، كما هو مبين في العلاقة:

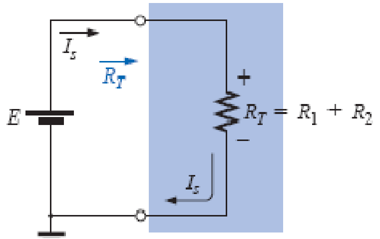
$$R_T = R_1 + R_2$$

وبشكل عام:

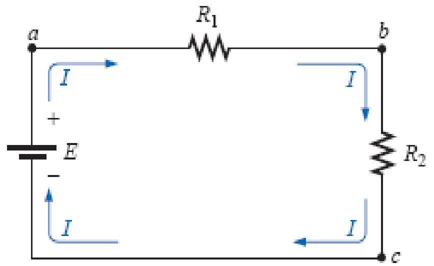
$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_N$$



بعد حساب المقاومة الكلية، يمكن إعادة رسم الدارة ممثلة بالمقاومة الكلية كما هو مبين في الشكل.



تطبيقات قانون أوم في الدارات التسلسلية

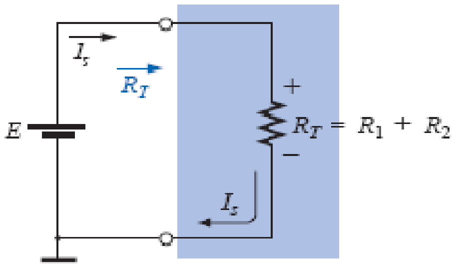


التيار الصادر عن المنبع (I_s):

$$I_s = \frac{E}{R_T} = I \quad [A]$$

الجهد على كل مقاومة:

$$V_1 = IR_1,\ V_2 = IR_2, \dots, V_N = IR_N \quad [V]$$



الاستطاعة في دارات التسلسل:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N$$

الاستطاعة المنقولة من المصدر:

$$P_E = EI_s \quad [W]$$

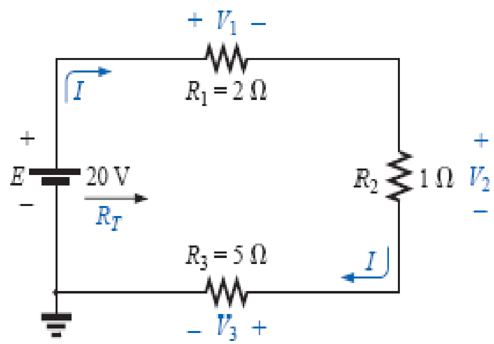
الاستطاعة المبددة في كل مقاومة:

$$P_1 = V_1 I_1,\ P_2 = V_2 I_2, P_3 = V_3 I_3, \dots, P_N = V_N I_N \quad [W]$$

$$P_1 = I_1^2 R_1,\ P_2 = I_2^2 R_2, P_3 = I_3^2 R_3, \dots, P_N = I_N^2 R_N \quad [W]$$

مثال ٥-١

لدينا الدارة التسلسلية المبينة في الشكل، احسب:

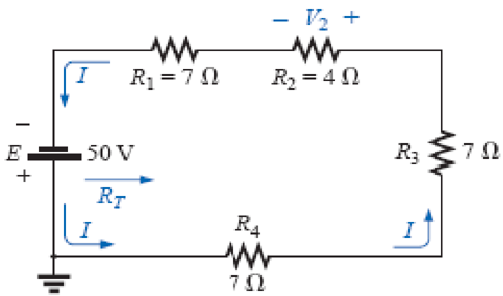


a. المقاومة الكلية لهذه الدارة،
b. التيار المنبعث عن منبع التغذية، .
c. الجهد عبر كل مقاومة.
d. الاستطاعة المنقولة من البطارية، .
e. الاستطاعة المبددة في كل مقاومة.
f. تحقق من تساوي قيمة الاستطاعة المنقولة مع قيمة الاستطاعة المبدد

****

مثال ٥-٢

لدينا الدارة التسلسلية المبينة في الشكل.احسب:

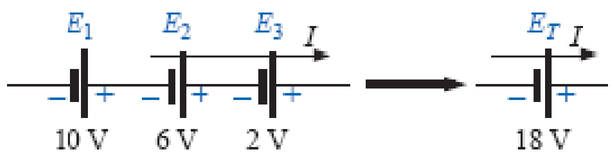


a. المقاومة الكلية لهذه الدارة R_T ،
b. التيار المنبعث عن منبع التغذية I_s ،
c. الجهد V_2

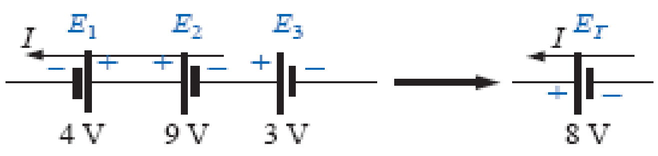
مصادر الجهد على التسلسل

Voltage sources in Series

يتم توصيل مصادر الجهد على التسلسل بحيث يكون القطب الموجب للمصدر الأول متصل مع القطب السالب للمصدر الثاني الذي يليه ثم القطب الموجب للمصدر الثاني يكون متصلاً مع القطب السالب للمصدر الثالث الذي يليه وهكذا، كما هو مبين في الشكل.

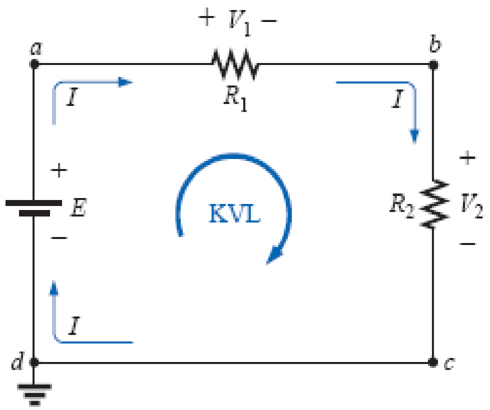


$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 = (10+6+2)\text{V} = 18\text{V}$$



$$E_T = E_2 + E_3 - E_1 = (9+3-4)\text{V} = 8\text{V}$$

قانون كرشوف للجهد
Kirchhoff's Voltage Law - KVL



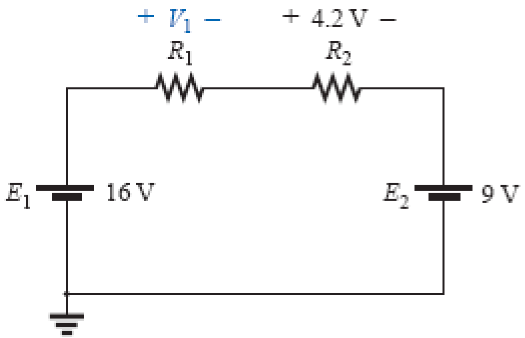
" المجموع الجبري للجهود المرتفعة (Rise) و المنخفضة (Drop) في حلقة مغلقة (Closed loop) أو في مسار مغلق (Closed path) يساوي الصفر".

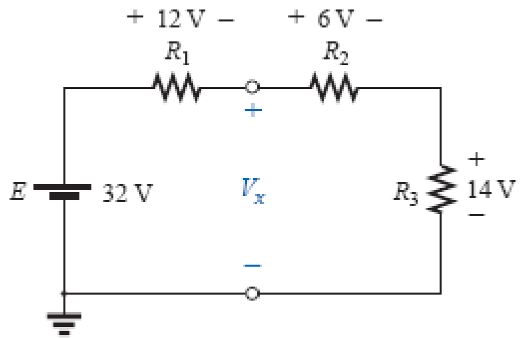
$$\sum V_{\text{rises}} = \sum V_{\text{drops}} \quad \& \quad \sum V = 0 \quad [\text{in closed loop}]$$

$$+E - V_1 - V_2 = 0 \quad \& \quad E = V_1 + V_2$$

مثال ٥-٣

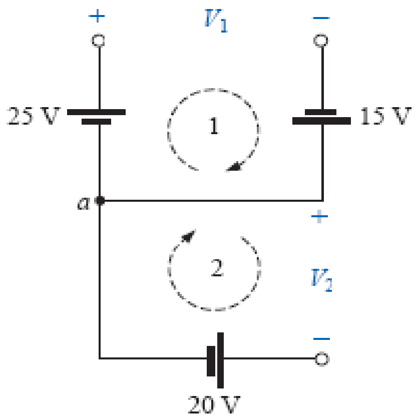
احسب قيمة الجهود غير المعروفة في الدارات التالية:





****

مثال ٥-٤ احسب كلاً من V_1 و V_2 في الدارة التالية:



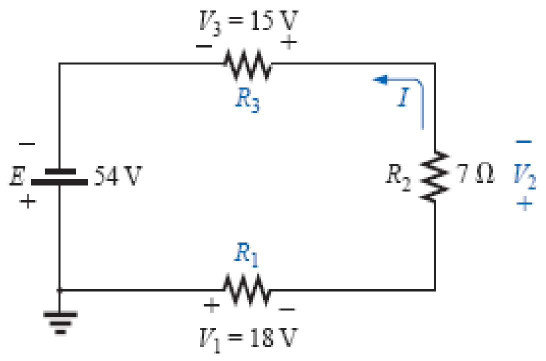
مثال ٥-٥

لدينا الدارة التسلسلية التالية، فاحسب:

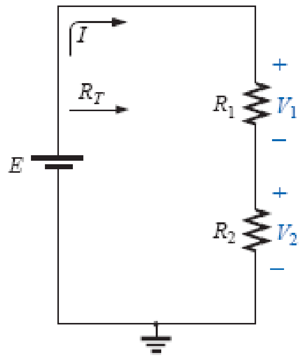
a. الجهد V_2 باستخدام قانون كرشوف للجهد.

b. شدة التيار I.

c. المقاومات R_1 و R_3.



قانون قاسم الجهد
Voltage Divider Rule - VDR



في الدارات التسلسلية نجد أن جهد المصدر ينقسم بين جميع العناصر المقاومة المربوطة على التسلسل وذلك وفقا لشدة مستوى المقاومة. وبالتالي يكون عمل دارات التسلسل شبيه بعمل قواسم الجهد (Voltage Dividers) الداخل للدارة.
لاستنتاج قانون قاسم الجهد (VDR) نستخدم الدارة التسلسلية المبينة في الشكل.

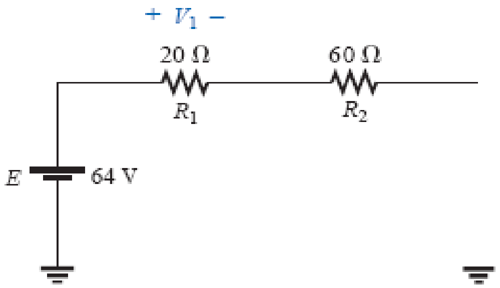
$$V_1 = IR_1 = \left(\frac{E}{R_T}\right)R_1 = \frac{R_1 E}{R_T},\ V_2 = IR_2 = \left(\frac{E}{R_T}\right)R_2 = \frac{R_2 E}{R_T}$$ و $$R_T = R_1 + R_2, \quad I = E/R_T$$

الصيغة العامة لقانون VDR:

$$V_x = R_x \frac{E}{R_T}$$

مثال ٥-٦

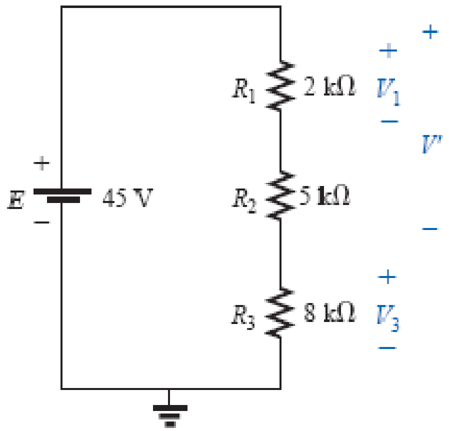
باستخدام قانون VDR، احسب الجهد V_1 في الدارة التسلسلية التالية.



****

مثال ٥-٧

باستخدام قانون VDR، احسب كلاً من الجهد V_1 و V_3 في الدارة التسلسلية التالية.



نهاية المحاضرة الثالثة

The end

****

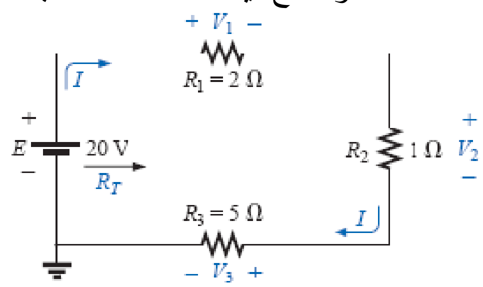
يتبع

مسائل محلولة

أمثلة محلولة

مثال5 -1: لدينا الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (5-7)، احسب:

a. المقاومة الكلية لهذه الدارة، R_T
b. التيار المنبعث عن منبع التغذية، I_s.
c. الجهد عبر كل مقاومة.
d. الاستطاعة المنقولة من البطارية، P_E.
e. الاستطاعة المبددة في كل مقاومة.
f. تحقق من تساوي قيمة الاستطاعة المنقولة مع قيمة الاستطاعة المبددة في الدارة.



الشكل (5-7) – دارة المثال 5-1

الحل:

a. $R_T = R_1 + R_2 + R_3 = (2+1+5)\Omega = 8\Omega$

b. $I_s = \dfrac{E}{R_T} = \dfrac{20\,\text{V}}{8\,\Omega} = 2.5\,\text{A}$

c.

$$V_1 = IR_1 = (2.5\text{A})(2\Omega) = 5\text{V}$$
$$V_2 = IR_2 = (2.5\text{A})(1\Omega) = 2.5\text{V}$$
$$V_3 = IR_3 = (2.5\text{A})(5\Omega) = 12.5\text{V}$$

d. $P_E = P_{\text{del}} = EI_s = (20\text{V})(2.5\text{A}) = 50\text{W}$

e.

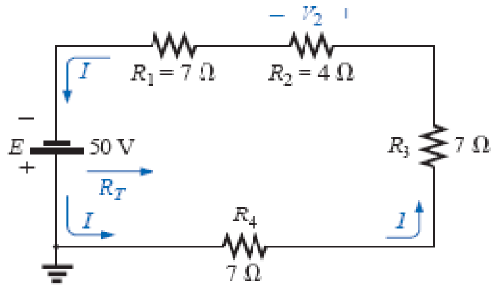
$$P_1 = V_1 I_1 = (5\text{V})(2.5\text{A}) = 12.5\text{W},$$
$$P_2 = V_2 I_2 = (2.5\text{V})(2.5\text{A}) = 6.25\text{W}$$
$$P_3 = V_3 I_3 = (12.5\text{V})(2.5\text{A}) = 31.25\text{W}$$

f.

$$P_E = P_1 + P_2 + P_3$$
$$50\text{W} = 12.5\text{W} + 6.25\text{W} + 31.25\text{W} = 50\text{W}$$

النتيجة محققة.

مثال5 -2: لدينا الدارة المبينة في الشكل (5-8)،



الشكل (8-5) – دارة تسلسلية

احسب: المقاومة الكلية لهذه الدارة، R_T ، و التيار المنبعث عن منبع التغذية، I_s وكذلك الجهد V_2.

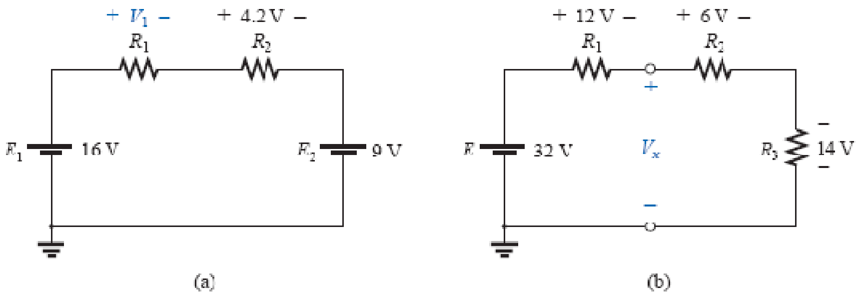
الحل: لاحظ أن اتجاه التيار المترتب عن البطارية (مصدر التغذية) و كذلك قطبية هبوط الجهد على المقاومة R_2 محددان وفق اتجاه التيار. بالإضافة إلى أن $R_1 = R_3 = R_4$.

$$R_T = NR_1 + R_2 = (3)(7\Omega) + 4\Omega = 25\Omega$$

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{50\,\text{V}}{25\,\Omega} = 2\,\text{A}$$

$$V_2 = IR_2 = (2\text{A})(4\Omega) = 8\,\text{V}$$

مثال5 -3: احسب قيمة الجهود غير المعروفة في الدارات المبينة في الشكل (5-11).



الشكل (5-11) – دارات تسلسلية

الحل: بتطبيق قانون كرشوف على الدارة (*a*) نجد أن:

$$+E_1 - V_1 - V_2 - E_2 = 0$$

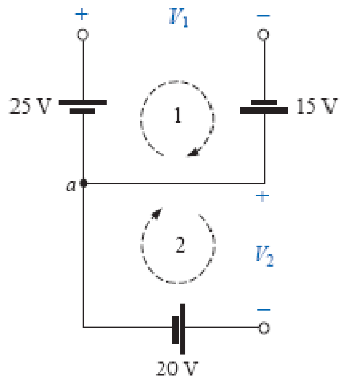
وبالتالي $V_1 = E_1 - V_2 - E_2 = (16 - 4.2 - 9)\text{V} = 2.8\,\text{V}$

وبتطبيق قانون كرشوف على الدارة (*b*) نجد أن:

$$+E_1 - V_1 - V_x = 0 \quad [\text{loop}\, E, R_1] \;\; or \;\; +V_x - V_2 - V_3 = 0 \quad [\text{loop}\, R_2, R_3]$$

وبالتالي: $V_x = E_1 - V_1 = 32\,\text{V} - 12\,\text{V} = 20\,\text{V}$ أو $V_x = V_2 + V_3 = (6+14)\,\text{V} = 20\,\text{V}$

مثال 5-4: احسب V_1 و V_2 في الدارة المبينة في الشكل (5-12).



الشكل (12-5) – تشكيلة من عدة مصادر للجهد

الحل: لأجل المسار 1 و انطلاقاً من النقطة a و مع اتجاه عقارب الساعة (Clockwise)، نجد:

$$+25\,\text{V} - V_1 + 15\,\text{V} = 0 \quad \Rightarrow V_1 = 40\,\text{V}$$

وللمسار 2 و انطلاقاً من النقطة a و مع اتجاه عقارب الساعة، نجد:

$$-V_2 - 20\,\text{V} = 0 \quad \Rightarrow V_2 = -20\,\text{V}$$

الإشارة السالبة في هذا الجواب تعني أن القطبية الطبيعية للجهد V_2 هي عكس ما هو محدد في الدارة.

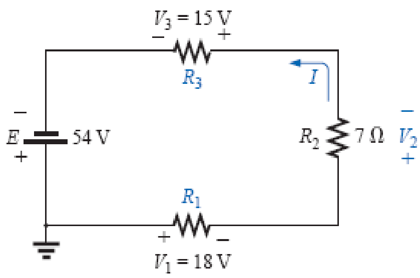
ملاحظة: عند تطبيق قانون كرشوف فان الدور الأساسي و الرئيسي لقطبية الجهد (في الارتفاع و الانخفاض) و ليس لنوع العنصر في الدارة.

مثال 5-5: لدينا الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (13-5). احسب:

a. الجهد V_2 باستخدام قانون كرشوف للجهد.

b. شدة التيار I.

c. المقاومات R_1 و R_3.



الشكل (13-5) – دارة تسلسلية

الحل:

a. بتطبيق قانون كرشوف و مع اتجاه عقارب الساعة:

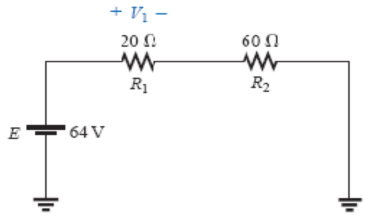
$$-E + V_3 + V_2 + V_1 = 0 \text{ or } E = +V_3 + V_2 + V_1$$

$$V_2 = E - V_1 - V_3 = (54 - 18 - 15)\text{V} = 21\text{V}$$

b. $I = \dfrac{V_2}{R_2} = \dfrac{21\,\text{V}}{7\,\Omega} = 3\,\text{A}$

c. $R_1 = \dfrac{V_1}{I} = \dfrac{18\,\text{V}}{3\,\text{A}} = 6\,\Omega,\ R_3 = \dfrac{V_3}{I} = \dfrac{15\,\text{V}}{3\,\text{A}} = 5\,\Omega$.

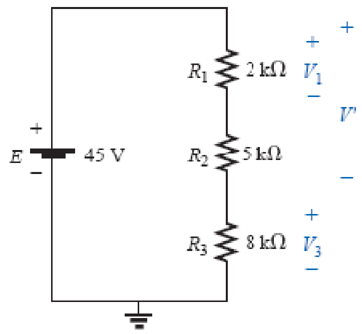
مثال 5-6: باستخدام قانون VDR، احسب الجهد V_1 في الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (5-16).



الشكل (5-16) – دارة المثال 4-6

الحل: $$V_1 = R_1 \frac{E}{R_T} = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} = \frac{(20\Omega)(64\text{V})}{20\Omega + 60\Omega} = 16\text{V}$$

مثال 5-7: باستخدام قانون VDR، احسب كلاً من الجهد V_1 و V_3 في الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (5-17).



الشكل (5-17) – دارة المثال 4-7

الحل: $$V_1 = R_1 \frac{E}{R_T} = \frac{(2\text{k}\Omega)(45\text{V})}{2\text{k}\Omega + 5\text{k}\Omega + 8\text{k}\Omega} = \frac{(2\times 10^3\Omega)(45\text{V})}{15\times 10^3\Omega} = 6\text{V}$$

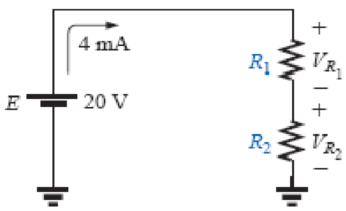
$$V_3 = R_3 \frac{E}{R_T} = \frac{(8\text{k}\Omega)(45\text{V})}{15\text{k}\Omega} = \frac{(8\times 10^3\Omega)(45\text{V})}{15\times 10^3\Omega} = 24\text{V}$$

يمكن توسيع مفهوم VDR على عنصرين أو أكثر من العناصر التسلسلية، كما هو مبين في الدارة من خلال الجهد V' والذي يمكن حسابه كالتالي:

$$V' = \frac{R'E}{R_T} = \frac{(R_1 + R_2)E}{R_T} = \frac{(2\text{k}\Omega + 5\text{k}\Omega)(45\text{V})}{15\text{k}\Omega} = 21\text{V}$$

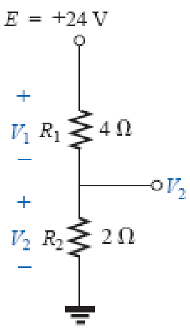
Homework

مثال 5-8: إذا كان قانون VDR في الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (5-18) على الشكل التالي: $V_{R_1} = 4V_{R_2}$، احسب قيمة المقاومات R_1 و R_2.



الشكل (5-18) – دارة المثال 4-8

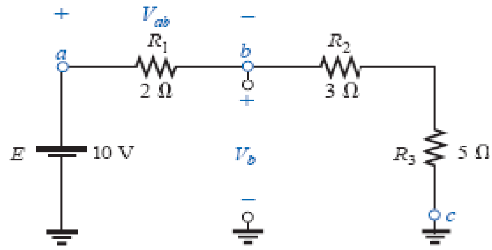
مثال 5-9: باستخدام قانون VDR، احسب كلاً من الجهد V_1 و V_2 في الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (5-23).



الشكل (5-23) – دارة المثال 4-9

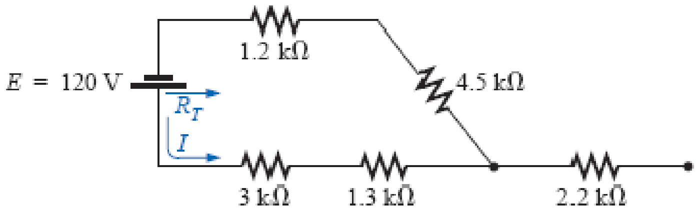
مثال 5-10: لدينا الدارة المبينة في الشكل (5-24)، احسب:

a. الجهد بين النقطتين a و b (V_{ab}).
b. الجهد بين النقطة b و الأرض (V_b).
c. الجهد في النقطة c (V_c)



الشكل (5-24) – دارة المثال 5-10

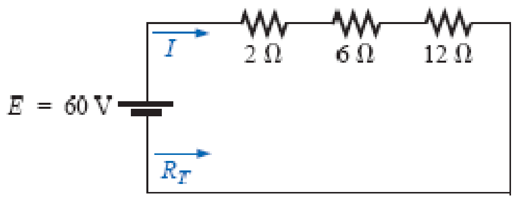
مثال 5-11: احسب المقاومة الكلية (R_T) و التيار (I) للدارة المبينة في الشكل (5-25).



الشكل (5-25) – دارة المثال 5-11

مثال 5-12: لتكن الدارة المبينة في الشكل (5-26)، احسب:

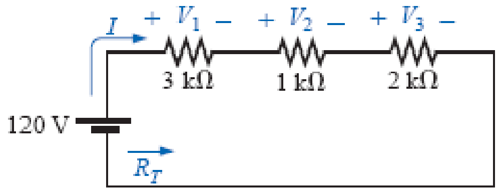
a. المقاومة الكلية (R_T).
b. التيار الكلي I_s.
c. الجهد عبر كل عنصر مقاوم في الدارة.



الشكل (5-26) – دارة المثال 5-12

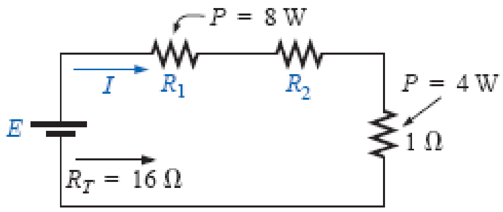
مثال 5-13: لتكن الدارة المبينة في الشكل (5-27)، احسب:

a. المقاومة الكلية R_T، التيار I و الجهد عبر كل مقاومة.
b. الاستطاعة المنقولة إلى كل مقاومة.
c. الاستطاعة الكلية.
d. الاستطاعة المنقولة من قبل المصدر



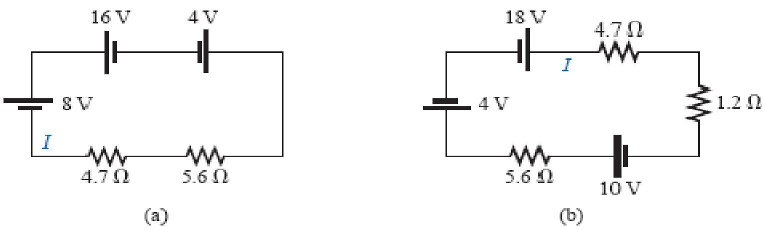
الشكل (27-5) – دارة المثال 13-5

مثال 14-5: احسب الكميات المجهولة المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل (28-5) وذلك باستخدام المعطيات الواردة فيها:



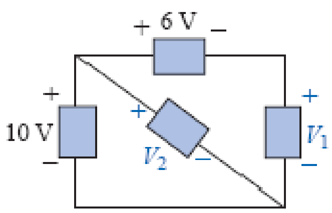
الشكل (28-5) – دارة المثال 14-5

مثال 15-5: احسب شدة التيار I و حدد اتجاهه في كل من الدارات المبينة في الشكل (29-5).



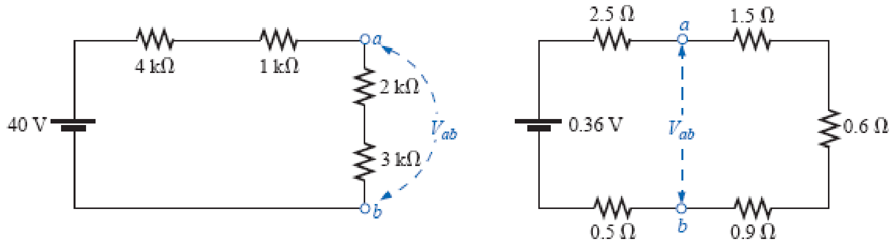
الشكل (29-5) – دارة المثال 15-5

مثال 16-5: باستخدام قانون كرشوف للجهد، احسب قيم الجهود غير المعروفة المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل (30-5).



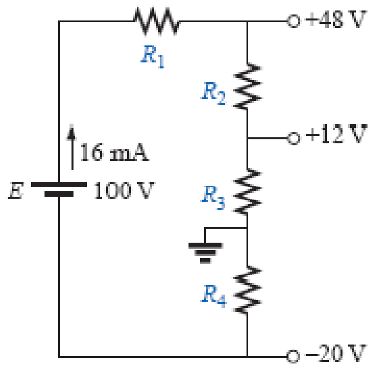
الشكل (30-5) – دارة المثال 15-5

مثال 5-17: باستخدام قانون VDR احسب الجهد المشار إليه في الدارة المبينة في الشكل (5-31).



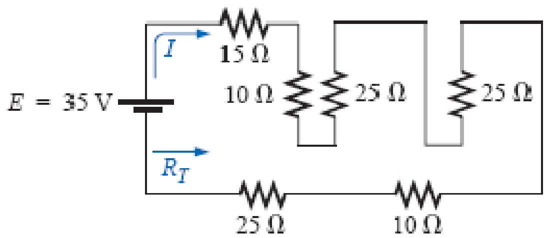
الشكل (5-31) – دارة المثال 5-17

مثال 5-18: احسب قيم المقاومات R_1, R_2, R_3, R_4 في دارة قاسم الجهد المبينة في الشكل (5-32) وذلك إذا كان منبع التيار يساوي 16 ميلي أمبير.



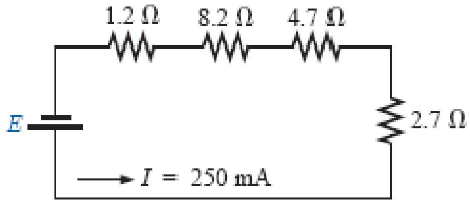
الشكل (5-32) – دارة المثال 5-18

مثال 5-19: احسب المقاومة الكلية (R_T) و التيار (I) للدارة المبينة في الشكل (5-33).



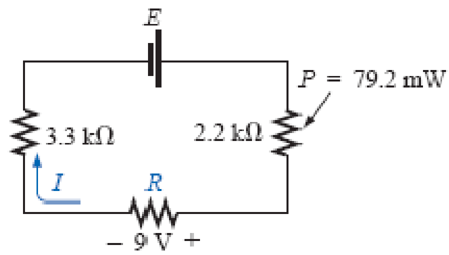
الشكل (5-33)

مثال 5-20: أوجد قيمة مصدر الجهد اللازم لتوليد التيار المشار إليه في الدارة المبينة في الشكل (5-34).



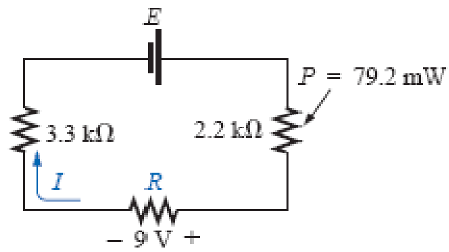
الشكل (34-5)

مثال 21-5: لدينا الدارة المبينة في الشكل (35-5). أحسب كلاً من التيار I ، قيمة مصدر الجهد E ، المقاومة المجهولة R والجهد عبر كل عنصر.



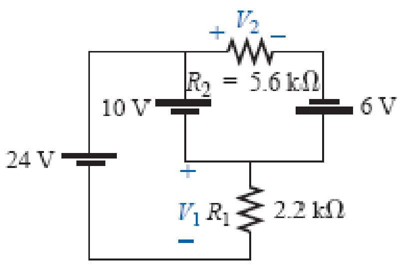
الشكل (35-5)

مثال 22-5: أوجد قيم العناصر المجهولة المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل (36-5) مستخدماً المعطيات المبينة في الدارة.



الشكل (36-5)

مثال 23-5: باستخدام قانون كرشوف للجهد، احسب قيم الجهود غير المعروفة المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل (37-5).



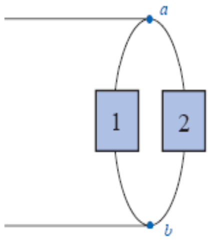
الشكل (5-37)

الدارات التفرعية و قانون كرشوف للتيار

(Parallel circuits & Kirchhoff's Current law)

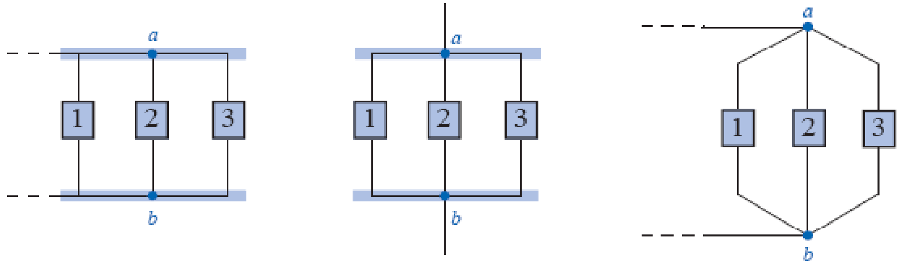
١. توصيل المقاومات على التفرع
٢. المقاومة الكلية والناقلية الكلية
٣. دارة التفرع
٤. قانون كرشوف للتيار
٥. قانون قاسم التيار
٦. مصادر الجهد على التوازي
٧. الدارة المفتوحة و الدارة المغلقة

توصيل المقاومات على التفرع
Resistors in Parallel

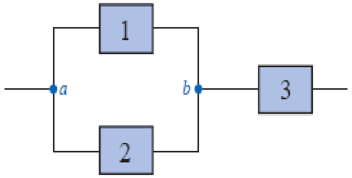


❖ يكون عنصران أو فرعان أو دارتان على التفرع إذا كان لديهما نقطتان مشتركتان، كما هو مبين في الشكل

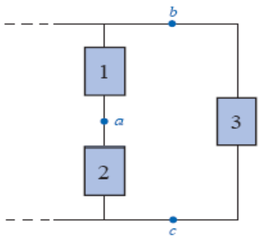
❖ بعض طرق وصل المقاومات على التفرع، حيث توجد نقطتين مشتركتين بين جميع العناصر.



(a) (b) (c)

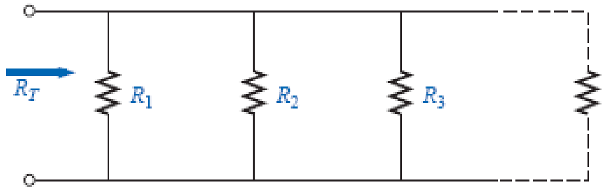


❖ طريقة توصيل تسمى " تفرع- تسلسل" (Parallel-Series).



❖طريقة توصيل تسمى "تسلسل - تفرع" (Series-Parallel).

المقاومة الكلية والناقلية الكلية
Total Resistance & Conductance



المقاومة الكلية لمجموعة مقاومات على التفرع:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_N}$$

حالات خاصة:

- إذا كانت جميع المقاومات في الدارة متساوية القيمة:

$$R_T = \frac{R}{N}$$

حيث أن N عدد المقاومات في الدارة، و R قيمة المقاومة الواحدة.

- إذا كانت الدارة تحتوي على مقاومتان فقط على التوازي

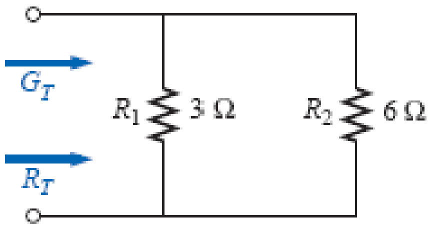
$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

الناقلية: هي مقلوب المقاومة وتسمى ناقلية المقاومة $G = 1/R$

الناقلية الكلية لمقاومات ربطت على التوازي في دارة:

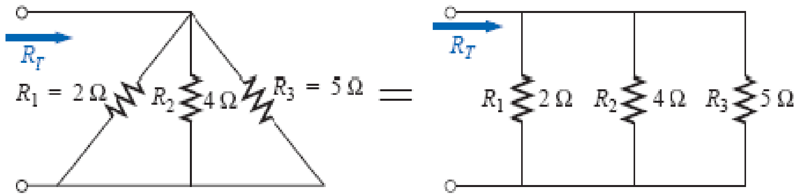
$$G_T = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_N \quad \text{[siemens, S]}$$

مثال -١: احسب المقاومة الكلية و الناقلية لدارة التوازي المبينة في الشكل

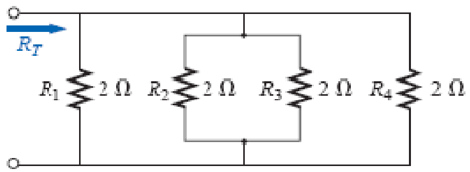


****

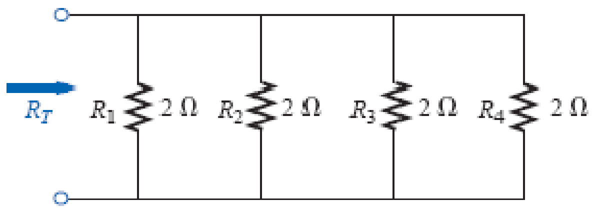
مثال -٢: احسب المقاومة الكلية لدارة التوازي المبينة في الشكل



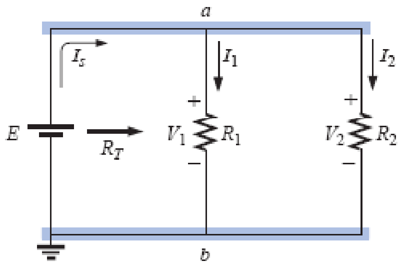
****



مثال -٣: احسب المقاومة الكلية لدارة التوازي المبينة في الشكل



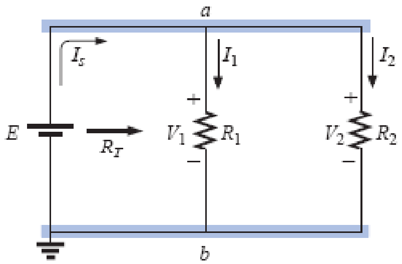
دارات التفرع
Parallel Circuits



تتمثل دارة التفرع بدارة تحتوي على مصدر للجهد وعدد من المقاومات، حيث أن جميع هذه العناصر مربوطة على التفرع، كما هو مبين في الشكل.

- ❖ تحسب المقاومة الكلية في هذه الدارة بالعلاقة: $R_T = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$
- ❖ كما يحسب تيار المصدر بالعلاقة: $I_s = E / R_T$
- ❖ قطبي مصدر الجهد مرتبطان بشكل مباشر مع المقاومتين R_1 و R_2، (أي كل العناصر على التوازي)، وبذلك الجهود تكون متساوية و تحقق العلاقة:

$$V_1 = V_2 = E$$



بما أن $V_1 = V_2 = E$ ، فإن $I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{E}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{E}{R_2}$

المقاومة الكلية: $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

وبضرب طرفي العلاقة ب E، نحصل على العلاقة التالية: $\frac{E}{R_T} = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2}$

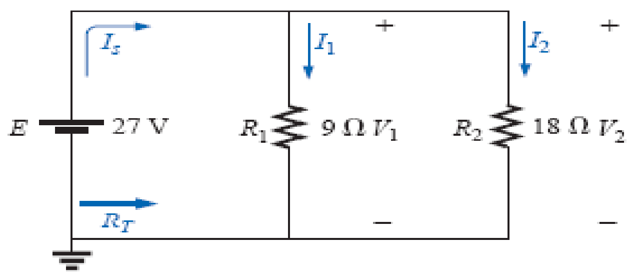
ومنه: $\boxed{I_s = I_1 + I_2}$

الاستطاعة:

$$P_1 = V_1 I_1 = I_1^2 R_1 = \frac{V_1^2}{R_1}, \qquad P_2 = V_2 I_2 = I_2^2 R_2 = \frac{V_2^2}{R_2}$$

$$P_E = P_1 + P_2 = E I_s = I_s^2 R_T = \frac{E^2}{R_T} \quad [\text{watts, W}]$$

مثال - ٤ : لدينا دارة التفرع المبينة في الشكل، احسب:



a. المقاومة الكلية R_T

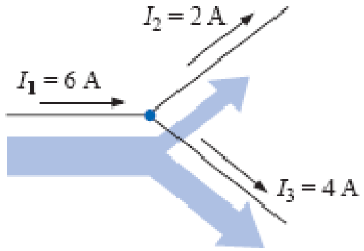
b. تيار المصدر I_s

c. التيارات I_1 و I_2 وتحقق من أن $I_s = I_1 + I_2$

d. الاستطاعة المستهلكة في كل مقاومة

e. الاستطاعة المنقولة من المصدر و قارنها مع مجموع الاستطاعات المستهلكة.

قانون كرشوف للتيار
Kirchhoff's Current Law - KCL

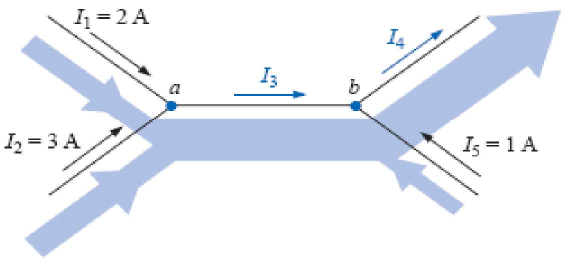


أن "المجموع الجبري للتيارات الداخلة إلى عقدة ما (نقطة تقاطع) في دارة يساوي المجموع الجبري للتيارات الخارجة منها"

$$\sum I_i = \sum I_o$$

$$\sum I_i = \sum I_o \Rightarrow 6\text{A} = 2\text{A} + 4\text{A} = 6\text{A}$$

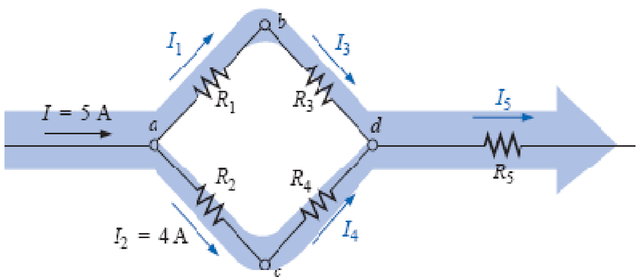
****



مثال ٥-: احسب التيارات I_3 و I_4 المشار إليها في الشكل وذلك باستخدام KCL.

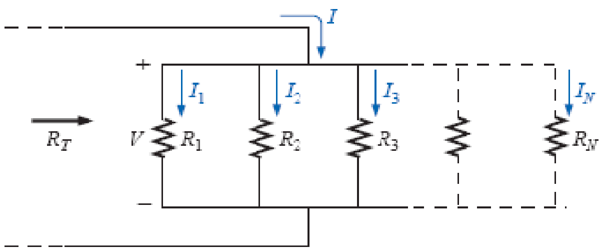
****

مثال ٦-: احسب التيارات I_1, I_3, I_4, I_5 المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل وذلك باستخدام KCL.



قانون قاسم التيار

Current Divider Rule – CDR



هناك حالتان للتوزع التيار:

❖يتوزع التيار المار في مقاومتين على التفرع بالتساوي على هاتين المقاومتين في حالة كانت قيمتهما متساوية.

❖يتوزع التيار المار في مقاومتين على التفرع مختلفتين بالقيمة، بحيث يكون للمقاومة الأصغر تيار أكبر، ويكون للمقاومة الأكبر تيار أصغر. أي أن التيار في مثل هذه الحالة يتناسب عكساً مع قيمة المقاومة.

تيار الدخل $I = V/R_T$ ، إذا كان I_x تيار الفرع x حيث المقاومة R_x يكون $V = I_x R_x$

وبالتالي: $I = V/R_T = (I_x R_x)/R_T$ و منه

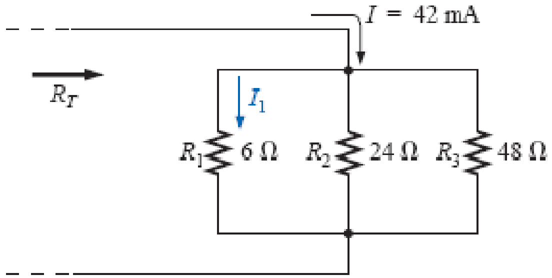
$$\boxed{I_x = \frac{R_T}{R_x} I}$$

، حيث $x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

أو

$$\boxed{I_x = \frac{R_T}{R_x} I_T}$$

مثال -٧: احسب التيار I_1 في دارة التوازي المبينة في الشكل



****

حالة خاصة:

إذا كانت الدارة تحتوي على مقاومتين على التوازي، فالمقاومة الكلية : $R_T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

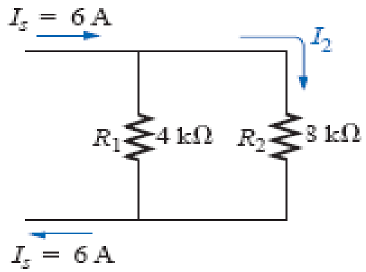
لحساب التيار الفرعي (وليكن I_1)، نجد أن:

$$I_1 = \frac{R_T}{R_1} I_T = \frac{\left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}{R_1} I_T$$

و من هذه العلاقة نحصل على التالي:

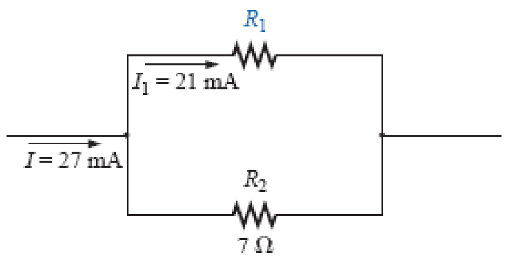
$$I_1 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) I_T, \qquad I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) I_T$$

مثال -٨: احسب التيار I_2 في دارة التوازي المبينة في الشكل



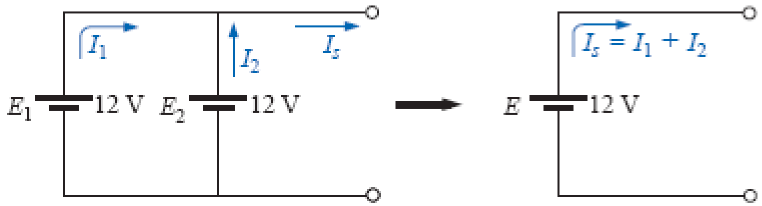
****

مثال -٩: احسب المقاومة R_1 في دارة التوازي المبينة في الشكل



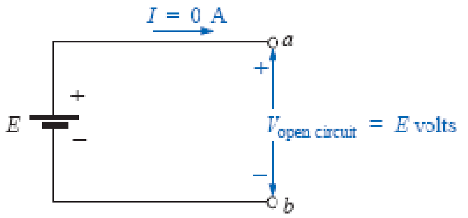
مصادر الجهد على التوازي
Voltage Sources in Parallel

توضع مصادر الجهد على التوازي، كما هو مبين في الشكل، فقط في حالة تساوي قيمها. السبب الرئيسي لوضع اثنين أو أكثر من مصادر الجهد على التوازي في محطة جهد واحدة هو لزيادة شدة التيار من المصدر.



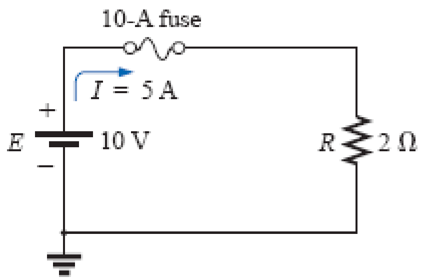
الدارة المفتوحة و الدارة المغلقة

Open and Short Circuits



نقول عن دارة كهربائية بأنها **دارة مفتوحة** إذا وجد فيها طرفان معزولان (a و b) لا يتصلان مع بعضهما البعض بأي عنصر من أي نوع، كما هو مبين في الشكل. ويكون التيار المار في الدارة المفتوحة مساوياً الصفر، أي $I = 0$ ، أما الجهد بين الطرفين المعزولين فيكون مساوية لمصدر الجهد، أي

$$V_{\text{open circuit}} = E \quad \text{volts}$$

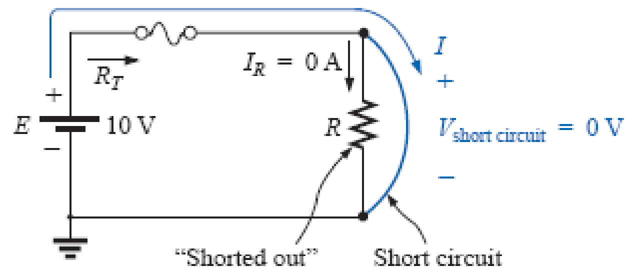


الدارة المغلقة أو دارة القِصر، هي الدارة التي يتواجد فيها توصيل مباشر بين طرفين، وبالتالي تكون ذات مقاومة ضعيفة جداً،

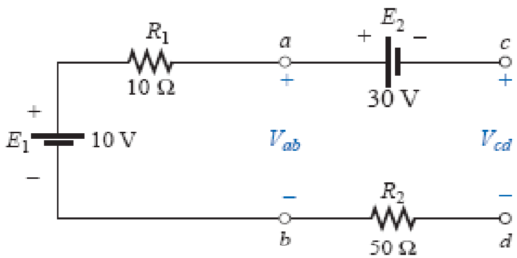
كما هو مبين في الشكل

التيار المار في الدارة المغلقة يمكن أن يأخذ أية قيمة،

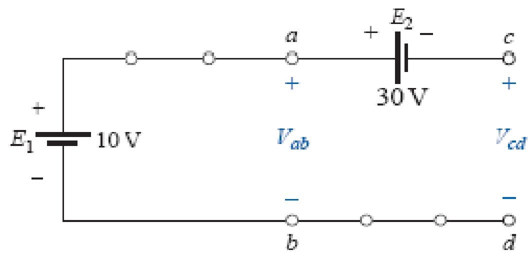
أما الجهد فيكون مساوية للصفر، أي $V_{\text{short circuit}} = 0 \text{ V}$.



مثال ـ ١٠: احسب قيمة الجهد V_{ab} و V_{cd} في الدارة المبينة في الشكل

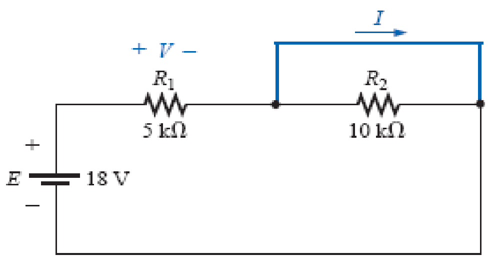


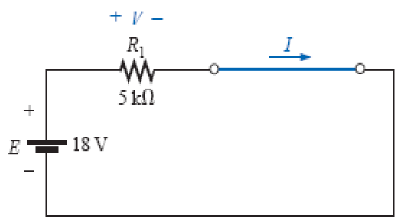
.



****

مثال ـ ١١: احسب التيار I والجهد V المشار إليهما في الدارة المبينة في الشكل





نهاية المحاضرة الرابعة

The end

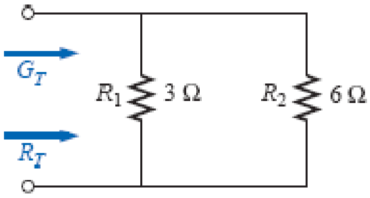
****

يتبع

مسائل محلولة

أمثلة محلولة

مثال 6-1: احسب المقاومة الكلية و الناقلية لدارة التوازي المبينة في الشكل (6-6).



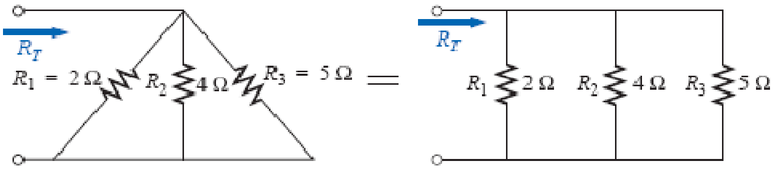
الشكل (6-6) – دارة المثال 6-1

الحل:

$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{3\Omega}+\frac{1}{6\Omega}\Rightarrow R_T=2\Omega$$

$$G_T=\frac{1}{R_T}=0.5\,S$$

مثال 6-2: احسب المقاومة الكلية لدارة التوازي المبينة في الشكل (6-7).



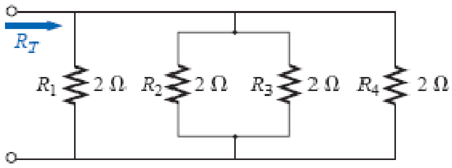
الشكل (6-7) – دارة المثال 6-2

الحل:

$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{5\Omega}\Rightarrow R_T=1.053\Omega$$

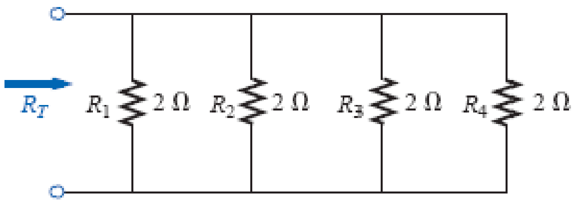
$$G_T=\frac{1}{R_T}=\frac{1}{1.053\Omega}=0.95\ S$$

مثال 6-3: احسب المقاومة الكلية لدارة التوازي المبينة في الشكل (6-8).



الشكل (6-8) – دارة المثال 6-3

الحل: يمكن إعادة رسم الدارة على الشكل التالي:



وبالتالي: $R_T=\frac{R}{N}=\frac{2\Omega}{4}=0.5\Omega$

مثال 4-6: لدينا دارة التفرع المبينة في الشكل (10-6)، احسب:

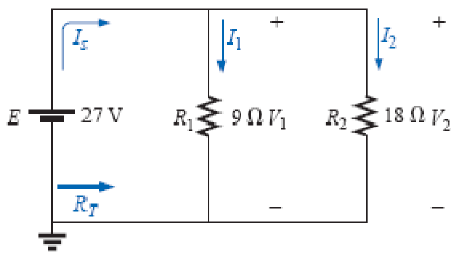
a. المقاومة الكلية R_T

b. تيار المصدر I_s

c. التيارات I_1 و I_2 وتحقق من أن $I_s = I_1 + I_2$

d. الاستطاعة المستهلكة في كل مقاومة

e. الاستطاعة المنقولة من المصدر و قارنها مع مجموع الاستطاعات المستهلكة.



الشكل (10-6) – دارة المثال 4-6

الحل:

a. $$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(9\Omega)(18\Omega)}{9\Omega + 18\Omega} = 6\Omega$$

b. $$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{27\text{V}}{6\Omega} = 4.5\text{A}$$

c. $$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{E}{R_1} = \frac{27\text{V}}{9\Omega} = 3\text{A}, \quad I_1 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{E}{R_2} = \frac{27\text{V}}{18\Omega} = 1.5\text{A}$$

$I_s = I_1 + I_2 \;\Rightarrow 4.5\text{A} = (3 + 1.5)\text{A} = 4.5\text{A}$ محققة

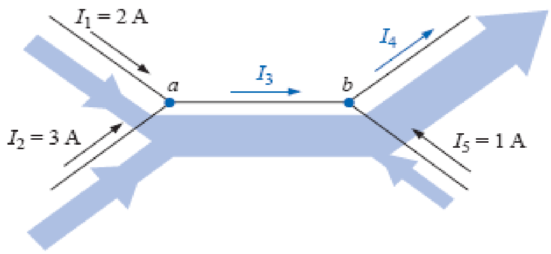
d.

$$P_1 = V_1 I_1 = E I_1 = (27\text{V})(3\text{A}) = 81\text{W}$$
$$P_2 = V_2 I_2 = E I_2 = (27\text{V})(1.5\text{A}) = 40.5\text{W}$$

e.

$$P_s = E I_s = (27\text{V})(4.5\text{A}) = 121.5\text{W}$$
$$= P_1 + P_2 = 81\text{W} + 40.5\text{W} = 121.5\text{W}$$

مثال 5-6: احسب التيارات I_3 و I_4 المشار إليها في الشكل (12-6) وذلك باستخدام KCL.



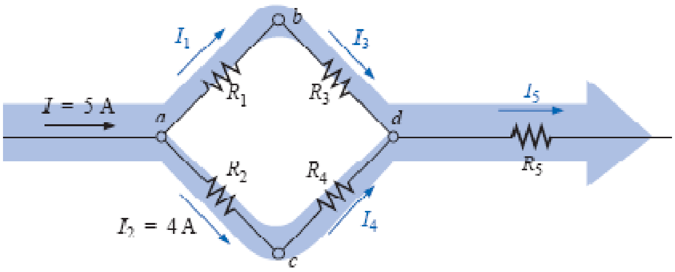
الشكل (12-6) – دارة المثال 5-6

الحل:

النقطة a : $\sum I_i = \sum I_o \Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 = 2A + 3A = 5A$

النقطة b : $\sum I_i = \sum I_o \Rightarrow I_3 + I_5 = I_4 = 5A + 1A = 6A$

مثال 6-6: احسب التيارات I_1, I_3, I_4, I_5 المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل (6-13) وذلك باستخدام KCL.



الشكل (6-13) – دارة المثال 6-6

الحل:

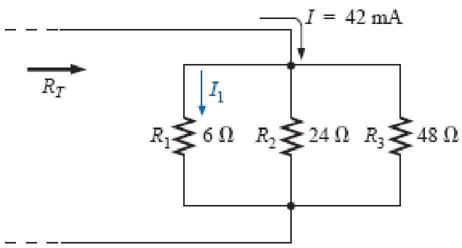
النقطة a: $\sum I_i = \sum I_o \Rightarrow I = I_1 + I_2 \Rightarrow 5A = I_1 + 4A \Rightarrow I_1 = 1A$

النقطة b: وبما أن R_1 و R_3 على التسلسل، فالتيار المار فيهما هو نفسه، أي $I_1 = I_3 = 1A$.

النقطة c: وبما أن R_2 و R_4 على التسلسل، فالتيار المار فيهما هو نفسه، أي $I_2 = I_4 = 4A$.

النقطة d: $\sum I_i = \sum I_o \Rightarrow I_3 + I_4 = I_5 = 1A + 4A = 5A$

مثال 6-7: احسب التيار I_1 في دارة التوازي المبينة في الشكل (6-15).



الشكل (6-15) – دارة المثال 6-7

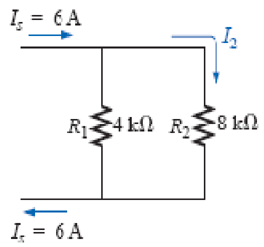
الحل:

نقوم بحساب المقاومة الكلية:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{24\Omega} + \frac{1}{48\Omega} = 0.2292\ \ S \Rightarrow R_T = 4.363\Omega$$

وبالتالي: $$I_1 = \frac{R_T}{R_1} I = \frac{4.363\Omega}{6\Omega}(42\ mA) = 30.54mA$$

مثال 6-8: احسب التيار I_2 في دارة التوازي المبينة في الشكل (6-16).

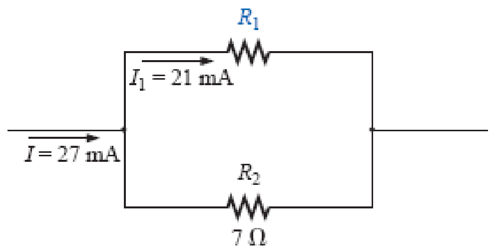


الشكل (6-16) – دارة المثال 6-7

الحل:

$$I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) I_T = \frac{(4\text{k}\Omega)(6\text{A})}{4\text{k}\Omega + 8\text{k}\Omega} = 2\text{A}$$

مثال 6-9: احسب المقاومة R_1 في دارة التوازي المبينة في الشكل (6-17).



الشكل (6-17) - دارة المثال 6-9

الحل:

$$I_1 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) I \Rightarrow R_1 = \frac{R_2 (I - I_1)}{I_1} = \frac{7\Omega(27\text{mA} - 21\text{mA})}{21\text{mA}} = 2\Omega$$

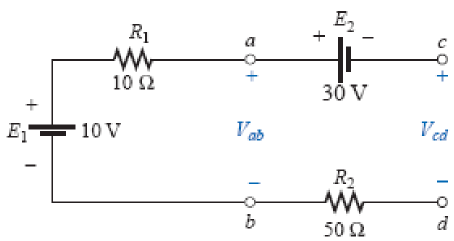
وهناك طريقة أخرى، وبتطبيق قانون كرشوف للتيار (KCL)، نجد أن:

$$I_2 = I - I_1 = 27\text{mA} - 21\text{mA} = 6\text{mA}$$

$$V_2 = I_2 R_2 = (6\text{mA})(7\Omega) = 42\text{mA}, \quad V_1 = I_1 R_1 = V_2 = 42\text{mA}$$

وبالتالي: $$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{42\text{mA}}{21\text{mA}} = 2\Omega$$

مثال 6-10: احسب قيمة الجهد V_{ab} و V_{cd} في الدارة المبينة في الشكل (6-21).



الشكل (6-21) – دارة المثال 6-10

الحل:

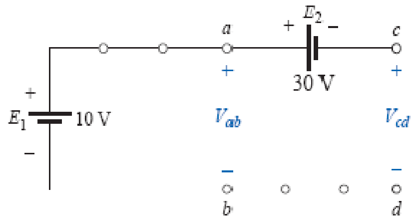
باعتبار أن الدارة مفتوحة، فالتيار المار في هذا النظام يكون مساويا صفر أمبير ($I = 0$) ، وبالنتيجة فان الجهد المساوي للصفر ($V = 0\,\text{V}$) سوف يتوزع عبر كل مقاومة. والآن، فانه من الممكن استبدال كلاً من

المقاومات بدارة مغلقة، كما هو مبين في الشكل (6-22). وبالتالي، يكون الجهد V_{ab} مباشر عبر المصدر 10 فولط، أي: $V_{ab} = E_1 = 10\,\text{V}$.

لحساب V_{cd} نطبق قانون كرشوف للجهد، فيكون:

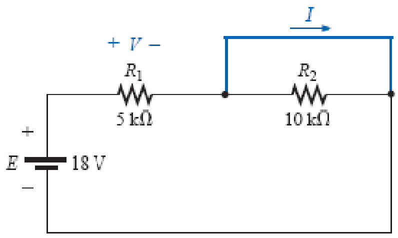
$$+E_1 - E_2 - V_{cd} = 0 \Rightarrow V_{cd} = 10\,\text{V} - 30\,\text{V} = -20\,\text{V}$$

الإشارة السالبة في هذا الجواب تشير إلى أن قطبية V_{cd} هي في الحقيقة عكس ما هو مشار إليه في الدارة.



الشكل (6-22) – دارة استبدال المقاومات بدارة مغلقة

مثال 6-11: احسب التيار I والجهد V المشار إليهما في الدارة المبينة في الشكل (6-23).



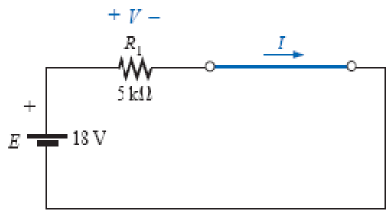
الشكل (6-23) – دارة المثال 6-11

الحل:

من الشكل يتضح لنا أن المقاومة مقصورة، وبالتالي يمكن إعادة رسم الدارة كما هو مبين في الشكل (6-24).

وباستخدام قانون أوم، نجد أن:

$$I = \frac{E}{R_1} = \frac{18\,\text{V}}{5\,\text{k}\Omega} = 3.6\,\text{mA}, \quad V = E = 18V$$



الشكل (6-24) – دارة مكافأة لدارة المثال 6-11

طرق تحليل الدارات

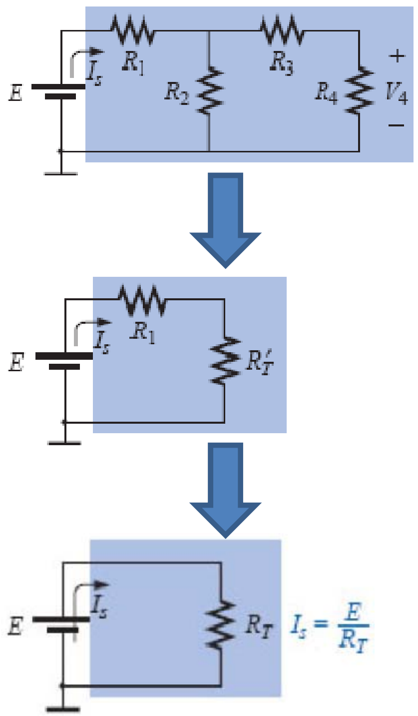
Methods of Circuits analysis

١. طريقة التبسيط
٢. طريقة مخطط الكتل
٣. تحويلات المصادر
٤. أمثلة وصفية

طريقة التبسيط

Reduce Approach

تتلخص هذه الطريقة على النحو التالي: نحدد المقاومات المرتبطة على التسلسل (أو التوازي) ونقوم بحساب المقاومة المكافئة لها ونقوم بإعادة رسم الدارة، كما هو مبين في الشكل



$$R_3,\ R_4\ -\text{in series} \Rightarrow R' = R_3 + R_4$$

$$R_2,\ R'\ -\text{in parallel} \Rightarrow\ R'_T = R_2 \,||\, R' = \frac{R_2 R'}{R_2 + R'}$$

$$R_1,\ R'\ -\text{in series} \Rightarrow R_T = R_1 + R'_T$$

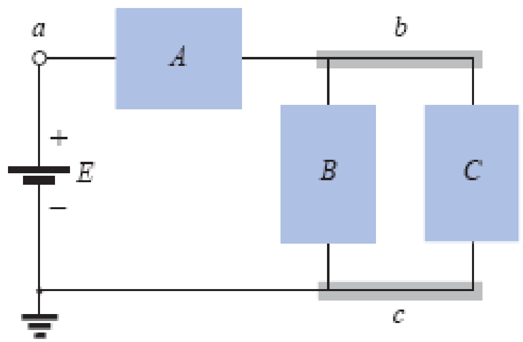
قانون أوم:

$$I_s = \frac{E}{R_T}$$

طريقة مخطط الكتل

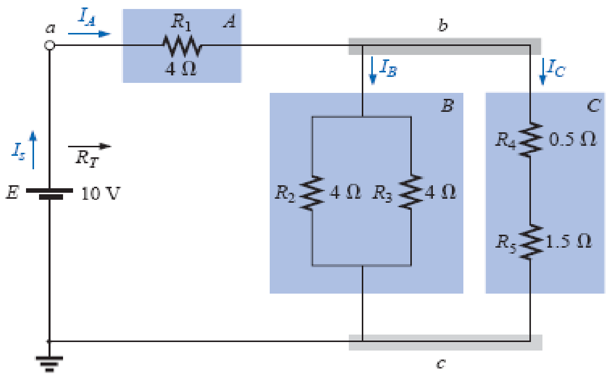
(Block Diagram)

تتلخص هذه الطريقة على النحو التالي: تعتمد هذه الطريقة على تجميع العناصر، بحيث عنصران مرتبطان على التسلسل يشكلان كتلة، و عنصران مرتبطان على التوازي يشكلان كتلة أخرى، والكتل الناتجة فإما أن تكون على التسلسل وأما أن تكون على التوازي ومن ثم يعاد رسم الدارة بدلالة الكتل الجديدة، كما هو مبين في الشكل.

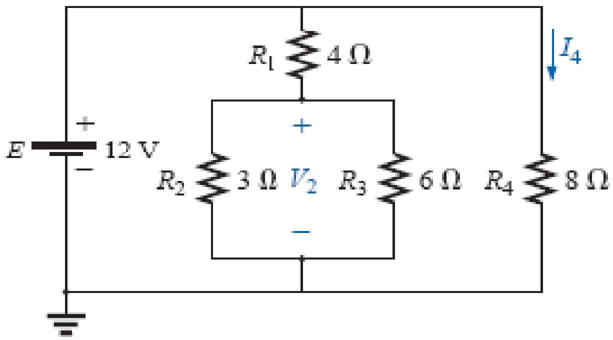


المقاومة الكلية = المجموع الجبري $A + (B \parallel C)$

أمثلة

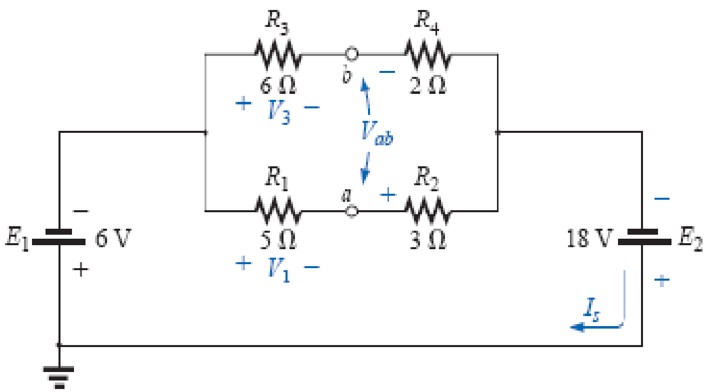


مثال ٥-١: احسب شدة التيارات المشار إليها في الشبكة المبينة في الشكل، وكذلك قيمة الجهد في كل كتلة (V_A, V_B, V_C).

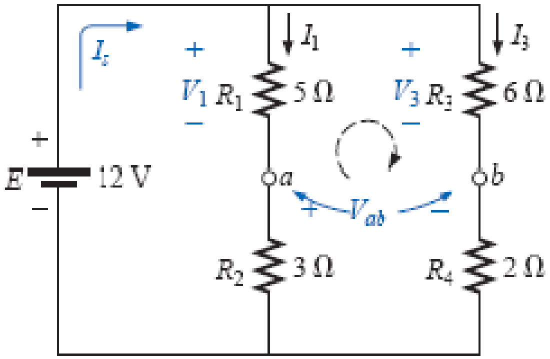


مثال ٥-٢: أوجد التيار I_4 و V_2 الجهد المشار إليهما في الدارة المبينة في الشكل

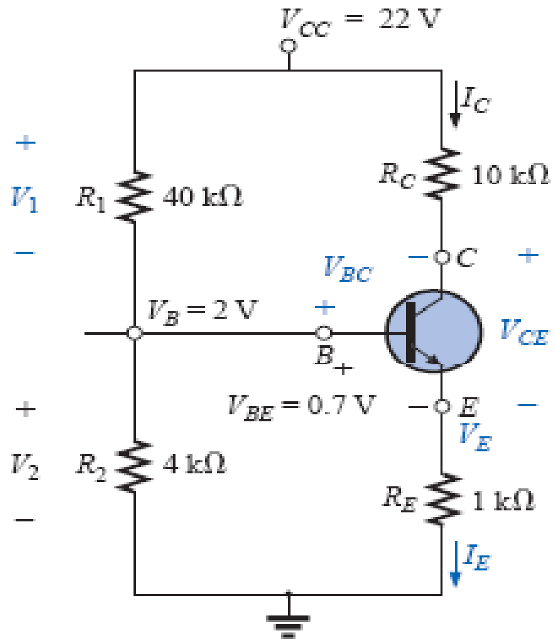
مثال ٥-٣: لتكن الدارة المبينة في الشكل، احسب كلاً من الجهود V_1 و V_3 و V_{ab} وكذلك تيار المصدر I_s .



يمكن إعادة رسم الدارة علة النحو التالي:



مثال ٥-٤: لدينا دارة الترانزيستور المبينة في الشكل، فإذا كانت قيم الجهود V_B و V_{BE} معلومة، احسب:



a. قيمة الجهد المطبق على الباعث (Emitter) V_E وشدة تياره I_E.

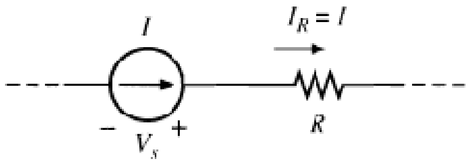
b. قيمة الجهد V_1 المطبقة على المقاومة R_1.

c. قيمة الجهد V_{BC} المطبقة بين القاعدة (Base) والمجمع (Collector)، مع اعتماد حقيقة أن تيار المجمع يساوي تقريباً تيار الباعث، أي $I_C \cong I_E$.

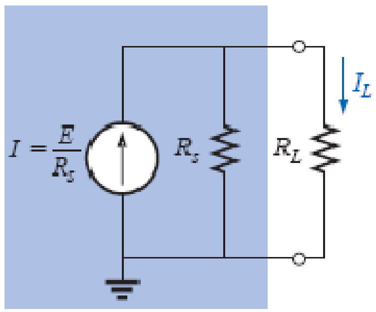
d. قيمة الجهد V_{CE} المطبقة بين الباعث والمجمع، وذلك باستخدام القيم الناتجة في الطلبات السابقة.

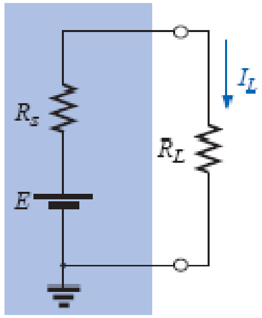
تحويلات المصدر (Source Conversions)

بشكلٍ عام، مصدر التيار يحدد شدة و اتجاه التيار في الفرع الذي يتواجد فيه من الدارة. ويبين الشكل رمز مصدر التيار في الدارات الكهربائية.

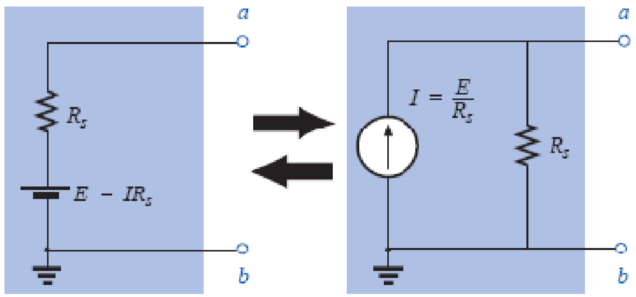


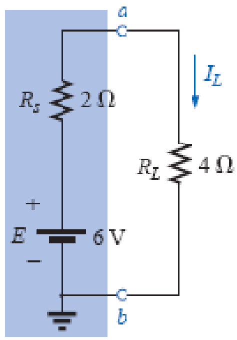
جميع المصادر، سواءً كانت الجهد أم التيار، تمتلك بعض المقاومة الداخلية في المواقع النسبية كما هو مبين في الشكل





بشكلٍ عام، عند التحويل، مصدر الجهد يجب أن يمتلك على مقاومة متصلة معه على التسلسل، ويتحول إلى مصدر للتيار الذي يجب أن يمتلك على مقاومة متصلة معه على التفرع، والعكس صحيح.



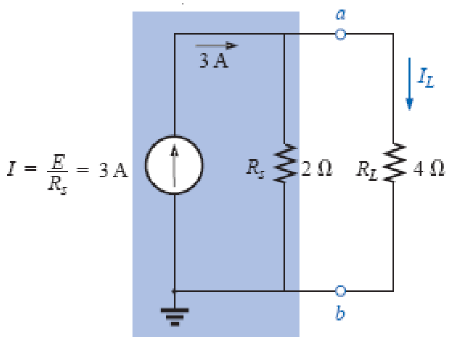


مثال ٥-٥: لتكن الدارة المبينة في الشكل التالي:

a. احسب شدة التيار المشار إليه.

b. حوّل مصدر الجهد إلى مصدر للتيار.

c. احسب التيار المار عبر مقاومة الحمل (R_L) مستخدما مصدر التيار الجديد الناتج عن عملية التحويل في الطلب (b)، وقارن الناتج مع نتيجة الطلب (a).



نهاية المحاضرة الخامسة

The end

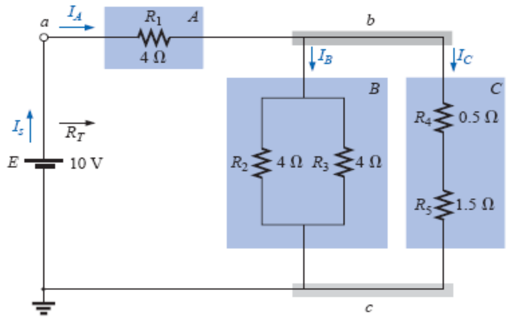
****

يتبع

مسائل محلولة

أمثلة محلولة

مثال 5 -1: احسب شدة التيارات المشار إليها في الشبكة المبينة في الشكل التالي، وكذلك قيمة الجهد في كل كتلة (V_A, V_B, V_C).



الحل:

نلاحظ من معطيات الشبكة أن:

الكتلة A: $R_A = 4\Omega$

الكتلة B: $R_B = R_2 \parallel R_3 = R_{2\parallel 3} = \dfrac{R}{N} = \dfrac{4\,\Omega}{2} = 2\Omega$

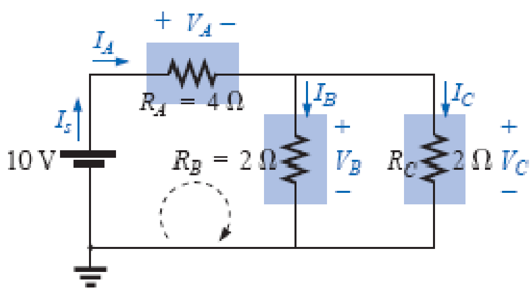
الكتلة C: $R_C = R_4 + R_5 = R_{4,5} = 0.5\Omega + 1.5\Omega = 2\Omega$

الكتلة B و الكتلة C على التوازي، أي: $R_{B\parallel C} = \dfrac{R}{N} = \dfrac{2\,\Omega}{2} = 1\Omega$

ومن هنا، نجد المقاومة الكلية: $R_T = R_A + R_{B\parallel C} = 4\Omega + 1\Omega = 5\Omega$

وبالتالي: $I_s = \dfrac{E}{R_T} = \dfrac{10\,\text{V}}{5\,\Omega} = 2\,\text{A}$

من أجل إيجاد التيارات المشار إليها I_A, I_B, I_C، وكذلك الجهد (V_A, V_B, V_C)، نعيد رسم الدارة، كما هو مبين في الشكل التالي.



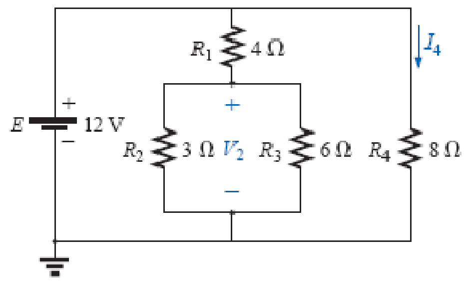
من الدارة نرى أن: $I_A = I_s = 2\,\text{A},\ \ I_B = I_C = \dfrac{I_A}{2} = \dfrac{I_s}{2} = \dfrac{2\,\text{A}}{2} = 1\text{A}$

إذا عدنا إلى الشكل (7-6) نرى أن: $I_{R_2} = I_{R_3} = \dfrac{I_B}{2} = 0.5\,\text{A}$

والآن نقوم بحساب الجهد ، فنجد:

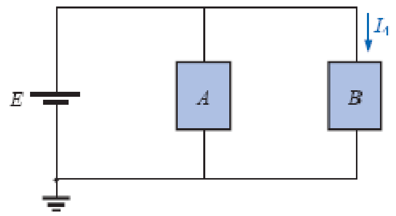
$$V_A = I_A R_A = (2\,\text{A})(4\,\Omega) = 8\,\text{V}$$
$$V_B = I_B R_B = (1\,\text{A})(2\,\Omega) = 2\,\text{V}$$
$$V_C = I_C R_C = V_B = 2\,\text{V}$$

مثال 5-2: أوجد التيار I_4 و الجهد V_2 المشار إليهما في الدارة المبينة في الشكل التالي.



الحل:

استناداً إلى طريقة التجميع السابقة، فإننا نرى أن المقاومة R_4 تشكل كتلة، ولتكن B، والمقاومة R_1 مع مجموع المقاومتين $R_{2\|3}$ تشكل كتلة، ولتكن A. وبإعادة رسم الدارة، نحصل على الدارة المكافئة المبينة في الشكل التالي.



وبتطبيق قانون أوم، نجد أن: $I_4 = \dfrac{E}{R_B} = \dfrac{E}{R_4} = \dfrac{12\,\text{V}}{8\,\Omega} = 1.5\,\text{A}$

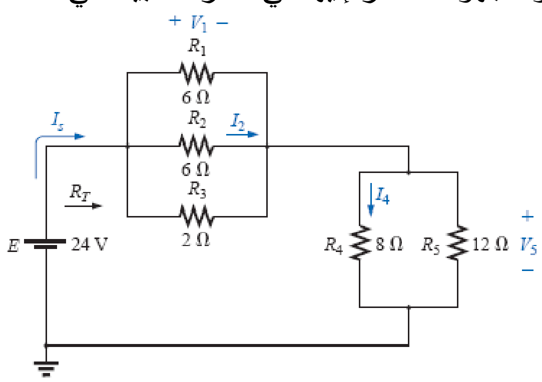
من جهة أخرى، يمكن القول أن الكتلة A تتكون من كتلتين: المقاومة R_1 - كتلة C، و مجموع المقاومتين $R_{2\|3}$ - كتلة D ، و هاتين الكتلتين يمكن تمثيلهما كما هو مبين في الشكل التالي. وبالتالي، نجد أن:

$$R_D = R_2 \parallel R_3 = \frac{(3\Omega)(6\Omega)}{3\Omega + 6\Omega} = 2\Omega$$

وبتطبيق قانون قاسم التيار(CDR)، نجد أن:

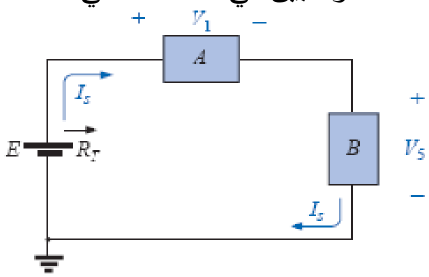
$$V_2 = \frac{R_D E}{R_D + R_C} = \frac{(2\,\Omega)(12\,\text{V})}{2\Omega + 4\Omega} = 4\,\text{V}$$

مثال 5-3: أوجد كل التيارات و الجهود المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل التالي.



الحل:

نرى من الشكل أن المقاومات المرتبطة على التوازي $R_{1\|2\|3}$ تشكل كتلة ولتكن A، بينما المقاومات $R_{4\|5}$ فتشكل كتلة B. وبناءً عليه، نعيد رسم الدارة كما هو مبين في الشكل التالي.



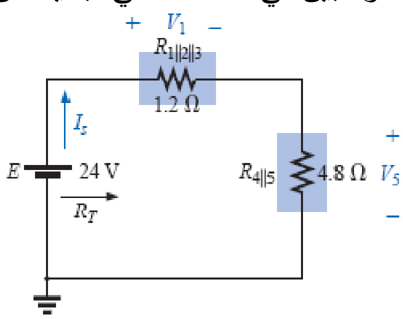
وبالتالي، نجد أن:

$$R_{1\|2} = \frac{R}{N} = \frac{6\,\Omega}{2} = 3\,\Omega$$

$$R_A = R_{1\|2\|3} = \frac{(3\,\Omega)(2\,\Omega)}{3\,\Omega + 2\,\Omega} = 1.2\,\Omega$$

$$R_B = R_{4\|5} = \frac{(8\,\Omega)(12\,\Omega)}{8\,\Omega + 12\,\Omega} = 4.8\,\Omega$$

نعيد رسم المخطط السابق بدلالة القيم الجديدة كما هو مبين في الشكل التالي، بحيث أن:



$$R_T = R_{1\|2\|3} + R_{4\|5} = 1.2\,\Omega + 4.8\,\Omega = 6\,\Omega$$

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{24\text{ V}}{6\,\Omega} = 4\text{ A}$$

$$V_1 = I_s R_{1\|2\|3} = (4\text{ A})(1.2\,\Omega) = 4.8\text{ V}$$

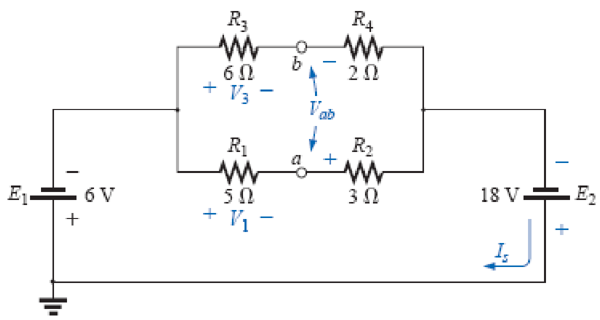
$$V_5 = I_s R_{4\|5} = (4\text{ A})(4.8\,\Omega) = 19.2\text{ V}$$

وبتطبيق قانون أوم:

$$I_4 = \frac{V_5}{R_4} = \frac{19.2\text{ V}}{8\,\Omega} = 2.4\text{ A}$$

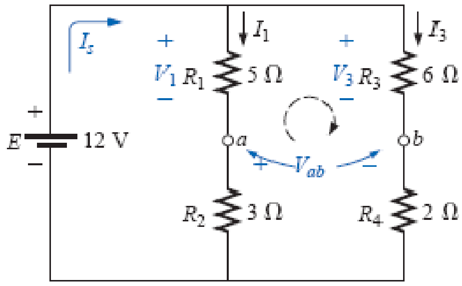
$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_1}{R_2} = \frac{4.8\text{ V}}{6\,\Omega} = 0.8\text{ A}$$

مثال 4-5: لتكن الدارة المبينة في الشكل التالي، احسب كلاً من الجهود V_1 و V_3 و V_{ab} وكذلك تيار المصدر I_s.



الحل:

يمكن أعادة رسم الدارة كما هو مبين في الشكل التالي



لحساب V_1 و V_3 نستخدم قانون قاسم الجهد (VDR)، فنحصل على:

$$V_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} = \frac{(5\,\Omega)(12\,\text{V})}{5\,\Omega + 3\,\Omega} = 7.5\,\text{V}$$

$$V_3 = \frac{R_3 E}{R_3 + R_4} = \frac{(6\,\Omega)(12\,\text{V})}{6\,\Omega + 2\,\Omega} = 9\,\text{V}$$

أما بالنسبة إلى الجهد V_{ab} فهو جهد الدارة المفتوحة بين النقطتين a و b، و يحسب باستخدام قانون كرشوف للجهد (KVL) وذلك وفق اتجاه عقار الساعة كما هو مشار إليه في الشكل التالي، وبالتالي نحصل على:

$$+V_1 - V_3 + V_{ab} = 0 \Rightarrow V_{ab} = V_3 - V_1 = (9 - 7.5)\,\text{V} = 1.5\,\text{V}$$

وبتطبيق قانون أوم، نجد:

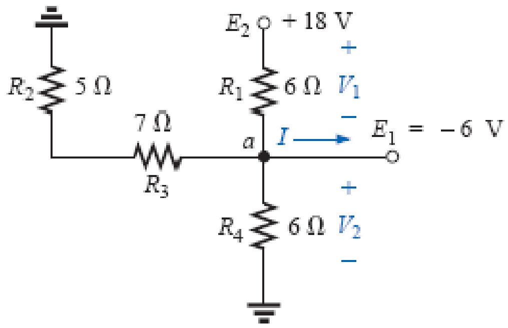
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{7.5\,\text{V}}{5\,\Omega} = 1.5\,\text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{9\,\text{V}}{6\,\Omega} = 1.5\,\text{A}$$

وبتطبيق قانون كرشوف للتيار (KCL)، نجد:

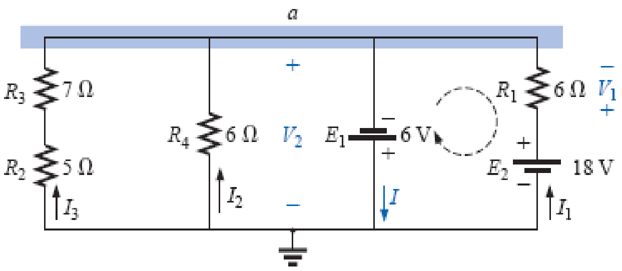
$$I_s = I_1 + I_3 = 1.5\,\text{A} + 1.5\,\text{A} = 3\,\text{A}$$

مثال 5-5: لتكن الدارة المبينة في الشكل التالي، احسب كلاً من الجهود V_1 و V_2 و التيار I.



الحل:

للإيضاح، نعيد رسم الدارة، كما هو مبين في الشكل التالي، ويكون من الواضح أن: $V_2 = -E_1 = -6\,\text{V}$.
الإشارة السالبة (−) تشير إلى أن القطبية المختارة في الشكل السابق هي عكس القطبية الحقيقية.



بتطبيق قانون كرشوف للجهد (KVL) على الحلقة المشار إليها، نجد:

$$-E_1+V_1-E_2=0 \Rightarrow V_1=E_2+E_1=(18+6)\,\text{V}=24\ \text{V}.$$

وبتطبيق قانون كرشوف للتيار (KCL) عند العقدة المشار اليها a، نجد:

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{V_1}{R_1}+\frac{E_1}{R_4}+\frac{E_1}{R_2+R_3}=\frac{24\,\text{V}}{6\,\Omega}+\frac{6\,\text{V}}{6\,\Omega}+\frac{6\,\text{V}}{12\,\Omega}=5.5\,\text{A}$$

مثال 6-5: لدينا دارة الترانزيستور المبينة في الشكل التالي، فإذا كانت قيم الجهود V_B و V_{BE} معلومة، احسب:

a. قيمة الجهد المطبق على الباعث (Emitter) V_E وشدة تياره I_E.

b. قيمة الجهد V_1 المطبقة على المقاومة R_1.

c. قيمة الجهد V_{BC} المطبقة بين القاعدة (Base) والمجمع (Collector)، مع اعتماد حقيقة أن تيار المجمع يساوي تقريباً تيار الباعث، أي $I_C \cong I_E$.

d. قيمة الجهد V_{CE} المطبقة بين الباعث والمجمع، وذلك باستخدام القيم الناتجة في الطلبات السابقة.

الحل:

من الشكل نجد أن: $V_2=V_B=2\,\text{V}$

وبتطبيق قانون كرشوف للجهد على الحلقة السفلى من الدارة، نجد:

.a

$$V_2-V_{BE}-V_E=0 \Rightarrow V_E=V_2-V_{BE}$$
$$=(2-0.7)\,\text{V}=1.3\,\text{V}$$

وبالتالي يكون:

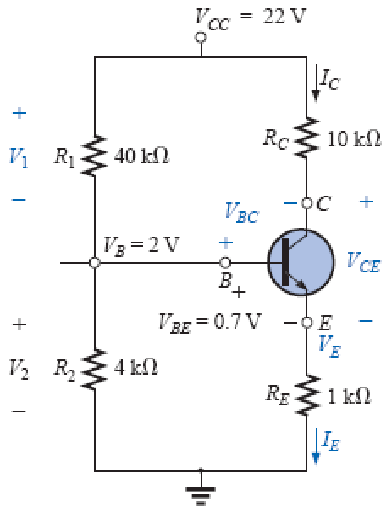
$$I_E=\frac{V_E}{R_E}=\frac{1.3\,\text{V}}{1\,\text{k}\Omega}=\frac{1.3\,\text{V}}{1000\,\Omega}=1.3\,\text{mA}$$

.b وبتطبيق قانون كرشوف للجهد على القسم الأيسر من الدارة (الدخل)، نجد:

$$V_2+V_1-V_{CC}=0 \Rightarrow V_1=V_{CC}-V_2;$$
$$V_2=V_B \Rightarrow V_1=22\,\text{V}-2\text{V}=20\,\text{V}$$

.c نقوم بإعادة رسم القسم المهم بشكل مباشر من الدارة، فنحصل على ما هو مبين في الشكل، وبتطبيق قانون كرشوف للجهد ، نجد:

$$V_C+V_{R_C}-V_{CC}=0 \Rightarrow V_C=V_{CC}-V_{R_C}$$
$$V_{R_C}=I_C R_C;\quad I_C=I_E$$
$$V_C=22\,\text{V}-(1.3\,\text{mA})(10\,\text{k}\Omega)=9\text{V}$$

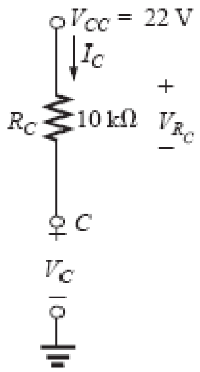


الشكل (7-17) – دارة المثال 7-6

وعندئذٍ :

$$V_{BC} = V_B - V_C = (2-9)\,\text{V} = -7\,\text{V}$$

d. $$V_{CE} = V_C - V_E = (9-1.3)\,\text{V} = 7.7\,\text{V}$$



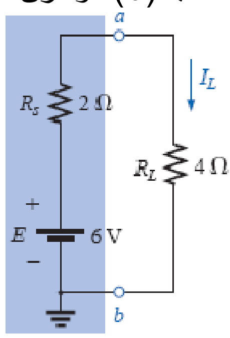
الشكل (7-18) – دارة حساب جهد المجمع

مثال7-5: لتكن الدارة المبينة في الشكل:

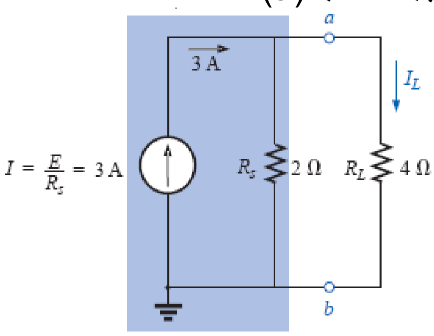
a. احسب شدة التيار I_L المشار إليه.

b. حوّل مصدر الجهد إلى مصدر للتيار.

c. احسب التيار المار عبر مقاومة الحمل (R_L) مستخدما مصدر التيار الجديد الناتج عن عملية التحويل في الطلب (b)، وقارن الناتج مع نتيجة الطلب (a).



(a) – دارة مصدر الجهد العملي



(b) – دارة مصدر التيار المكافئ

الحل:

a. بتطبيق قانون أوم (شكل a)، نجد: $I_L = \dfrac{E}{R_s + R_L} = \dfrac{6\,\text{V}}{2\,\Omega + 4\,\Omega} = 1\,\text{A}$

b. باستخدام قانون أوم (شكل a)، نجد: $I = \dfrac{E}{R_s} = \dfrac{6\,\text{V}}{2\,\Omega} = 3\,\text{A}$

نقوم باستبدال مصدر الجهد بمصدر التيار $I = 3\,\text{A}$ و المقاومة R_s على التوازي معه، شكل (b).

c. باستخدام قانون قاسم التيار (CDR)، نجد: $I_L = \dfrac{R_s I}{R_s + R_L} = \dfrac{(2\,\Omega)(4\,\Omega)}{2\,\Omega + 4\,\Omega} = 1\,\text{A}$

بالنتيجة، نجد أن التيار I_L هو ذاته من أجل مصدر الجهد و مصدر التيار المكافئ.

طرق تحليل الدارات

Methods of Circuits analysis

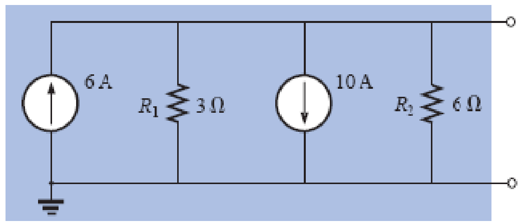
١. مصادر التيار على التفرع و التسلسل
٢. التحليل الفرعي
٣. التحليل الحلقي (الشبكي)
٤. التحليل العقدي
٥. دارات الجسر

مصادر التيار على التفرع و التسلسل

(Current Sources in Parallel & Series)

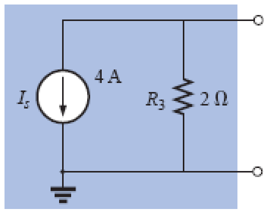
التوصيل على التفرع: تستبدل مصادر التيارات الموصولة على التوازي بمصدر واحد، بحيث أن المصادر ذات الاتجاه الواحد تُجمع والمصادر مختلفة الاتجاه تُطرح وتأخذ إشارة الأكبر منها.

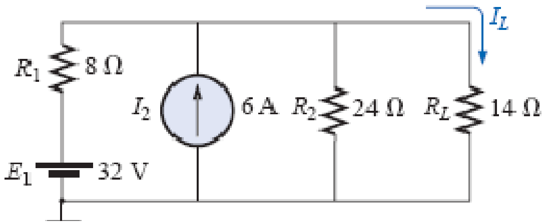
مثال:



$$I = 10\text{A} - 6\text{A} = 4\text{A}$$

$$R_3 = R_1 \,||\, R_2 = 3\Omega \,||\, 6\Omega = 2\Omega$$

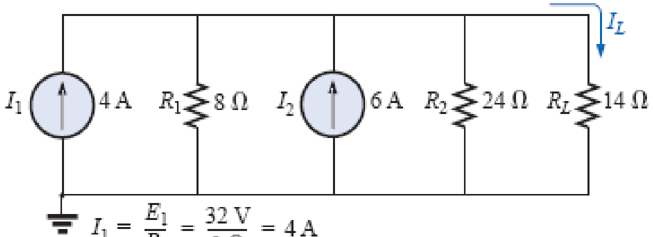




مثال ٦-١: حوّل الدارة المبينة في الشكل إلى دارة بمصدر واحد للتيار واحسب التيار المار عبر المقاومة R_L المشار اليها.

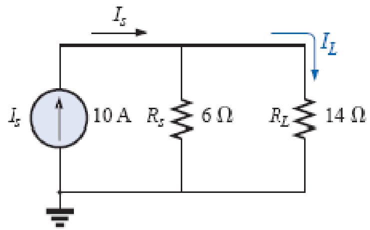
الحل:

نقوم بتحويل مصدر الجهد إلى مصدر تيار كما هو مبين في الشكل



$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{32\text{ V}}{8\ \Omega} = 4\text{ A}$

نقوم بتجميع مصادر التيارات، فنجد أن: $I_s = I_1 + I_2 = 4\text{ A} + 6\text{ A} = 10\text{ A}$. وتكون المقاومة الكلية: $R_s = R_1 \parallel R_2 = 8\,\Omega \parallel 24\,\Omega = 6\,\Omega$. و الآن، نقوم برسم الدارة المكافئة، كما هو مبين في الشكل

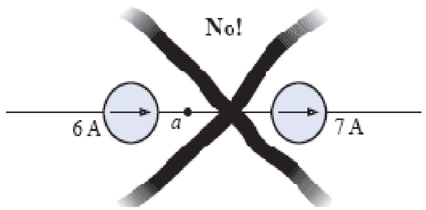


بتطبيق قانون قاسم التيار (CDR)، نجد:

$$I_L = \frac{R_s I_s}{R_s + R_L} = \frac{(6\,\Omega)(10\,\Omega)}{6\,\Omega + 10\,\Omega} = 3\text{ A}$$

التوصيل على التسلسل:

مصادر التيار المختلفة بالشدة لا يمكن أن تكون مرتبطة على التسلسل.



التحليل الفرعي

Branch-Current Analysis

تتلخص آلية هذه الطريقة بالخطوات التالية:

١. نفترض تيار لكل فرع من فروع الدائرة و اتجاه هذا التيار يمكن اختياره عشوائياً وغالباً يتبع اتجاه مرور التيار في المصدر الموجود في الفرع.

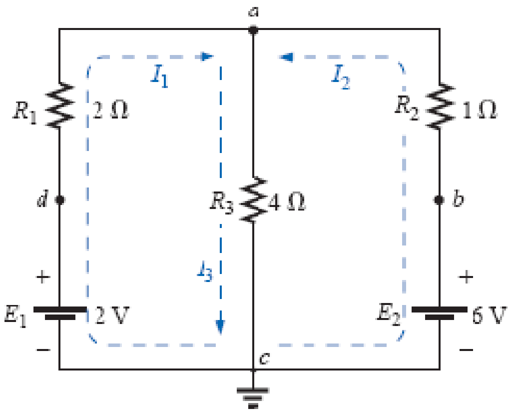
٢. نحدد قطبية (Polarity) كل مقاومة موجودة في الشبكة وفقاً لاتجاه التيار في الفرع.

٣. نطبق قانون كرشوف للجهد (KVL) في كل حلقة مغلقة (Closed loop) من حلقات الشبكة.

٤. نطبق قانون كرشوف للتيار(KCL) في أقل عدد من عقد (Node) الدارة، بحيث تشمل العقدة المطبق عليها القانون جميع تيارات الفروع في الدارة مع مراعاة الاتجاهات التي تم افتراضها للتيارات.

٥. تحليل المعادلات الخطية التي حصلنا عليها بإحدى الطرق الرياضية وحلها حلاً آنيا وذلك لحساب قيمة التيارات.

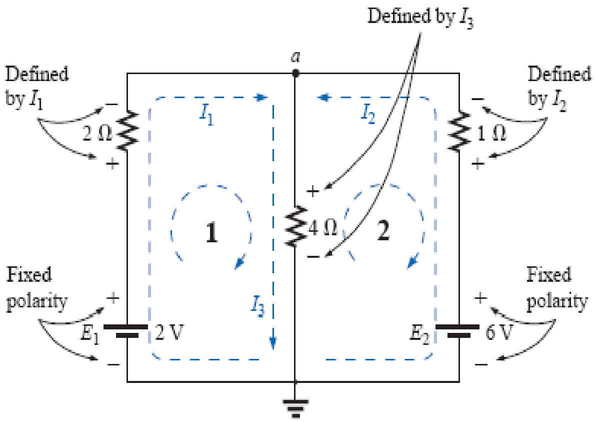
لحل المعادلات الخطية تستخدم طريقة المحددات (Determinants method) أو طريقة الحذف بالتعويض.



مثال ٦-٢: طبق طريقة التحليل الفرعي لحساب التيارات على الدارة المبينة في الشكل

الحل:

<u>خطوة1:</u> باعتبار لدينا ثلاثة فروع في الدارة محددة بالنقاط (*cda, cba, ca*)، فانه يتم اختيار ثلاثة تيارات (I_1, I_2, I_3) عشوائية (arbitrary directions). اتجاه التيارات I_1 و I_2 تم اختيارها مطابقة لتأثير مصادر التغذية E_1 و E_2 . وبالتالي، نجد أن I_1 و I_2 تياران داخلان إلى النقطة *a*، بينما التيار I_3 يكون خارجاً منها.



<u>خطوة2:</u> نقوم بتحديد قطبية جميع المقاومات بالتوافق مع اتجاه التيارات المختارة، كما هو مبين في الشكل

<u>خطوة3:</u> نطبق قانون كرشوف لحساب الجهد في كل حلقة مغلقة وفقاً لاتجاه عقارب الساعة (Clockwise) كما يلي:

$$\text{Loop}\,1: \sum V = +E_1 - V_{R_1} - V_{R_3} = 0$$

$$\text{Loop}\,2: \sum V = +V_{R_3} + V_{R_2} - E_1 = 0$$

ملاحظة: إشارة (+) تعني ارتفاع في الكمون، بينما إشارة (-) فتعني انخفاض في الكمون.

بالتعويض في هذه المعادلات، نجد:

$$\text{Loop}\,1: \sum V = +2\,\text{V} - (2\,\Omega)I_1 - (4\,\Omega)I_3 = 0$$

$$\text{Loop}\,2: \sum V = +(4\,\Omega)I_3 + (1\,\Omega)I_2 - 6\,\text{V} = 0$$

<u>خطوة4:</u> نطبق قانون كرشوف للتيار في العقدة *a* من الدارة (الدارة تحتوي على عقدتان، فالقانون يطبق على عقدة واحدة)، فنجد أن: $I_1 + I_2 = I_3$.

<u>خطوة5:</u> بنتيجة الخطوات السابقة، حصلنا على ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل:

$$2-2I_1-4I_3=0 \qquad\qquad 2I_1+0\ +4I_3=2$$

ويمكن إعادة كتابتها:

$$4I_3+1I_2-\ \ 6=0 \qquad\qquad 0+I_2+4I_3=6$$

$$I_1+\ \ I_2=I_3 \qquad\qquad I_1+I_2-\ \ I_3=0$$

لحل هذه المعادلات وإيجاد قيم التيارات نستخدم طريقة المحددات من الدرجة الثالثة.
من المعادلات نجد المحدد (D):

$$D=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

عندئذ: $I_1=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}}{D}=-1\,\text{A}$ ، $I_2=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 4\\ 0 & 6 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{D}=2\,\text{A}$ ، $I_3=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{D}=1\,\text{A}$

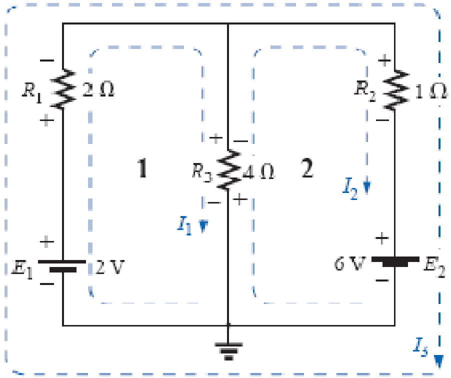
ملاحظة: إشارة السالب في قيمة التيار I_1 تشير إلى أن الاتجاه الحقيقي لهذا التيار هو عكس المفترض.

التحليل الشبكي (الحلقي)

Mesh Analysis

يعتبر قانون كرشوف للجهد (KVL) القاعدة الأساسية للتحليل الشبكي.

تتلخص آلية طريقة التحليل الحلقي بالخطوات التالية، المطبقة على الدارة المبينة في الشكل.

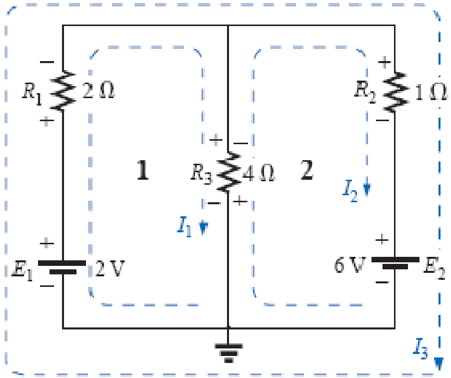


١. نحدد لكل حلقة مغلقة من حلقات الشبكة تيار افتراضي ونعتمد اتجاه عقارب الساعة.

٢. نحدد أقطاب كل مقاومة من مقاومات الشبكة وفق اتجاه التيار الافتراضي المار بها، أما مصادر التغذية فتبقى أقطابها كما هي محددة دون أي تغيير.

٣. نطبق قانون كرشوف للجهد لكل حلقة من حلقات الشبكة وذلك باتجاه عقارب الساعة.

٤. نقوم بحل المعادلات الخطية الناتجة آنياً بإحدى الطرق الرياضية ونجد قيم التيارات المفترضة. ويلاحظ هنا أن عدد المعادلات يساوي عدد الحلقات.



ملاحظة: في حالة وقوع مقاومة بين حلقتين في الدارة، فهذا يعني أنه يمر فيها تياران، تيار الحلقة الأولى و تيار الحلقة الثانية، ويكون التيار الكلي المار في هذه المقاومة مساوياً لمجموع التيارين المارين بها إذا كانا متطابقان بالاتجاه ويساوي الفرق بينهما إذا كانا مختلفان بالاتجاه وفق التالي:

١. الفرق بين تيار الحلقة الأولى (I_1) وتيار الحلقة الثانية (I_2) عندما نطبق على الحلقة الأولى، أي $I_1 - I_2$

٢. الفرق بين تيار الحلقة الثانية (I_2) وتيار الحلقة الأولى (I_1) عندما نطبق على الحلقة الثانية، أي $I_2 - I_1$

مثال ٦-٣: احسب التيار المار في كل فرع من فروع الدارة المبينة في الشكل مستخدماً التحليل الحلقي

الحل:

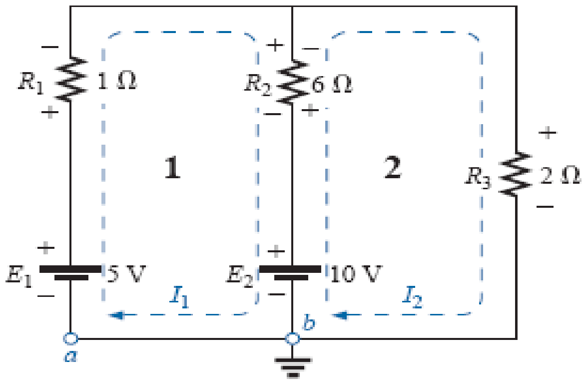
الخطوة الأولى والثانية تم تنفيذهما كما هو مشار إليه في الدارة. ومن خلاله، نلاحظ أن قطبية المقاومة $R_3 = 6\Omega$ تختلف من حلقة إلى أخرى.

خطوة3: نطبق قانون كرشوف للجهد لكل حلقة من حلقات الشبكة وذلك باتجاه عقارب الساعة، فنجد:

(من النقطة a مع عقارب الساعة) $\text{Loop 1}: \ +E_1 - V_1 - V_2 - E_2 = 0$

(من النقطة b مع عقارب الساعة) $\text{Loop 2}: \ E_2 - V_2 - V_3 = 0$

حيث أن V_2 هو الجهد المطبق على طرفي المقاومة R_3. فبالنسبة للحلقة الأولى يكون التيار المار في هذه المقاومة مساوياً $I_1 - I_2$ لأن I_2 يجري عكس I_1. أما بالنسبة للحلقة الثانية فيكون مساوياً $I_2 - I_1$.



بالتعويض، نجد:

$$\text{Loop 1}: \ +5\,\text{V} - (1\Omega)I_1 - (6\Omega)(I_1 - I_2) - 10\,\text{V} = 0$$

$$\text{Loop 2}: \ +10\,\text{V} - (6\Omega)(I_2 - I_1) - (2\Omega)I_2 = 0$$

وبإعادة كتابة المعادلات، نحصل على:

$$5 - 1I_1 - 6I_1 + 6I_2 - 10 = 0 \Leftrightarrow -7I_1 + 6I_2 = 5$$

$$10 - 6I_2 + 6I_1 - 2I_2 = 0 \Leftrightarrow +6I_1 - 8I_2 = -10$$

$$-7I_1 + 6I_2 = 5$$
$$+6I_1 - 8I_2 = -10$$

خطوة4: بحل هاتين المعادلتين بطريق المحددات، نجد:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -10 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-40+60}{56-36} = \frac{20}{20} = 1\,\mathrm{A}$$

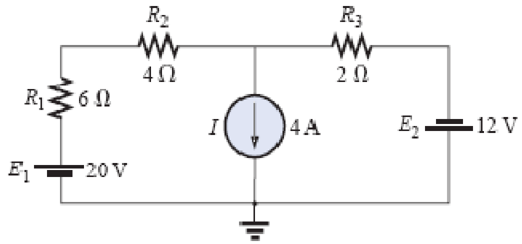
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}}{20} = \frac{70-30}{20} = \frac{40}{20} = 2\,\mathrm{A}$$

****

التيارات الحلقية الفائقة (Supermesh Currents)

تشير هذه التسمية إلى تركيبة من حلقتين في دارة تشتركان بمصدر للتيار عند حدودهما.

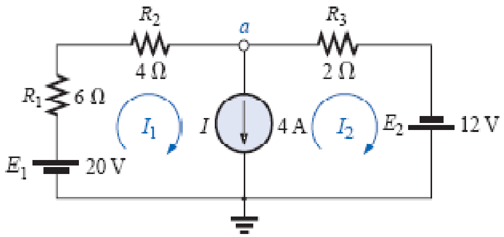
في هذه الحالة نقوم باستبدال مصدر التيار بدارة مفتوحة ومن ثم يتم تطبيق التحليل الحلقي لإيجاد ما يسمى بالتيارات الحلقية الفائقة.



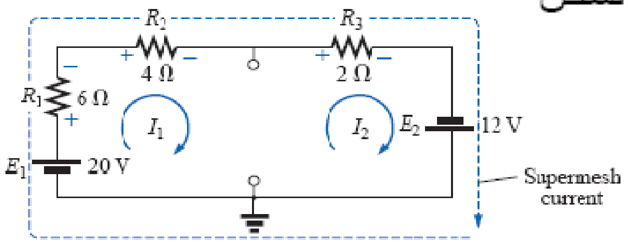
مثال ٦-٤: أوجد التيارات في الشبكة المبينة في الشكل مستخدما التحليل الحلقي.

الحل:

أولاً: التيارات الحلقية محددة كما هو مبين في الشكل



عندئذٍ، نقوم ذهنياً بحذف مصدر التيار، فتصبح الدارة كما هو مبين في الشكل ومن ثم نطبق قانون كرشوف للجهد على الدارة الناتجة.



بتطبيق قانون كرشوف للجهود نجد:

$$20\,\text{V} - I_1(6\,\Omega) - I_1(4\,\Omega) - I_2(2\,\Omega) + 12\,\text{V} = 0$$

$$10\,I_1 + 2\,I_2 = 32$$

وعندئذٍ، تستخدم العقدة a لربط التيارات الحلقية بمصدر التيار باستخدام قانون كرشوف للتيار وفق التالي: $I_1 = I + I_2$.

بالنتيجة نحصل على المعادلتين الخطيتين:

$$10\,I_1 + 2\,I_2 = 32$$
$$I_1 - I_2 = 4$$

وبحلهما نجد:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 32 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(32)(-1)-(2)(4)}{(10)(-1)-(2)(1)} = \frac{40}{12} = 3.33\,\text{A}$$

$$I_2 = I_1 - 4\,\text{A} = 3.33\,\text{A} - 4\,\text{A} = -0.67\,\text{A}$$

التحليل العقدي

Nodal Analysis

يعتبر قانون كرشوف للتيارات (KCL) القاعدة الأساسية للتحليل العقدي.

تتلخص آلية التحليل العقدي في الدارات المستمرة كما يلي:

١. تحديد عدد العقد الموجودة في الدارة.

٢. اختيار ما يسمى بعقدة المرجع (Reference Node) وغالباً ما تكون نقطة الأرضية (Ground)، أي يكون الجهد في هذه العقدة مساويا الصفر(   ). وعلى أساس هذه العقدة تصنف باقي العقد في الدارة بناءً على قيم جهودها وهي $0\ V$ الخ....

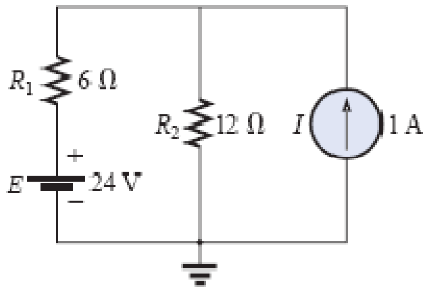
٣. نفرض التيارات ونحدد الاتجاه في كل عقدة V_1, V_2, V_3 ...

٤. نطبق قانون كرشوف على كل عقدة ماعدا عقدة المرجع.

٥. حل المعادلات الناتجة و إيجاد قيم التيارات المفترضة.

العقدة الفائقة (Supernode)

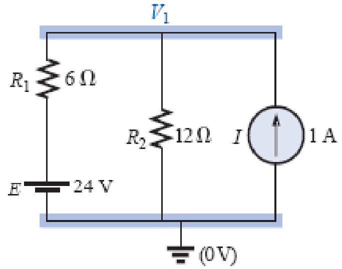
إذا وجد مصدر جهد مستقل في الشبكة بين عقدتين نستبدل ذهنياً هذا المصدر بدارة مغلقة مكافئة ونحصل بذلك على مايسمى بالعقدة الفائقة.



مثال ٦-٥: طبق طريقة التحليل العقدي على الدارة المبينة في الشكل لإيجاد التيارات المارة في كل فرع منها.

الحل:

خطوة 1 و2: الدارة تحتوي على عقدتين كما هو مبين في الشكل حيث أن الجهد في العقدة السفلى يساوي الصفر وتعتبر عقدة المرجع (0 V) والعقدة العليا (V_1)



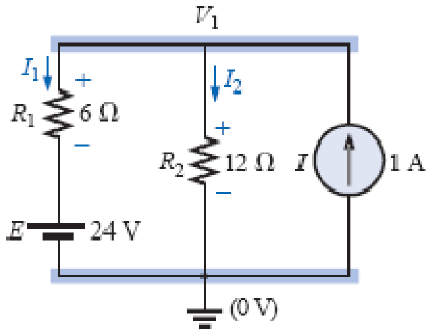
خطوة 3 : نحدد اتجاه التيارات كما هو مبين في الشكل

من الشكل، نلاحظ أن التيارات I_1 و I_2 تعرّف بأنها مغادرة من العقدة العليا (V_1)

خطوة 4 : نطبق قانون كرشوف للتيار على العقدة العليا، فنجد: $I = I_1 + I_2$

من الشكل، نجد أن التيار I_2 يرتبط بالعقدة V_1 وفقاً لقانون أوم على النحو التالي:

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_1}{R_2}, \quad I_1 = \frac{V_{R_1}}{R_1}, \quad \therefore \; V_{R_1} = V_1 - E$$



بالتعويض في علاقة قانون كرشوف للتيار، نجد:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} \Leftrightarrow V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E}{R_1} + I$$

بتعويض القيم المعطاة، نجد:

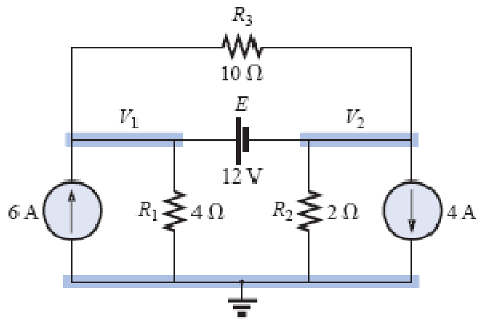
$$V_1\left(\frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega}\right) = \frac{24\text{ V}}{6\,\Omega} + 1\text{A} \Rightarrow V_1 = 20\text{ V}$$

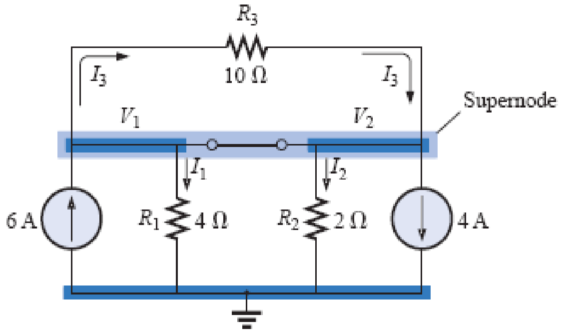
وبالتالي،

$$I_1 = \frac{V_1 - E}{R_1} = \frac{20\text{ V} - 24\text{ V}}{6\,\Omega} = -0.667\text{ A}; \; I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{20\text{ V}}{12\,\Omega} 1.667\text{ A}$$

تشير إشارة السالب إلى أن الاتجاه الحقيقي للتيار I_1 هو عكس الاتجاه المفروض.

مثال ٦-٦: أوجد الجهود العقدية V_1 و V_2 في الدارة المبينة في الشكل باستخدام مفهوم **العقدة الفائقة**.





الحل:

نستبدل مصدر الجهد المستقل ($E = 12\,\text{V}$) بدارة مغلقة مكافئة، فنحصل على الدارة المبينة في الشكل بالنتيجة، نحصل على عقدة فائقة واحدة، والمبينة كما هو مشار إليها في الشكل والتي سوف نطبق عليها قانون كرشوف للتيار كالتالي:

من الشكل نلاحظ أن التيار I_3 يكون مغادراً العقدة الفائقة من V_1 وداخلاً اليها عند V_2 وبتطبيق قانون كرشوف للتيار نجد:

$$\sum I_i = \sum I_o$$

$$6\,\text{A} + I_3 = I_1 + I_2 + 4\,\text{A} + I_3 \Rightarrow I_1 + I_2 = 2\text{A}$$

عندئذٍ:

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = 2\,\text{A} \Leftrightarrow \frac{V_1}{4\Omega} + \frac{V_2}{2\Omega} = 2\,\text{A}$$

بربط الجهود العقدية إلى مصدر الجهد المستقل، يكون لدينا:

$$V_1 - V_2 = E = 12\,\text{V}$$

بالنتيجة، يكون لدينا معادلتان خطيتان بمجهولين:

$$0.25V_1 + 0.5V_2 = 2$$
$$V_1 - \quad V_2 = 12$$

وبحل هاتين المعادلتين، نجد: $V_1 = V_2 + 12 \Rightarrow 0.25(V_2 + 12) + 0.5V_2 = 2$

وبالتالي: $V_2 = -1.333\,\text{V};\ V_1 = +10.667\,\text{V}$

وتيارات الشبكة تكون: $I_1 \downarrow = \frac{V_1}{R_1} = \frac{10.667\,\text{V}}{4\Omega} = 2.667\,\text{A}$

$$I_1 \uparrow = \frac{V_2}{R_2} = \frac{1.333\,\text{V}}{2\Omega} = 0.667\,\text{A} \quad ، \quad \underset{\rightarrow}{I_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{(10.667 - (-1.333))\,\text{V}}{10\Omega} = 1.2\,\text{A}$$

نهاية المحاضرة السادسة

The end

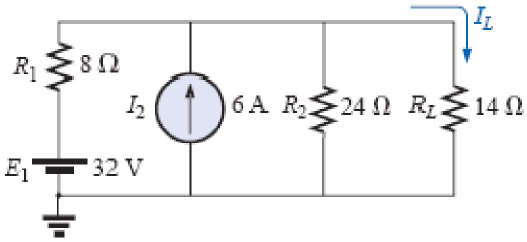
****

يتبع

مسائل محلولة

أمثلة محلولة

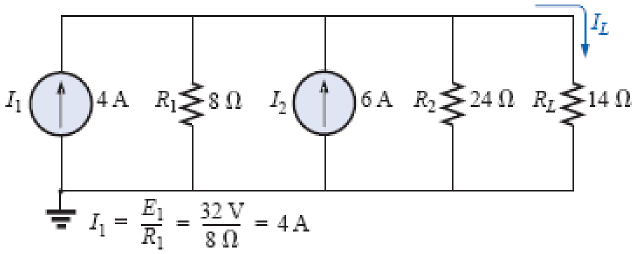
مثال 8-6: حوّل الدارة المبينة في الشكل (8-10) إلى دارة بمصدر واحد للتيار واحسب التيار المار عبر المقاومة R_L.



الشكل (8-10) – دارة المثال 8-6

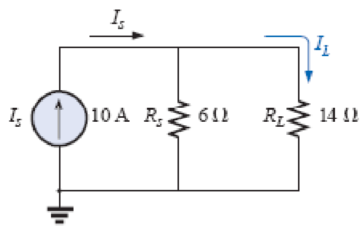
الحل:

نقوم بتحويل مصدر الجهد إلى مصدر تيار كما هو مبين في الشكل (8-11).



الشكل (8-11) – تحويل مصدر الجهد إلى مصدر تيار

نقوم بتجميع مصادر التيارات، فنجد أن: $I_s = I_1 + I_2 = 4\text{A} + 6\text{A} = 10\text{A}$. وتكون المقاومة الكلية: $R_s = R_1 \| R_2 = 8\Omega \| 24\Omega = 6\Omega$. و الآن، نقوم برسم الدارة المكافئة، كما هو مبين في الشكل (8-12).

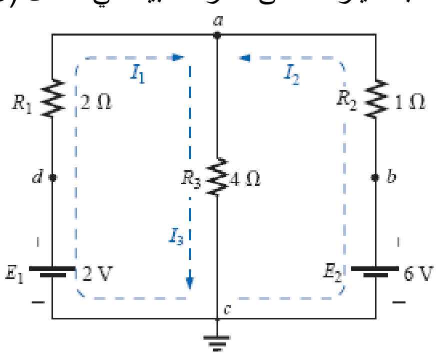


الشكل (8-12) - الدارة المكافئة

بتطبيق قانون قاسم التيار (CDR)، نجد:

$$I_L = \frac{R_s I_s}{R_s + R_L} = \frac{(6\Omega)(10\Omega)}{6\Omega + 10\Omega} = 3\text{A}$$

مثال 8-7: طبق طريقة التحليل الفرعي لحساب التيارات على الدارة المبينة في الشكل (8-14).

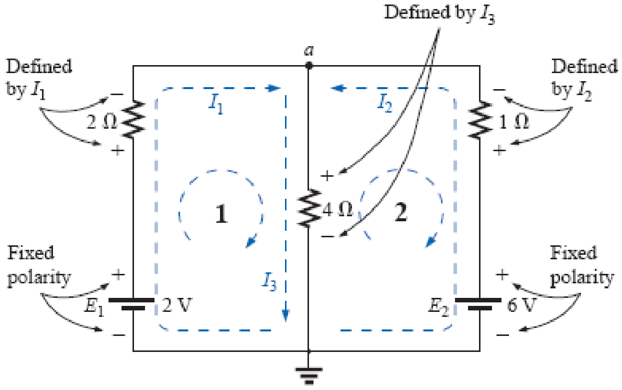


الشكل (8-14) – دارة المثال 8-7

الحل:

خطوة1: باعتبار لدينا ثلاثة فروع في الدارة محددة بالنقاط (*cda, cba, ca*)، فانه يتم اختيار ثلاثة تيارات (I_1, I_2, I_3) عشوائية (arbitrary directions). اتجاه التيارات I_1 و I_2 تم اختيارها مطابقة مع مصادر التغذية E_1 و E_2 . وبالتالي، نجد أن I_1 و I_2 تياران داخلان إلى النقطة *a*، بينما التيار I_3 يكون خارجاً منها.

خطوة2: نقوم بتحديد قطبية جميع المقاومات بالتوافق مع اتجاه التيارات المختارة، كما هو مبين في الشكل (8-15).



الشكل (8-15) – تحديد قطبية المقاومات

خطوة3: نطبق قانون كرشوف لحساب الجهد في كل حلقة مغلقة وفقاً لاتجاه عقارب الساعة (Clockwise) كما يلي:

$$\text{Loop}\,1: \sum V = +E_1 - V_{R_1} - V_{R_3} = 0$$

$$\text{Loop}\,2: \sum V = +V_{R_3} + V_{R_2} - E_1 = 0$$

ملاحظة: إشارة (+) تعني ارتفاع في الكمون، بينما إشارة (-) فتعني انخفاض في الكمون.

بالتعويض في هذه المعادلات، نجد:

$$\text{Loop}\,1: \sum V = +2\,\text{V} - (2\,\Omega)I_1 - (4\Omega)I_3 = 0$$

$$\text{Loop}\,2: \sum V = +(4\Omega)I_3 + (1\Omega)I_2 - 6\,\text{V} = 0$$

خطوة4: نطبق قانون كرشوف للتيار في العقدة *a* من الدارة (الدارة تحتوي على عقدتان، فالقانون يطبق على عقدة واحدة)، فنجد أن: $I_1 + I_2 = I_3$.

خطوة5: بنتيجة الخطوات السابقة، حصلنا على ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل:

$$2 - 2I_1 - 4I_3 = 0 \qquad\qquad 2I_1 + 0 + 4I_3 = 2$$

$$4I_3 + 1I_2 - 6 = 0 \quad \text{ويمكن إعادة كتابتها:} \quad 0 + I_2 + 4I_3 = 6$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \qquad\qquad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

لحل هذه المعادلات وإيجاد قيم التيارات نستخدم طريقة المحددات من الدرجة الثالثة.

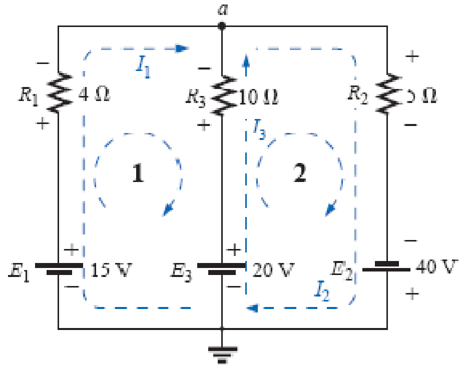
من المعادلات نجد المحدد (*D*):

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

عندئذ: $I_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{D} = -1\text{A}$ ، $I_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{D} = 2\text{ A}$ ، $I_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 1\text{ A}$

ملاحظة: إشارة السالب في قيمة التيار I_1 تشير إلى أن الاتجاه الحقيقي لهذا التيار هو عكس المفترض.

مثال8-8: لتكن الدارة المبينة في الشكل (8-15)، احسب التيارات (I_1, I_2, I_3) المشار إليها باستخدام طريقة التحليل الفرعي.



الشكل (8-15) – دارة المثال 8-8

الحل:

من الدارة نجد أن الخطوتان الأولى والثانية قد تم انجازهما، أي أنه تم تحديد التيارات واتجاهاتها وكذلك قطبية المقاومات واتجاه كل حلقة.

الخطوة الثالثة: نطبق قانون كرشوف لحساب الجهد في كل حلقة مغلقة وفقاً لاتجاه عقارب الساعة، فنجد:

$$\text{Loop1}: +15\,\text{V} - (4\,\Omega)I_1 + (10\,\Omega)I_3 - 20\,\text{V} = 0$$

$$\text{Loop2}: +20\,\text{V} - (10\,\Omega)I_3 - (5\,\Omega)I_2 + 40\,\text{V} = 0$$

الخطوة الرابعة: بتطبيق قانون كرشوف للتيار في العقدة a من الدارة، نجد أن: $I_1 + I_3 = I_2$.

الخطوة الخامسة: بنتيجة الخطوات السابقة، وبتعويض معادلة الخطوة الرابعة في معادلات الحلقة الأولى والثانية، نجد:

$$\left.\begin{aligned} 15 - 4I_1 + 10I_3 - 20 &= 0 \\ 20 - 10I_3 - 5(I_1 + I_3) + 40 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} -4I_1 + 10I_3 &= 5 \\ -5I_1 - 15I_3 &= -60 \end{aligned}$$

نضرب طرفي المعادلة الناتجة الثانية بالمعامل -1 ، فتصبح:

$$\begin{aligned} -4I_1 + 10I_3 &= 5 \\ 5I_1 + 15I_3 &= 60 \end{aligned}$$

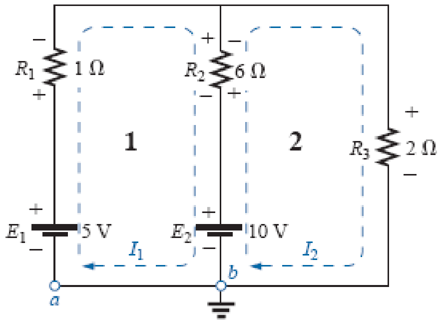
وباستخدام طريقة المحددات نجد أن:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 60 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{75 - 600}{-60 - 50} = \frac{-525}{-110} = 4.773\,\text{A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 60 \end{vmatrix}}{-110} = \frac{-240 - 25}{-110} = \frac{-265}{-110} = 2.409\,\text{A}$$

$$I_2 = I_1 + I_3 = 4.773 + 2.409 = 7.182\,\text{A}$$

مثال8-9: احسب التيار المار في كل فرع من فروع الدارة المبينة في الشكل (8-17).



الشكل (8-17) – دارة المثال 8-9

الحل:

الخطوة الأولى والثانية تم تنفيذهما كما هو مشار إليه في الدارة. ومن خلاله، نلاحظ أن قطبية المقاومة $R_3 = 6\Omega$ تختلف من حلقة إلى أخرى.

خطوة3: نطبق قانون كرشوف للجهد لكل حلقة من حلقات الشبكة وذلك باتجاه عقارب الساعة، فنجد:

$\text{Loop 1}: \; +E_1 - V_1 - V_2 - E_2 = 0$ (من النقطة a مع عقارب الساعة)

$\text{Loop 2}: \; E_2 - V_2 - V_3 = 0$ (من النقطة b مع عقارب الساعة)

حيث أن V_2 هو الجهد المطبق على طرفي المقاومة R_3. فبالنسبة للحلقة الأولى يكون التيار المار في هذه المقاومة مساوياً $I_1 - I_2$ لأن I_2 يجري عكس I_1. أما بالنسبة للحلقة الثانية فيكون مساوياً $I_2 - I_1$.

بالتعويض، نجد:

$$\text{Loop 1}: \; +5\,\text{V} - (1\Omega)I_1 - (6\Omega)(I_1 - I_2) - 10\,\text{V} = 0$$

$$\text{Loop 2}: \; +10\,\text{V} - (6\Omega)(I_2 - I_1) - (2\Omega)I_2 = 0$$

وبإعادة كتابة المعادلات، نحصل على:

$$5 - 1I_1 - 6I_1 + 6I_2 - 10 = 0 \Leftrightarrow -7I_1 + 6I_2 = 5$$

$$10 - 6I_2 + 6I_1 - 2I_2 = 0 \Leftrightarrow +6I_1 - 8I_2 = -10$$

خطوة4: بحل هاتين المعادلتين بطريق المحددات، نجد:

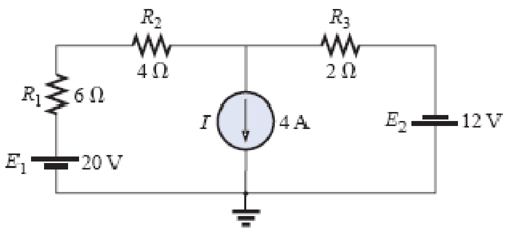
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -10 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-40+60}{56-36} = \frac{20}{20} = 1\,\text{A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}}{20} = \frac{70-30}{20} = \frac{40}{20} = 2\,\text{A}$$

وبما أن شدة التيارات I_1 و I_2 ايجابية وهما يجريان باتجاهين مختلفين عبر المقاومة R_2 و مصدر التغذية E_2، فان التيار الكلي في هذا الفرع يساوي الفرق بين قيمة التيارين واتجاهه باتجاه التيار الأكبر.

نلاحظ أن، $I_2 > I_1$، وبالتالي يكون: $I_{R_2} = I_2 - I_1 = 2\,\text{A} - 1\,\text{A} = 1\,\text{A}$، وهو باتجاه I_2.

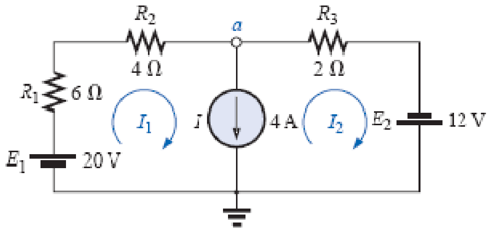
مثال 8-10: أوجد التيارات في الشبكة المبينة في الشكل (8-18) مستخدما التحليل الحلقي.



الشكل (8-18) – دارة المثال 8-10

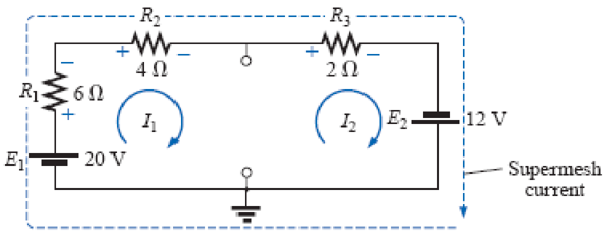
الحل:

أولاً: التيارات الحلقية محددة كما هو مبين في الشكل (8-19).



الشكل (8-19) – دارة تحديد التيارات الحلقية

عندئذٍ، نقوم ذهنياً بحذف مصدر التيار، فتصبح الدارة كما هو مبين في الشكل (8-20)، ومن ثم نطبق قانون كرشوف للجهد على الدارة الناتجة.



الشكل (8-20) – دارة تحديد التيار الحلقي الفائق

بتطبيق قانون كرشوف للجهود نجد:

$$20\,\text{V} - I_1(6\,\Omega) - I_1(4\,\Omega) - I_2(2\,\Omega) + 12\,\text{V} = 0$$

$$10\,I_1 + 2\,I_2 = 32$$

وعندئذٍ، تستخدم العقدة *a* لربط التيارات الحلقية بمصدر التيار باستخدام قانون كرشوف للتيار وفق التالي:

$I_1 = I + I_2$.

بالنتيجة نحصل على المعادلتين الخطيتين:

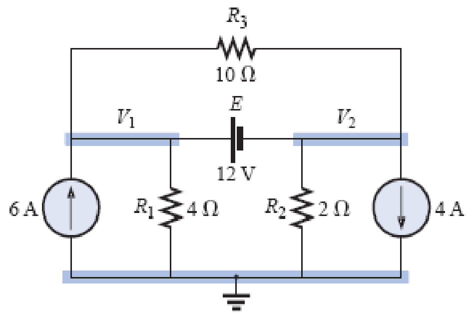
$$10\,I_1 + 2\,I_2 = 32$$

$$I_1 - I_2 = 4$$

وبحلهما نجد: $I_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 32 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{(32)(-1)-(2)(4)}{(10)(-1)-(2)(1)} = \dfrac{40}{12} = 3.33\,\text{A}$

$$I_2 = I_1 - 4\,\text{A} = 3.33\,\text{A} - 4\,\text{A} = -0.67\,\text{A}$$

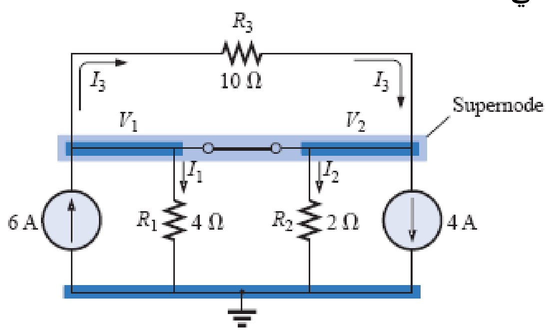
مثال 8-12: أوجد الجهود العقدية V_1 و V_2 للدارة المبينة في الشكل (8-23) باستخدام مفهوم العقدة الفائقة.



الشكل (8-23) – دارة المثال 8-12

الحل:

نستبدل مصدر الجهد المستقل ($E = 12\,\text{V}$) بدارة مغلقة مكافئة، فنحصل على الدارة المبينة في الشكل (8-24). بالنتيجة، نحصل على عقدة فائقة واحدة، والمبينة كما هو مشار إليها في الشكل (8-24)، والتي سوف نطبق عليها قانون كرشوف للتيار كالتالي:



الشكل (8-24) – دارة العقدة الفائقة

من الشكل نلاحظ أن التيار I_3 يكون مغادراً العقدة الفائقة من V_1 وداخلاً اليها عند V_2 وبتطبيق قانون كرشوف للتيار نجد:

$$\sum I_i = \sum I_o$$

$$6\,\text{A} + I_3 = I_1 + I_2 + 4\,\text{A} + I_3 \Rightarrow I_1 + I_2 = 2\text{A}$$

عندئذٍ:
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = 2\,\text{A} \Leftrightarrow \frac{V_1}{4\Omega} + \frac{V_2}{2\Omega} = 2\,\text{A}$$

بربط الجهود العقدية إلى مصدر الجهد المستقل، يكون لدينا:

$$V_1 - V_2 = E = 12\,\text{V}$$

بالنتيجة، يكون لدينا معادلتان خطيتان بمجهولين:

$$0.25V_1 + 0.5V_2 = 2$$

$$V_1 - \quad V_2 = 12$$

وبحل هاتين المعادلتين، نجد: $V_1 = V_2 + 12 \Rightarrow 0.25(V_2 + 12) + 0.5V_2 = 2$

وبالتالي: $V_2 = -1.333\,\text{V};\ V_1 = +10.667\,\text{V}$

وتيارات الشبكة تكون: $I_1 \downarrow = \dfrac{V_1}{R_1} = \dfrac{10.667\,\text{V}}{4\Omega} = 2.667\,\text{A}$

$$I_1 \uparrow = \frac{V_2}{R_2} = \frac{1.333\,\text{V}}{2\Omega} = 0.667\,\text{A}$$

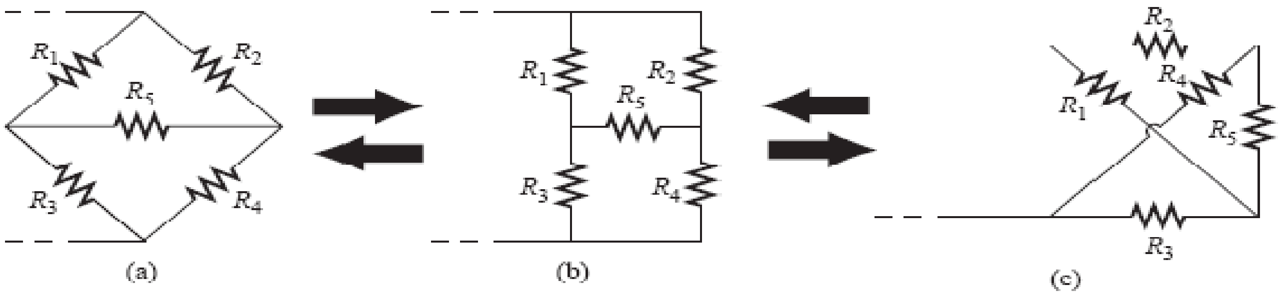
$$\underset{\rightarrow}{I_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{(10.667 - (-1.333))\ \text{V}}{10\ \Omega} = 1.2\ \text{A}$$

نظريات الشبكة
(Network Theorems)

دارات الجسر

(Bridge circuits)

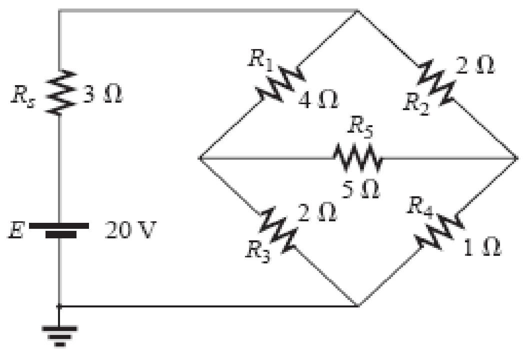
قد تظهر دارة الجسر (تسمى أيضاً دارة القنطرة) في واحد من النماذج المبينة في الشكل.

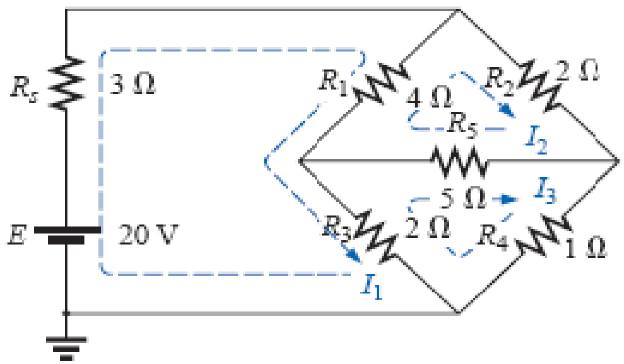


النموذج (c) يمثل ما يسمى بالدارة الشبكية (الشعرية) المتماثلة (Symmetrical Lattice Network) فيما إذا كانت $R_2 = R_3$ و $R_1 = R_4$.

يتم تحليل دارة الجسر باستخدام طريقتي التحليل الحلقي والعقدي.

التحليل الحلقي:





من الشكل، وبتطبيق قانون كرشوف للجهد والتعويض، نحصل على الآتي:

$$(3\Omega+4\Omega+2\Omega)I_1-(4\Omega)I_2-(2\Omega)I_3=20\,\mathrm{V}$$

$$(4\Omega+5\Omega+2\Omega)I_2-(4\Omega)I_1-(5\ \Omega)I_3=0$$

$$(2\Omega+5\Omega+1\ \Omega)I_3-(2\Omega)I_1-(5\ \Omega)I_2=0$$

وبالتبسيط، نجد:

$$9I_1-4I_2-2\,I_3=20$$

$$-4\,I_1+11I_2-5I_3=0$$

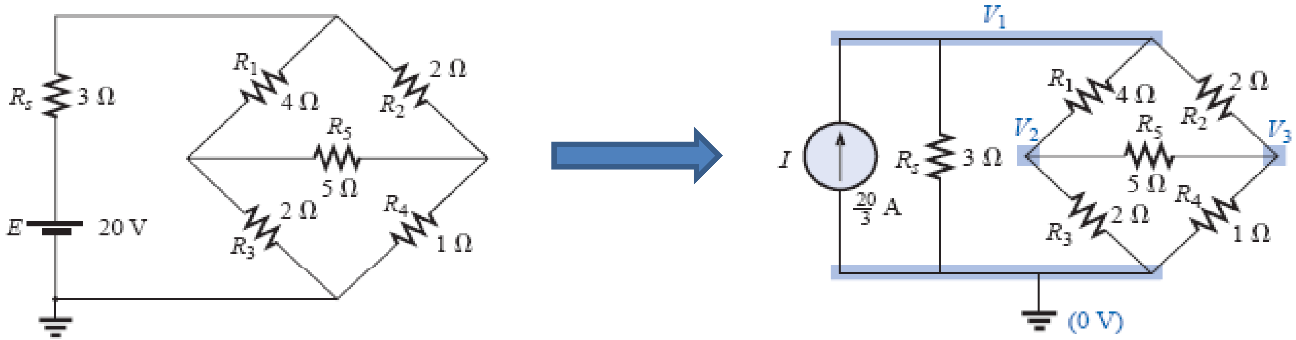
$$-2\,I_1-\ 5\,I_2+8I_3=0$$

وبحل هذه المعادلات، نجد: $I_1=4\,\mathrm{A};\ I_2=2.667\,\mathrm{A};\ I_3=2.667\,\mathrm{A}$

ويكون تيار الشبكة عبر المقاومة $R_5=5\Omega$ مساوياً:

$$I_{R_5}=I_2-I_3=2.667\mathrm{A}-2.667\mathrm{A}=0\,\mathrm{A}$$

التحليل العقدي:



من الشكل، وبتطبيق قانون كرشوف للتيار والتعويض، نحصل على الآتي:

$$\left(\frac{1}{3\Omega}+\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right)V_1-\left(\frac{1}{4\Omega}\right)V_2-\left(\frac{1}{2\Omega}\right)V_3=\frac{20}{3}\text{A}$$

$$\left(\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{5\Omega}\right)V_2-\left(\frac{1}{4\Omega}\right)V_1-\left(\frac{1}{5\Omega}\right)V_3=0$$

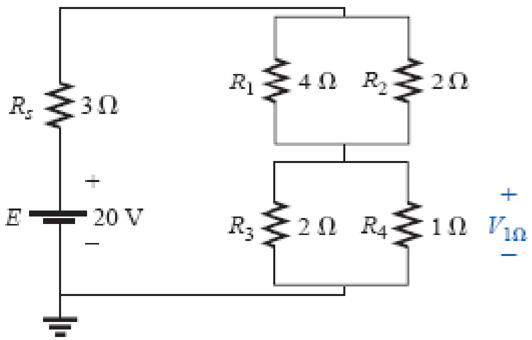
$$\left(\frac{1}{5\Omega}+\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{1\Omega}\right)V_3-\left(\frac{1}{2\Omega}\right)V_1-\left(\frac{1}{5\Omega}\right)V_3=0$$

وبتبسيط وحل هذه المعادلات، نجد: $V_1 = 8\,\text{V};\; V_2 = 2.667\,\text{V};\; V_3 = 2.667\,\text{V}$

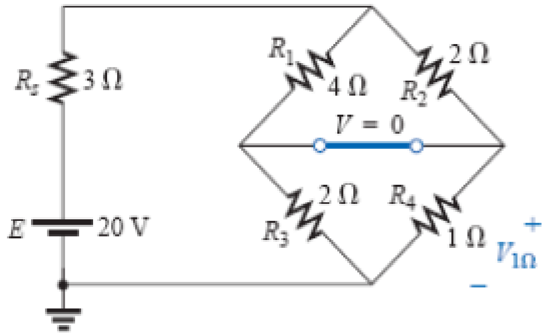
ويكون الجهد المطبق على المقاومة $R_5 = 5\Omega$ مساوياً:

$$V_{R_5} = V_2 - V_3 = 2.667\,\text{V} - 2.667\,\text{V} = 0\,\text{V}$$

وباعتبار أن V_{R_5} يساوي الصفر، فإنه بإمكاننا أن نستبدل المقاومة R_5 بدارة مقصورة (Short) في ذراع الجسر (Bridge arm) دون أن يتأثر عمل الدارة ($V = IR = I(0\Omega) = 0\,\text{V}$)، كما هو مبين في الشكل (a). وبالتالي يمكننا تحديد الجهد المطبق على المقاومة R_4 بعد إعادة رسم الدارة كما هو مبين في الشكل (b).



(b)

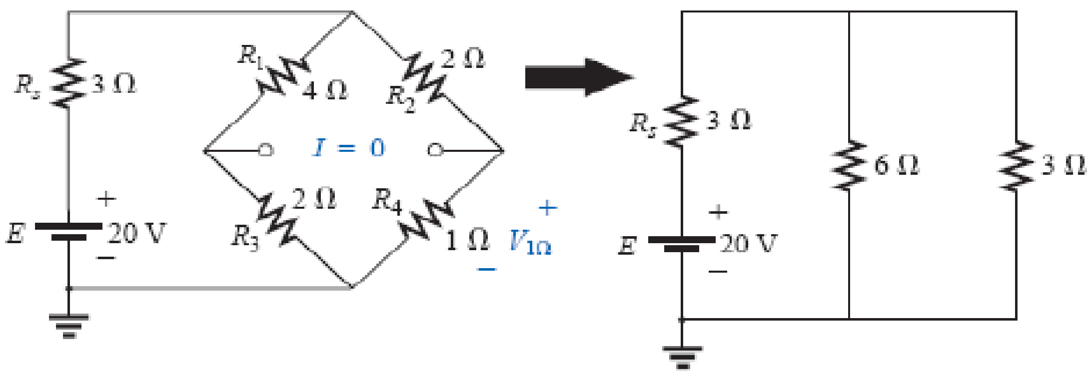


(a)

بتطبيق قانون قاسم الجهد على الدارة المبينة في الشكل (b)، نجد:

$$V_{1\Omega} = \frac{(2\Omega \,\|\, 1\Omega)\,20\,\text{V}}{(2\Omega \,\|\, 1\Omega) + (4\Omega \,\|\, 2\Omega) + 3\Omega} = 2.667\,\text{V}$$

وجدنا من التحليل الحلقي أن $I_{R_5} = 0\,\text{A}$، وهذا يكافئ دارة مفتوحة في ذراع الجسر) $(I = V/R = 0/(\infty\,\Omega) = 0\,\text{A}$، كما هو مبين في الشكل (a).



(a) (b)

وبالتالي، نحسب من جديد الجهد عبر المقاومة R_4 ونقارن النتيجة مع النتيجة السابقة.

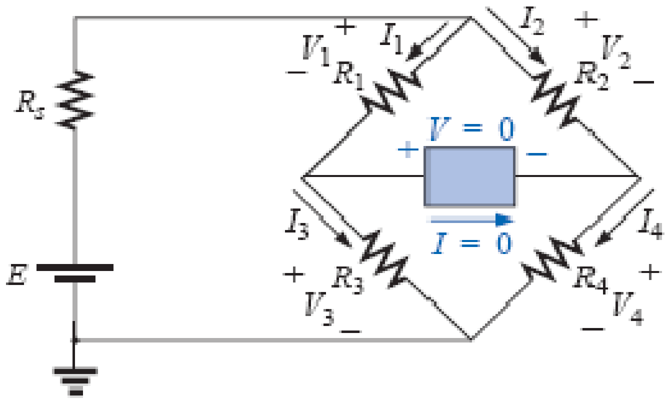
نعيد رسم الدارة بعد تجميع العناصر المرتبطة على التسلسل، كما هو مبين في الشكل (b). ومن ثم نجد:

$$V_{3\Omega} = \frac{(6\Omega \| 3\Omega)(20\,\text{V})}{(6\Omega \| 3\Omega) + 3\Omega} = 8\,\text{V};\ V_{1\Omega} = \frac{(1\Omega)(8\,\text{V})}{1\Omega + 2\Omega} = 2.667\,\text{V}$$

والنتيجة مطابقة للنتيجة المبينة أعلاه.

دارة الجسر المتوازنة

نقول أن دارة الجسر متوازنة (Balanced) إذا تحقق الشرط $I = 0\,\text{A}$ أو $V = 0\,\text{V}$.
إذا كان $V = 0\,\text{V}$ (دارة مقصورة بين النقطتين a و b)، عندئذٍ يكون: $V_1 = V_2$ و يكون $I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow I_1 = (I_2R_2)/R_1$. بالإضافة إلى ذلك يكون $V_3 = V_4$ و يكون $I_3R_3 = I_4R_4$.



إذا وضعنا $I = 0\,\text{A}$ ، عندئذٍ يكون $I_3 = I_1$ و $I_4 = I_2$. بالتعويض نجد أن $I_1R_3 = I_2R_4$. وبتعويض I_1 بقيمته السابقة، نجد:

$$\left(\frac{I_2R_2}{R_1}\right)R_3 = I_2R_2$$

وبالتالي، نحصل على العلاقة الخاصة التالية:

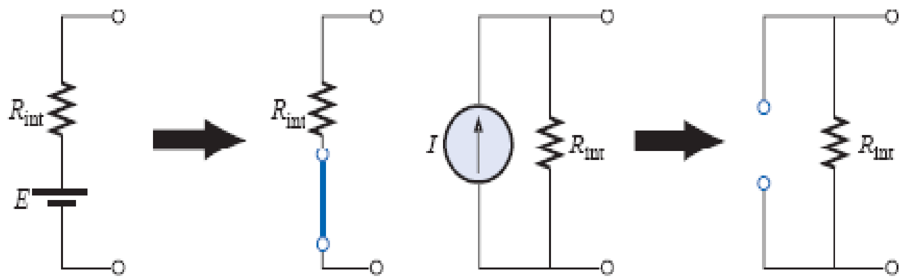
$$\boxed{\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}}$$

نظرية التراكب (Superposition Theorem)

تتلخص هذه النظرية كما يلي: التيار المار في عنصر ما من عناصر الدارة، أو الجهد المطبق عليه، يساوي المجموع الجبري للتيارات أو الجهود الناتجة بشكل مستقل عن كل منبع.

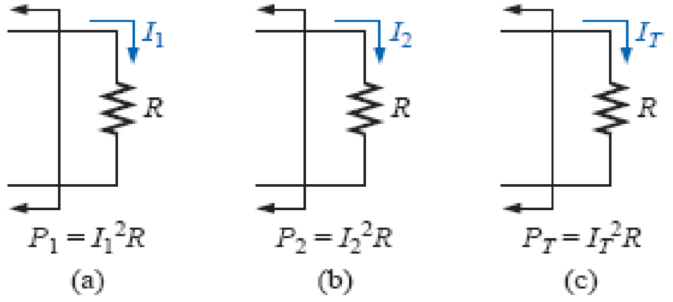
لدراسة تأثيرات كل مصدر بشكل مستقل يتطلب حذف واستبدال كل المصادر دون التأثير على النتيجة النهائية، وذلك وفق الخطوات التالية:

- لحذف مصدر الجهد، نستبدله بدارة مغلقة (Short Circuit) مع مقاومته الداخلية R_{int} على التسلسل
- لحذف مصدر التيار، نستبدله بدارة مفتوحة (open Circuit) مع مقاومته الداخلية R_{int} على التفرع



نظرية التراكب و الأستطاعة

لا تنطبق نظرية التراكب على تأثيرات الأستطاعة لأن الأستطاعة المفقودة في المقاومة تتغير بشكل لاخطي بتغير كلاً من التيار والجهد.



$$I_T = I_1 + I_2$$

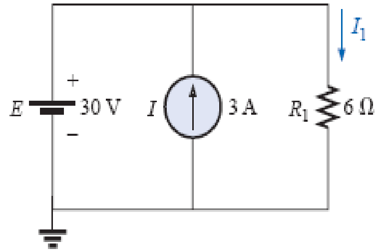
$$P_T = P_1 + P_2 = I_1^2 R + I_2^2 R = I_T^2 R \Rightarrow I_T^2 = I_1^2 + I_2^2$$

ولكن:

$$P_T = I_T^2 R = (I_1 + I_2)^2 = I_1^2 + 2 I_1 I_2 + I_2^2$$

$$I_1^2 + I_2^2 \neq I_1^2 + 2 I_1 I_2 + I_2^2$$

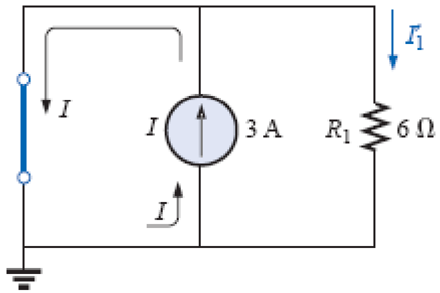
مثال ٧-١: أوجد التيار I_1 في الدارة المبينة في الشكل



الحل:

1. نحذف مصدر الجهد بوضع $E = 0\,\text{V}$ ونستبدله بدارة مغلقة،

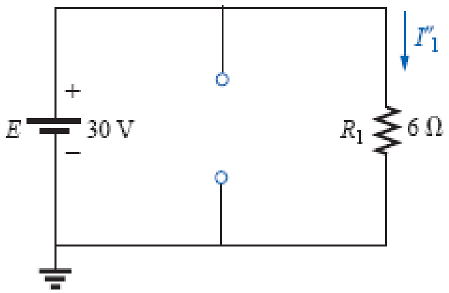
بالتالي، تيار المصدر I سوف يختار مسلك الدارة المغلقة، ويكون التيار $I_1' = 0\,\text{A}$.



$$I_1' = \frac{R_{sc} I}{R_{sc} + R_1} = \frac{(0\,\Omega)I}{0\,\Omega + 6\,\Omega} = 0\,\text{A}$$

حيث أن R_{sc} - مقاومة الدارة المغلقة.

2. نحذف مصدر التيار بوضع $I = 0\,\text{A}$ ونستبدله بدارة مفتوحة،



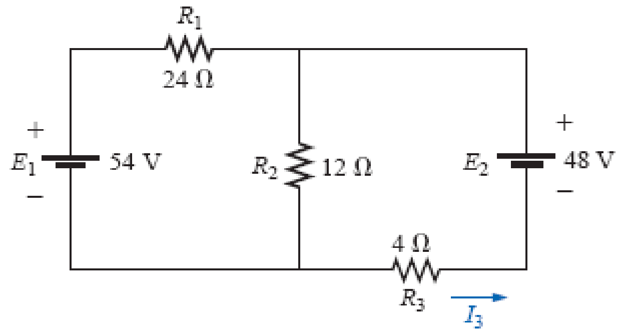
بتطبيق قانون أوم، نجد:

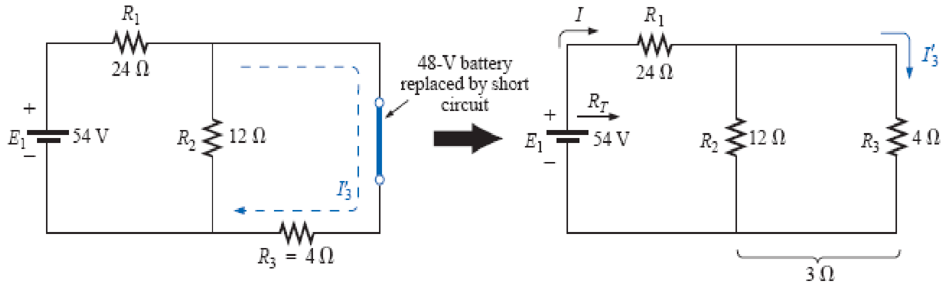
$$I_1'' = \frac{E}{R_1} = \frac{30\,\text{V}}{6\,\Omega} = 5\,\text{A}$$

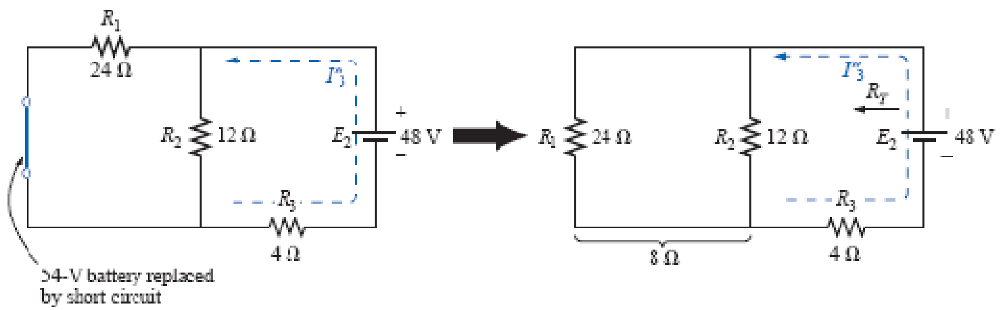
نلاحظ أن التيارين I_1', I_1'' لهما نفس الاتجاه. وبالتالي، يكون التيار الكلي:

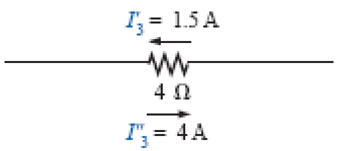
$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0\,\text{A} + 5\,\text{A} = 5\,\text{A}$$

مثال ٧-٢: لتكن الدارة ثنائية المصدر، المبينة في الشكل . أوجد التيار I_3 المار في المقاومة مستخدماً نظرية التراكب.









(Thevenin’s Theorem) نظرية ثفنن

تتلخص آلية عمل نظرية ثفنن وفق التالي:

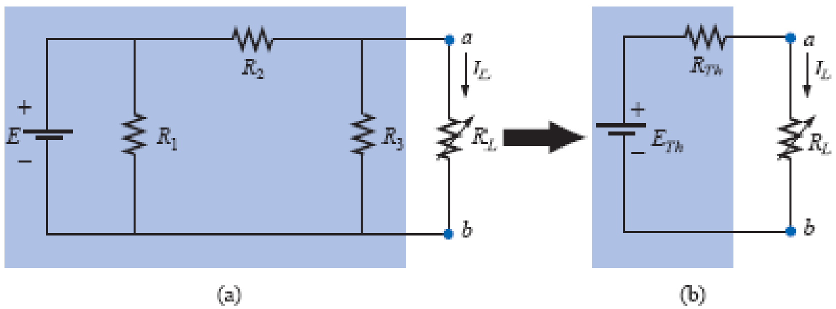
1. حذف ذلك الجزء من الدارة والذي من خلاله يتم إيجاد دارة ثفنن المكافئة. ففي الشكل يكون مطلوب حذف المقاومة المتغيرة R_L بشكل مؤقت.
2. ترميز أطراف الدارة، كما هو مبين في الشكل، فتكون الدارة ذات مخرجان a و b.

حساب المقاومة المكافئة R_{Th}:

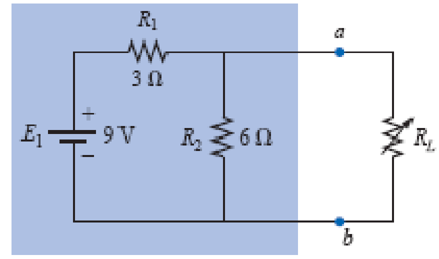
3. جعل جميع مصادر التغذية في الدارة مساوية للصفر، أي استبدال جميع مصادر الجهد بدارة مغلقة ومصادر التيار بدارة مفتوحة. وبالتالي حساب المقاومة الكلية الناتجة بين مخرجي الدارة a و b.

حساب المصدر المكافئ E_{Th}:

4. إعادة جميع المصادر الى حالتها الأصلية، ومن ثم إيجاد جهد الدارة المفتوحة (open-circuit voltage) بين مخرجي الدارة a و b، وهو ما يسمى مصدر ثفنن للتغذية E_{Th}.
5. رسم دارة ثفنن المكافئة، والتي تحتوي على المقاومة المكافئة R_{Th} مربوطة على التسلسل مع المصدر E_{Th} وكذلك الجزء الذي تم حذفه مؤقتاً في الخطوة الأولى، كما هو مبين في الشكل(b).

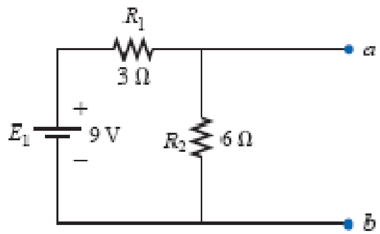


مثال ٧-٣: أوجد دارة ثفنن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل



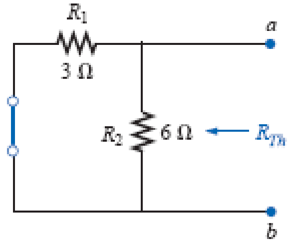
الحل:

خطوة 1 و 2 : حذف مؤقت للمقاومة المتغيرة R_L وتحديد مخارج الدارة a و b،



خطوة 3: لحساب المقاومة المكافئة R_{Th}، نستبدل مصدر التغذية E_1 بدارة مكافئة مغلقة، فتكون مقاومة ثفنن المكافئة:

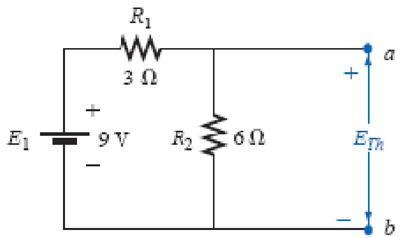
$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{(3\,\Omega)(6\,\Omega)}{3\,\Omega + 6\,\Omega} = 2\,\Omega$$



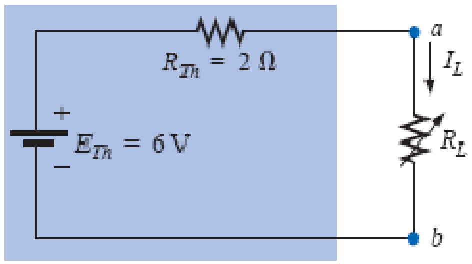
خطوة 4: من أجل حساب E_{Th} نعيد المصدر E_1 إلى وضعه الأصلي،

في هذه الحالة، تكون قيمة جهد الدارة المفتوحة E_{Th} بين الطرفين (المخرجين) a و b هي نفس قيمة هبوط الجهد على المقاومة $R_2 = 6\,\Omega$. و بتطبيق قانون قاسم الجهد، نجد:

$$E_{Th} = \frac{R_2 E_1}{R_2 + R_1} = \frac{(6\,\Omega)(9\,\text{V})}{6\,\Omega + 3\,\Omega} = \frac{54\,\text{V}}{9\,\Omega} = 6\,\text{V}$$

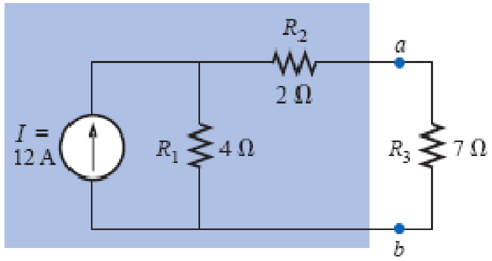


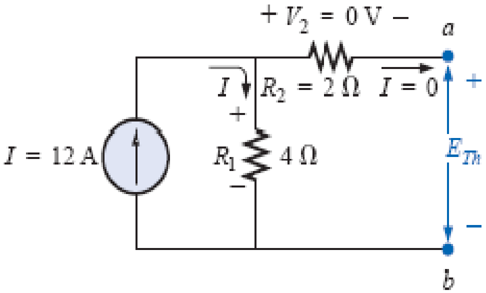
خطوة 5: نرسم دارة ثفنن المكافئة، مع إعادة المقاومة المحذوفة R_L، كما هو مبين في الشكل

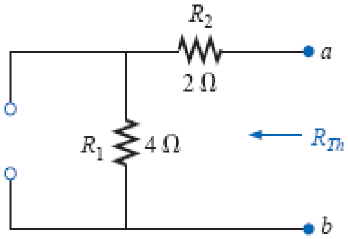


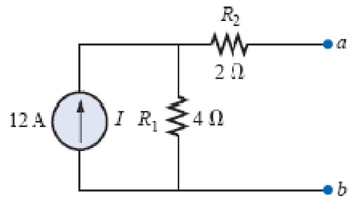
مثال ٧-٤: أوجد دارة ثفنن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل .

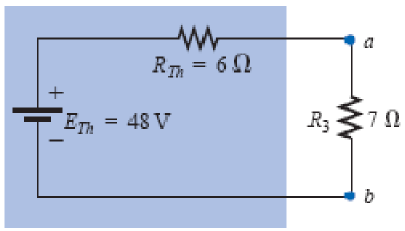
الحل:





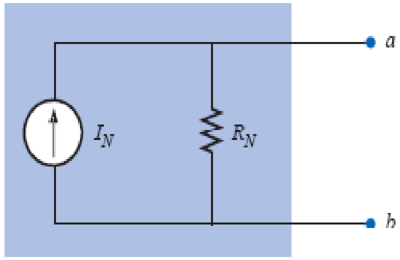






نظرية نورتن (Norton's Theorem)

تتلخص آلية عمل نظرية نورتن وفق التالي:



1. حذف ذلك الجزء من الدارة (بشكل مؤقت) والذي من خلاله يتم إيجاد دارة نورتن المكافئة.
2. ترميز أطراف الدارة فتكون الدارة ذات مخرجان a و b.

حساب المقاومة المكافئة R_N:

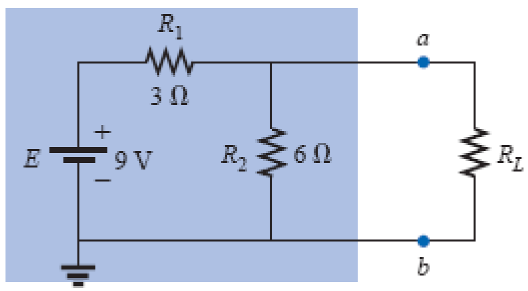
3. جعل جميع مصادر التغذية في الدارة مساوية للصفر، أي استبدال جميع مصادر الجهد بدارة مغلقة ومصادر التيار بدارة مفتوحة. وبالتالي حساب المقاومة الكلية الناتجة بين مخرجي الدارة a و b. وهنا نلاحظ أن $R_N = R_{Th}$.

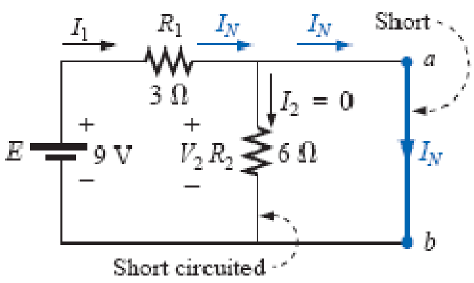
حساب مصدر التيار المكافئ I_N:

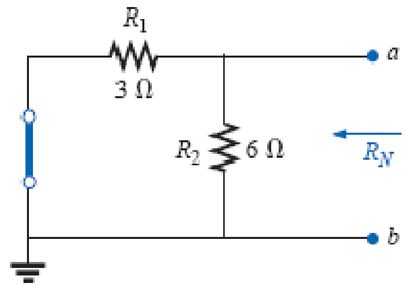
4. إعادة جميع المصادر الى حالتها الأصلية، ومن ثم إيجاد تيار الدارة المغلقة (short-circuit current) بين المخرجين a و b، وهو مايسمى بمصدر تيار نورتن للتغذية I_N.
5. رسم دارة نورتن المكافئة، والتي تحتوي على المقاومة المكافئة R_N مربوطة على التوازي مع المصدر I_N وكذلك الجزء الذي تم حذفه مؤقتاً في الخطوة الأولى.

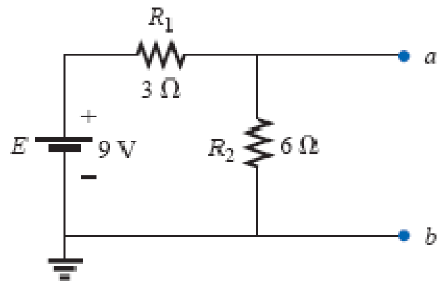
مثال ٧-٥: أوجد دارة نورتن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل .

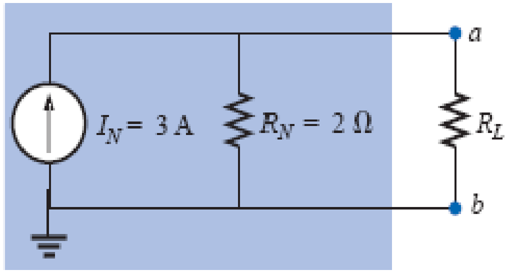
الحل:











نهاية المحاضرة السابعة

The end

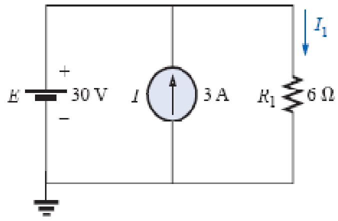
****

يتبع

مسائل محلولة

أمثلة محلولة

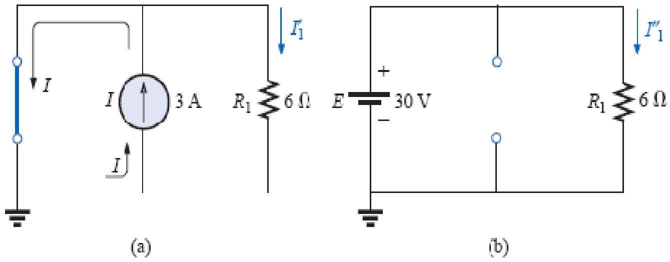
مثال 7-1: أوجد التيار I_1 في الدارة المبينة في الشكل (9-3) مستخدماً نظرية التراكب.



الشكل (9-3) – دارة المثال 9-1

الحل:

1. نحذف مصدر الجهد بوضع $E = 0\,\text{V}$ ونستبدله بدارة مقصورة، الشكل (9-4-a). بالتالي، تيار المصدر I سوف يختار مسلك الدارة المقصورة، ويكون التيار $I_1' = 0\,\text{A}$.



الشكل (9-4) – دارة تأثيرات المصادر

بتطبيق قانون قاسم التيار، نجد:

$$I_1' = \frac{R_{sc} I}{R_{sc} + R_1} = \frac{(0\,\Omega)I}{0\,\Omega + 6\,\Omega} = 0\,\text{A}$$

حيث أن R_{sc} - مقاومة الدارة المغلقة.

2. نحذف مصدر التيار بوضع $I = 0\,\text{A}$ ونستبدله بدارة مفتوحة، الشكل (9-4-b).

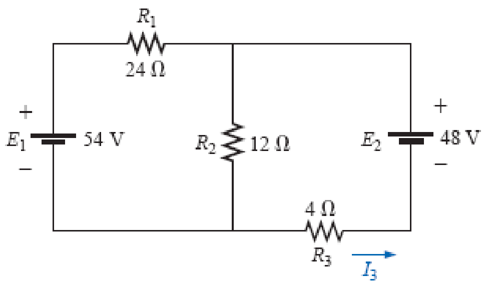
بتطبيق قانون أوم، نجد: $I_1'' = \dfrac{E}{R_1} = \dfrac{30\,\text{V}}{6\,\Omega} = 5\,\text{A}$.

نلاحظ أن التيارين I_1', I_1'' لهما نفس الاتجاه. وبالتالي، يكون التيار الكلي:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0\,\text{A} + 5\,\text{A} = 5\,\text{A}$$

النتيجة: لايوجد تاثير لمصدر التيار على التيار المار من المقاومة 6Ω. بينما الجهد المطبق على المقاومة يكون ثابتاً $30\,\text{V}$ لأنهما على التوازي.

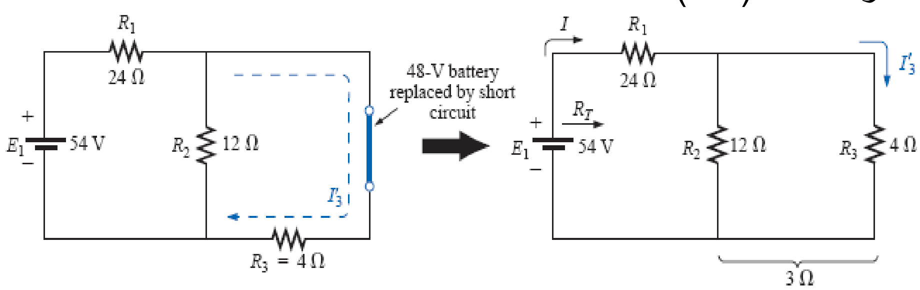
مثال 7-2: لتكن الدارة ثنائية المصدر، المبينة في الشكل (9-5). أوجد التيار I_3 المار في المقاومة $R_3 = 4\Omega$ مستخدماً نظرية التراكب.



الشكل (5-9) – دارة المثال 2-9

الحل:

1. دراسة تأثيرات المصدر $E_1 = 54\,\text{V}$ فنقوم بحذف المصدر $E_2 = 48\,\text{V}$ واستبداله بدارة مغلقة، ومن ثم نعيد رسم الدارة، الشكل (6-9).



الشكل (6-9) – دارة تأثير E_1 على التيار I_3

وبحساب المقاومة الكلية

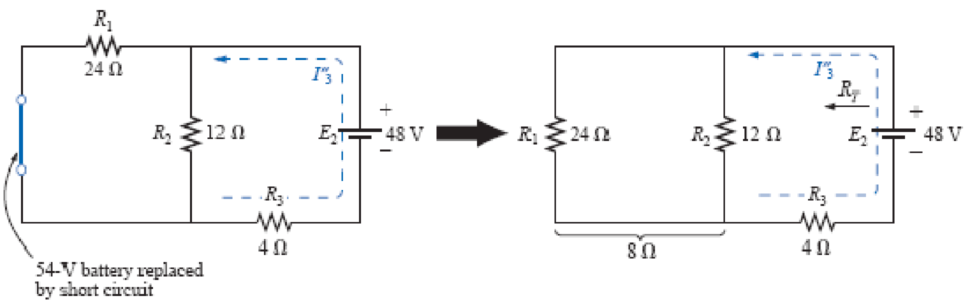
$R_T = R_1 + R_2 \,||\, R_3 = 24\Omega + 12\Omega \,||\, 4\Omega = 24\Omega + 3\Omega = 27\Omega$ ، نجد أن:

$$I = \frac{E_1}{R_T} = \frac{54\,\text{V}}{27\,\Omega} = 2\,\text{A}.$$

بتطبيق قانون قاسم التيار، نجد:

$$I_3' = \frac{R_2 I}{R_2 + R_3} = \frac{(12\,\Omega)(2\,\text{A})}{12\,\Omega + 4\,\Omega} = 1.5\,\text{A}$$

2. دراسة تأثيرات المصدر $E_2 = 48\,\text{V}$ فنقوم بحذف المصدر $E_1 = 54\,\text{V}$ واستبداله بدارة مغلقة، ومن ثم نعيد رسم الدارة، الشكل (7-9).



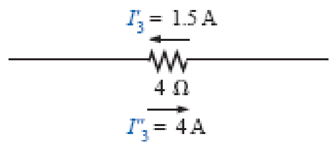
الشكل (7-9) – دارة تأثير E_2 على التيار I_3

وبحساب المقاومة الكلية

$R_T = R_3 + R_1 \parallel R_2 = 4\,\Omega + 24\,\Omega \parallel 12\,\Omega = 4\,\Omega + 8\,\Omega = 12\,\Omega$ ، نجد أن: $I_3'' = \dfrac{E_2}{R_T} = \dfrac{48\,V}{12\,\Omega} = 4\,A$.

وبالتالي، يكون التيار الكلي المار عبر المقاومة $R_3 = 4\,\Omega$ ، الشكل (8-9)، مساوياً:

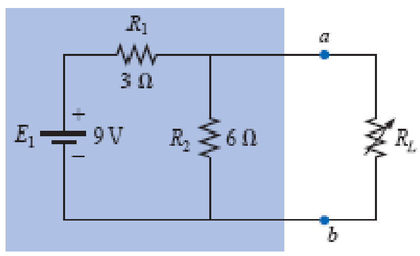
$$I_3 = I_3'' - I_3' = 4\,A - 2\,A = 2.5\,A$$



الشكل (8-9) – دارة التيار الكلي الناتج عبر المقاومة $R_3 = 4\,\Omega$

ونلاحظ أن اتجاه التيار الكلي I_3 متطابق مع اتجاه التيار I_3'' .

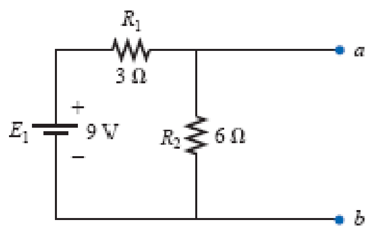
مثال 3-7: أوجد دارة ثفنن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل (11-9). ومن ثم أوجد التيار المار في المقاومة R_L عندما تكون قيمتها 2 أوم، 10 أوم و 100 أوم.



الشكل (11-9) – دارة المثال 9-3

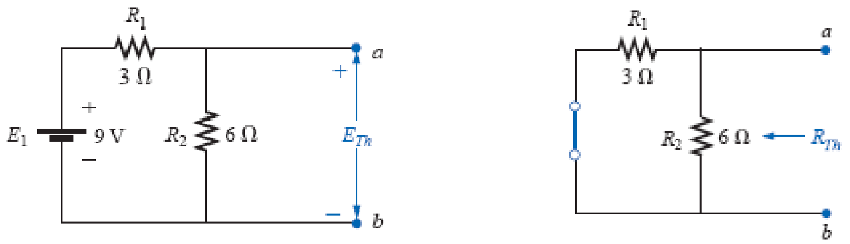
الحل:

خطوة 1 و 2 : حذف مؤقت للمقاومة المتغيرة R_L وتحديد مخارج الدارة a و b، الشكل (12-9):



الشكل (12-9) – تحديد مخارج الدارة

خطوة 3: لحساب المقاومة المكافئة R_{Th} ، نستبدل مصدر التغذية E_1 بدارة مكافئة مغلقة، الشكل (a-13-9)، فتكون مقاومة ثفنن المكافئة:



(b) (a)

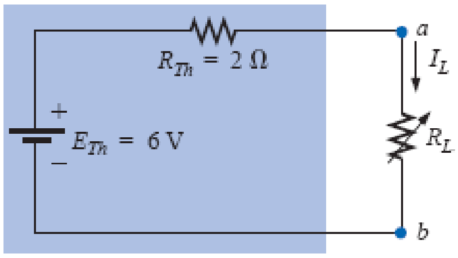
الشكل (9-13)- الدارات المكافئة لحساب R_{Th} و E_{Th}

$$R_{Th} = R_1 \| R_2 = \frac{(3\Omega)(6\Omega)}{3\Omega + 6\Omega} = 2\Omega$$

خطوة 4: من أجل حساب E_{Th} نعيد المصدر E_1 إلى وضعه الأصلي، الشكل (9-13-b). في هذه الحالة، تكون قيمة جهد الدارة المفتوحة E_{Th} بين الطرفين (المخرجين) a و b هي نفس قيمة هبوط الجهد على المقاومة $R_2 = 6\Omega$. و بتطبيق قانون قاسم الجهد، نجد:

$$E_{Th} = \frac{R_2 E_1}{R_2 + R_1} = \frac{(6\Omega)(9\,\text{V})}{6\Omega + 3\Omega} = \frac{54\,\text{V}}{9\Omega} = 6\ \text{V}$$

خطوة 5: نرسم دارة ثفنن المكافئة، مع إعادة المقاومة المحذوفة R_L ، كما هو مبين في الشكل (9-14).



الشكل (9-14) - دارة ثفنن المكافئة لدارة الشكل(9-11)

عندئذ، يكون:

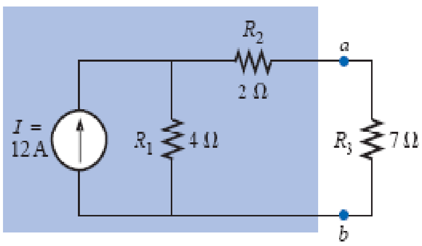
$$I_L = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

$$R_L = 2\Omega: \quad I_L = \frac{6\,\text{V}}{2\Omega + 2\Omega} = 1.5\,\text{A}$$

$$R_L = 10\ \Omega: \quad I_L = \frac{6\,\text{V}}{2\Omega + 10\Omega} = 0.5\,\text{A}$$

$$R_L = 100\Omega: \quad I_L = \frac{6\,\text{V}}{2\Omega + 100\Omega} = 0.06\,\text{A}$$

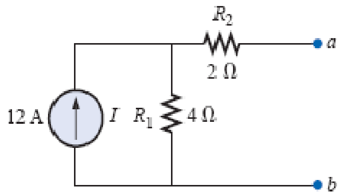
مثال 7-4: أوجد دارة ثفنن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل (9-15).



الشكل (9-15) – دارة المثال 9-4

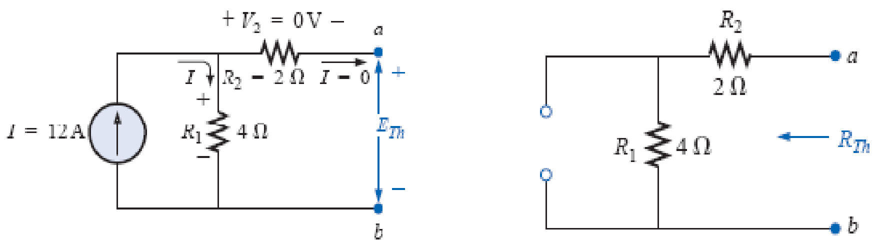
الحل:

خطوة 1 و 2 : حذف مؤقت للمقاومة المتغيرة R_3 وتحديد مخارج الدارة a وb، الشكل (9-16):



الشكل (9-16) – تحديد مخارج الدارة

خطوة 3: لحساب المقاومة المكافئة R_{Th}، نستبدل مصدر التغذية I بدارة مكافئة مفتوحة، الشكل (9-17-a).
بالنتيجة، تصبح المقاومتين R_1 و R_2 على التسلسل، وبالتالي تكون مقاومة ثفنن المكافئة بين المخرجين *a* و *b*:



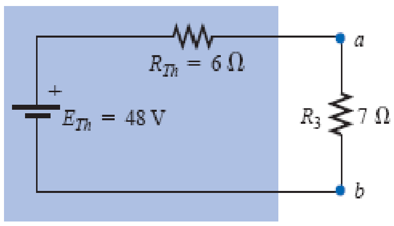
(b) (a)

الشكل (9-17)- الدارات المكافئة لحساب R_{Th} و E_{Th}

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 4\Omega + 2\Omega = 6\Omega$$

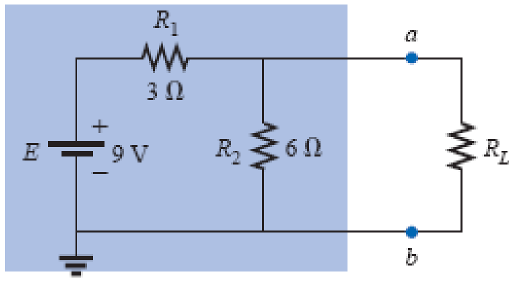
خطوة 4: من أجل حساب E_{Th} نعيد المصدر I إلى وضعه الأصلي، الشكل (9-17-b). في هذه الحالة، يكون التيار المار في الدارة المفتوحة بين الطرفين (المخرجين) *a* و *b*، وأيضاً عبر المقاومة $R_2 = 2\Omega$، مساوياً للصفر. وعندئذٍ، يكون الجهد الموزع على طرفي المقاومة R_2 مساوياً: $V_2 = I_2 R_2 = (0) R_2 = 0\ \text{V}$، وبالتالي:
$E_{Th} = V_1 = I_1 R_1 = I R_1 = (12\ \text{A})(4\Omega) = 48\text{V}$.

خطوة 5: نرسم دارة ثفنن المكافئة، مع إعادة المقاومة المحذوفة R_3، كما هو مبين في الشكل (9-18).



الشكل (9-18) - دارة ثفنن المكافئة لدارة الشكل (9-15)

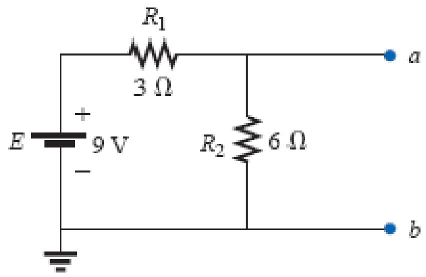
مثال 7-5: أوجد دارة نورتن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل (9-21).



الشكل (9-21) – دارة المثال 9-5

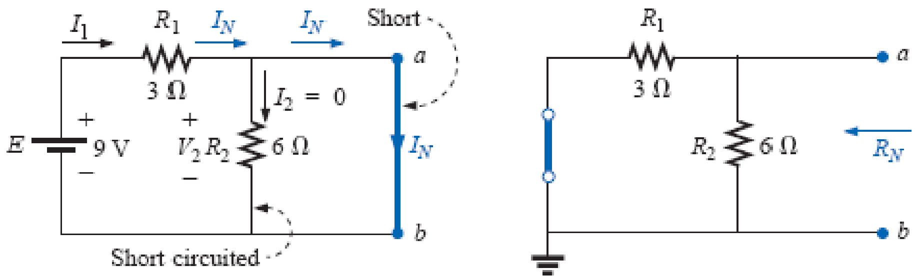
الحل:

خطوة 1 و 2: حذف مؤقت للمقاومة المتغيرة R_L وتحديد مخارج الدارة a وb، الشكل (9-22):



الشكل (9-22) – تحديد مخارج الدارة

خطوة 3: حساب المقاومة المكافئة R_N: نستبدل مصدر التغذية E بدارة مكافئة مغلقة، الشكل (9-23-a).



(b) (a)

الشكل (9-23)- الدارات المكافئة لحساب R_N و I_N

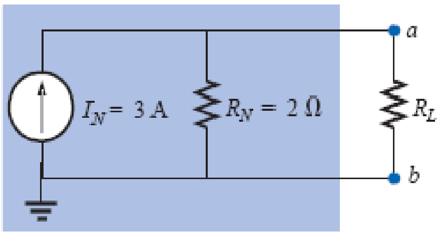
وبالتالي، تحسب المقاومة المكافئة على النحو التالي:

$$R_N = R_1 \,||\, R_2 = 3\Omega \,||\, 6\Omega = \frac{(3\Omega)(6\Omega)}{3\Omega + 6\Omega} = 2\Omega$$

خطوة 4: حساب مصدر التيار المكافئ I_N: نعيد جميع المصادر الى حالتها الأصلية، أي المصدر E، الشكل (9-23-b)، ثم نحسب قيمة تيار الدارة المغلقة I_N بين المخرجين a وb. فمن الشكل نرى بوضوح أن اتصال الدارة المغلقة بين الطرفين a وb على التوازي مع المقاومة R_2 ويزيل تأثيرها، مما يجعل التيار I_2 مساوياً للصفر. وعندئذ، يكون التيار I_N نفس التيار المار عبر المقاومة R_1، ويظهر الجهد الكامل عبر هذه المقاومة مساوياً $V_2 = I_2 R_2 = (0)6\Omega = 0\,\text{V}$. وبالتالي،

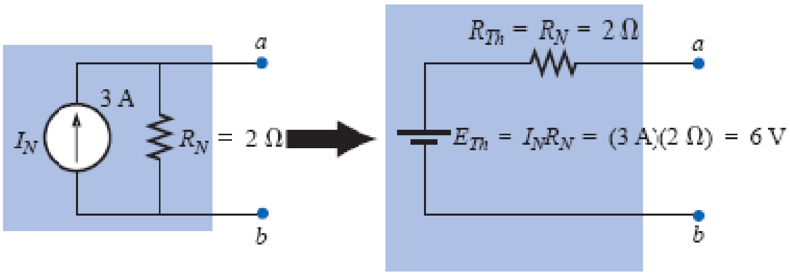
$$I_N = \frac{E}{R_1} = \frac{9\,\text{V}}{3\Omega} = 3\,\text{A}$$

خطوة 5: نرسم دارة نورتن المكافئة، والتي تحتوي على المقاومة المكافئة R_N مربوطة على التوازي مع المصدر I_N وكذلك الجزء الذي تم حذفه مؤقتاً في الخطوة الأولى، كما هو مبين في الشكل (9-24).



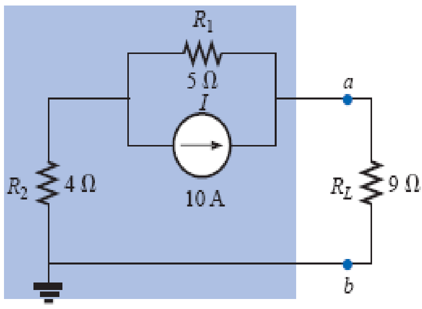
الشكل (9-24) - دارة نورتن المكافئة لدارة الشكل (9-21)

ومن هذه الدارة يمكن الحصول على دارة ثفنن المكافئة لدارة الشكل (9-21)، كما هو مبين في الشكل (9-25).



الشكل (9-24) – تحويل دارة نورتن المكافئة الى دارة ثفنن المكافئة

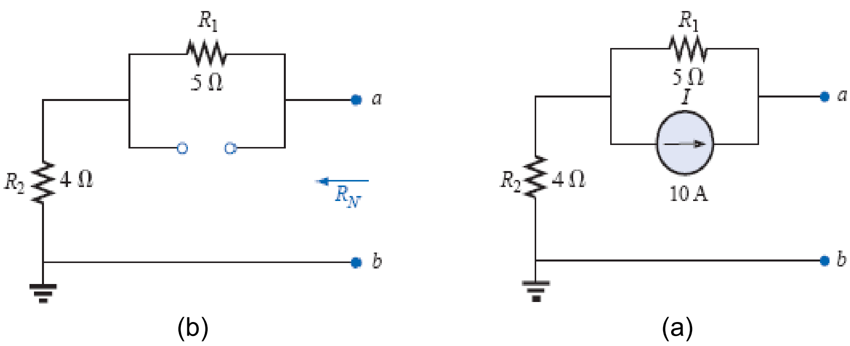
مثال 6-7: أوجد دارة نورتن المكافئة للدارة في القسم المظلل من الشكل (9-25).



الشكل (9-25) – دارة المثال 9-6

الحل:

خطوة 1 و 2: حذف مؤقت للمقاومة المتغيرة R_L وتحديد مخارج الدارة a و b، الشكل (9-26-a):

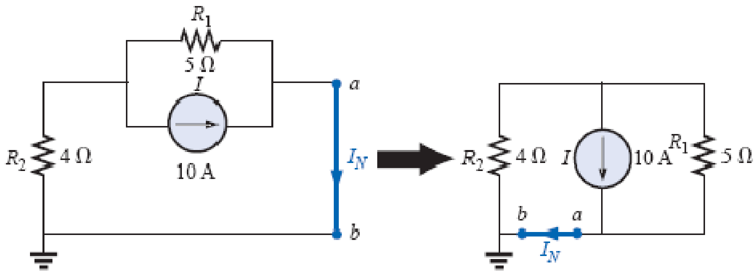


الشكل (9-26): (a) – تحديد مخارج الدارة، (b) - حساب R_N

خطوة 3: حساب المقاومة المكافئة R_N: نستبدل مصدر التغذية I بدارة مكافئة مفتوحة، الشكل (9-26-b)، فنحصل على المقاومة المكافئة:

$$R_N = R_1 + R_2 = 5\Omega + 4\Omega = 9\Omega$$

خطوة 4: حساب مصدر التيار المكافئ I_N: نعيد جميع المصادر الى حالتها الأصلية، أي المصدر I، الشكل (9-27)، ثم نحسب قيمة تيار الدارة المغلقة I_N بين المخرجين a وb.

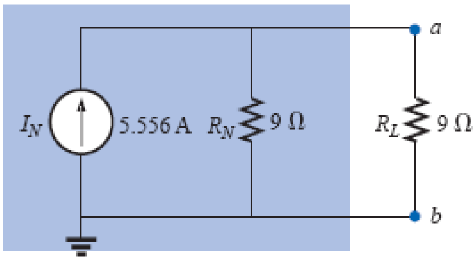


الشكل (9-27) – حساب التيار I_N

من الشكل نرى أن التيار I_N هو نفس التيار المار من المقاومة $R_2 = 4\Omega$. باستخدام قانون قاسم التيار، نجد:

$$I_N = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(5\Omega)(10\,\text{A})}{5\Omega + 4\Omega} = 5.556\,\text{A}$$

خطوة 5: نرسم دارة نورتن المكافئة، والتي تحتوي على المقاومة المكافئة R_N مربوطة على التوازي مع المصدر I_N وكذلك الجزء الذي تم حذفه مؤقتاً في الخطوة الأولى، كما هو مبين في الشكل (9-28).



الشكل (9-28) - دارة نورتن المكافئة لدارة الشكل (9-25)

عناصر تخزين الطاقة

(Energy Storage Element)

المكثفات (Capacitors)

المكثفة هي عنصرغير فعال (passive) من عناصر الدارة الكهربائية مصمم لتخزين الطاقة (الشحنة) من خلال حقله الكهربائي.

يتكون عنصر المكثفة من صفيحتين متوازيتين تسميان الموصلين (او لبوس المكثفة)، تفصلهما عن بعض مادة عازلة (Insulator).

تتناسب شحنة المكثفة q طرداً مع جهد المكثفة v وفق العلاقة التالية: $q = Cv$، حيث C سعة المكثفة.

تحسب السعة C بالعلاقة $C = \frac{\varepsilon A}{d}$، حيث: A - مساحة المقطع من كل صفيحة. d - المسافة بين الصفيحتين. ε - ثابت السماحية (Permittivity)

السعة (Capacitance)

تعرّف السعة (C) بأنها النسبة بين الشحنة (q) الموجودة على إحدى صفيحتي المكثفة إلى فرق الجهد (v) المطبق بين طرفي المكثفة وتقاس بالفاراد (Farad = F)، ويعبر عن ذلك بالعلاقة التالية:

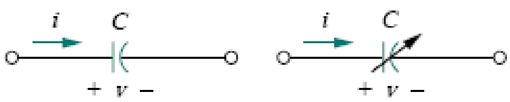
$$C = \frac{q}{v} \quad [\text{farads, F}]$$

حيث أن الشحنة q تقاس بالكولوم، و الجهد v بالفولت.

أنواع المكثفات (Types of capacitors)

المكثفات الثابتة (Fixed Capacitors)

المكثفات المتغيرة (Variable capacitors)



يعطى التيار المار عبر المكثفة بالعلاقة:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

علاقة الجهد بالتيار:

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v(t_0)$$

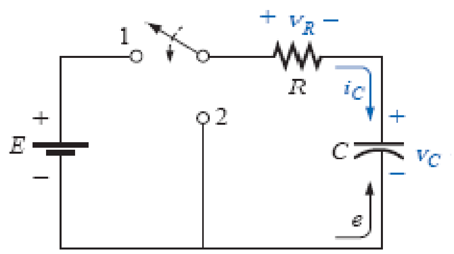
حيث أن $v(t_0) = q(t_0)/C$ - الجهد عبر المكثفة عند اللحظة t_0.

الاستطاعة اللحظية (instantaneous power) المنقولة إلى المكثفة:

$$p = v\,i = C\,v\,\frac{dv}{dt}$$

طور شحن المكثفة (Charging Phase)

طور شحن المكثفة وفق المراحل التالية:



الشكل– دارة شحن المكثفة

- عندما يغلق المفتاح (وضعية 1) تجري الالكترونات من الصفيحة العلوية للمكثفة إلى الصفيحة السفلية لتنتج عنها شحنة موجبة للصفيحة العلوية وأخرى سالبة للصفيحة السفلية.
- عندما يصبح جهد المكثفة مساوياً لجهد المصدر تتوقف حركة الالكترونات وتصبح قيمة الشحنة عند صفيحتي المكثفة مساوية $Q = CV_C = CE$.

الطاقة المخزنة في المكثفة (Energy stored by a capacitor)

تختزن المكثفة الطاقة الكهربائية على شكل حقل كهربائي بين صفيحتيها.

تحسب الطاقة المقدمة لمكثفة سعتها C خلال فترة زنية صغيرة dt بالعلاقة

$$dw = p\,dt = v\,i\,dt = v \times C\frac{dv}{dt}dt = C\,v\,dv$$

بعد فترة زمنية t يصبح جهد المكثفة مساوياً V، فتصبح الطاقة الكلية المخزنة في المكثفة

$$\boxed{w = \int_0^V C\,v\,dv = \frac{1}{2}C\,v^2}$$

خصائص المكثفة

1. من معادلة حساب تيار المكثفة نلاحظ أنه عندما يكون الجهد عبر المكثفة غير متغير مع الزمن، أي جهد مستمر (dc voltage)، فإن التيار المار من المكثفة يكون مساوياً للصفر. وبالتالي نقول أن:
   a. تلعب المكثفة دور الدارة المفتوحة بالنسبة للتيار المستمر (dc).
   b. تشحن المكثفة إذا كان الجهد المستمر متصل من خلالها
2. الجهد على المكثفة يجب أن يكون مستمراً.
3. المكثفة المثالية لاتنشر الطاقة لأنها تأخذ القدرة (الاستطاعة) من الدارة عند تخزين الطاقة في حقلها وتعيدها للدارة عند تقديم القدرة.

مثال 8-1:

a. احسب الشحنة المختزنة في مكثفة من $3\,\text{pF}$ إذا كان الجهد من خلالها $20\,\text{V}$

b. احسب الطاقة المختزنة في المكثفة

الحل:

a. $q = C\,v = 3\times10^{-12}\times 20 = 60\ \text{pF}$

.b $w = \frac{1}{2}C v^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-12} \times 400 = 600 \text{ pJ}$

مثال 8-2: احسب التيار المار عبر مكثفة من $5\,\mu\text{F}$ إذا كان الجهد من خلالها $v(t) = 10\cos 6000t \text{ V}$.

الحل:

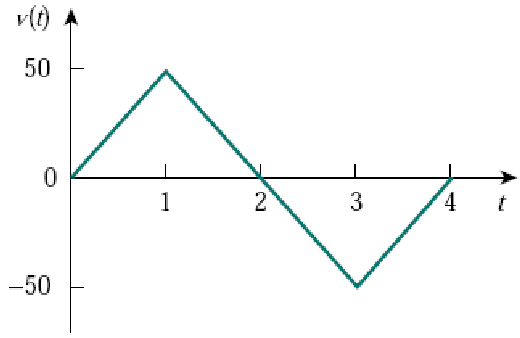
$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = 5 \times 10^{-6}\frac{d}{dt}\left(10\cos 6000t\right) = -5 \times 10^{-6} \times 6000 \times 10\sin 6000t$$
$$= -0.3\sin 6000t \text{ A}$$

مثال 8-3: احسب الجهد من خلال مكثفة من $2\,\mu\text{F}$ إذا كان التيار المار عبرها $i(t) = 6e^{-3000t} \text{ mA}$، على افتراض أن الجهد الأولي للمكثفة يساوي الصفر.

الحل:

$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v(0), \qquad v(0) = 0 \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{2 \times 10^{-6}}\int_0^t 6e^{-3000t}dt \cdot 10^{-3}$$
$$= \frac{3 \times 10^3}{-3000}e^{-3000t}\Big|_0^t = \left(1 - e^{-3000t}\right) \text{ V}$$

مثال 8-4: احسب التيار المار عبر مكثفة من $200\,\mu\text{F}$ إذا كان جهدها كما هو مبين في الشكل



الحل:

يمكن وصف الموجة المبينة في الشكل رياضياً كما يلي:

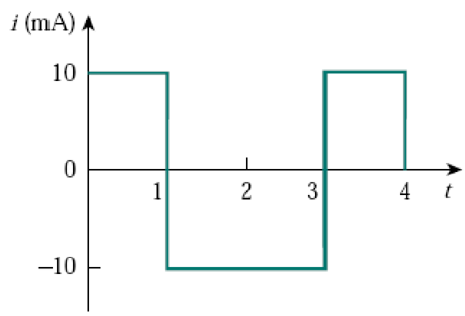
$$v(t) = \begin{cases} 50t \text{ V} & 0 < t < 1 \\ 100 - 50t \text{ V} & 1 < t < 3 \\ -200 + 50t \text{ V} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

باعتبار أن $i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$، و $C = 200\,\mu\text{F}$ نأخذ مشتق الجهد لحساب التيار:

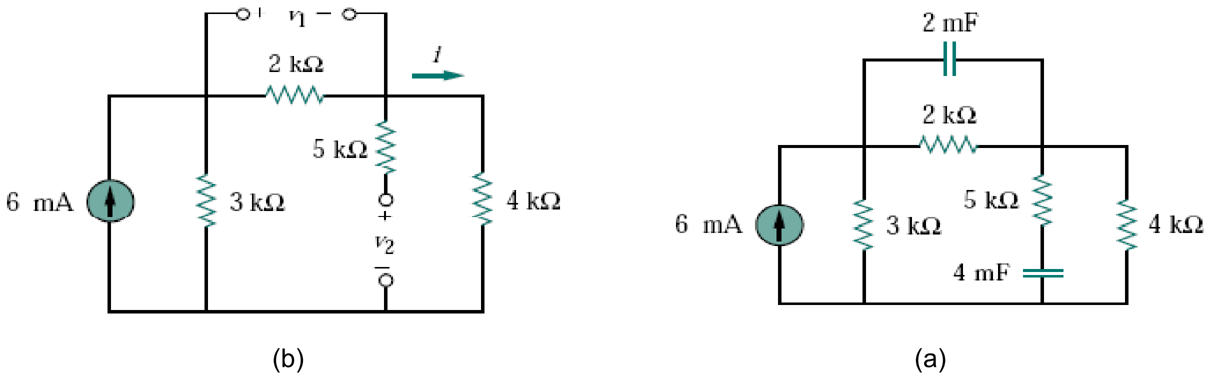
$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} 50 & 0 < t < 1 \\ -50 & 1 < t < 3 \\ 50 & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 10 \text{ mA} & 0 < t < 1 \\ -10 \text{ mA} & 1 < t < 3 \\ 10 \text{ mA} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الشكل يبين موجة التيار الناتج



مثال 8-5: احسب الطاقة المختزنة في كل مكثفة من الدارة المبينة في الشكل وفقاً لشروط التيار المستمر.



الشكل () – دارة المثال 8-5

الحل:

استناداً لشروط التيار المستمر نستبدل كل مكثفة بدارة مفتوحة كما هو مبين في الشكل.

باستخدام قانون قاسم التيار CDR ، التيار عبر التركيبة التسلسلية من المقاومات $2\,\text{k}\Omega$ و $4\,\text{k}\Omega$ يكون

$$i = \frac{3}{3+2+4} \times 6\,\text{mA} = 2\,\text{mA}$$

وبالتالي، الجهود v_1 و v_2 تكون

$$v_1 = 2000\,i = 4\ \text{V}, \quad v_2 = 4000\,i = 8\ \text{V}$$

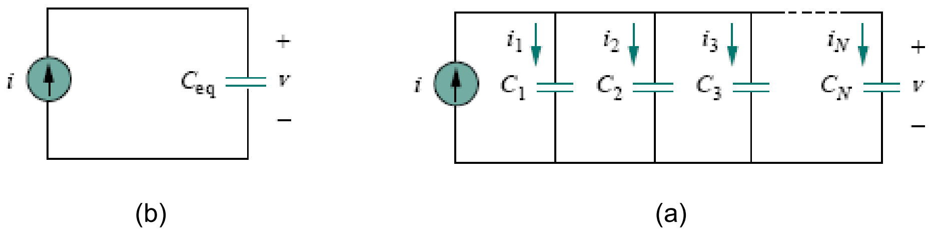
الطاقة المختزنة في كل مكثفة من الدارة:

$$w_1 = \frac{1}{2} C_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\left(2 \times 10^{-3}\right) 4^2 = 16\ \text{mJ}, \quad w_2 = \frac{1}{2} C_1 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(4 \times 10^{-3}\right) 8^2 = 128\ \text{mJ}$$

توصيل المكثفات على التفرع و التسلسل (series & parallel capacitors)

التفرع:

يتم توصيل المكثفات على التفرع كما هو مبين في الشكل.



الشكل () – توصيل المكثفات على التفرع

نلاحظ بأن الجهد هو نفسه عند كل المكثفات، أي $v(C_1) = v(C_2) = \ldots = v(C_N)$. بتطبيق قانون KCL على دارة الشكل (a)، نجد أن

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_N$$

لكن

$$i_k = \frac{dv}{dt}, \therefore k = 1, 2, \ldots, N$$

وبالتالي

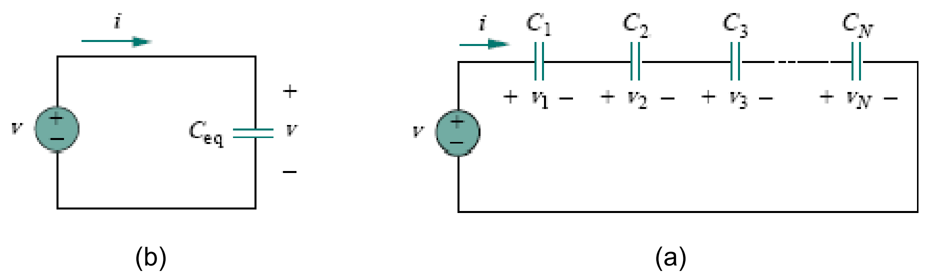
$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \ldots + C_N \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

حيث أن

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N}$$

التسلسل:

نقوم الآن بإيجاد السعة الكلية لعدد N من المكثفات التي تم ربطها على التسلسل كما هو مبين في الشكل.



الشكل () – توصيل المكثفات على التفرع

نلاحظ بأن التيار هو نفسه عبر كل المكثفات، أي $i(C_1) = i(C_2) = \ldots = i(C_N) = i$

بتطبيق قانون KVL على دارة الشكل (a)، نجد أن

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_N$$

لكن

$$v_k = \frac{1}{C_k}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_k(t_0)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + v_2(t_0) + \ldots + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + v_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \ldots + v_N(t_0) \\ &= \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + v(t_0) \end{aligned}$$

حيث

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}}$$

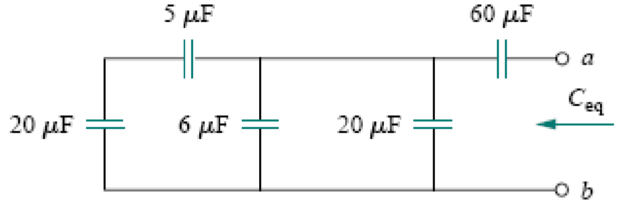
و عند اللحظة t_0

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \ldots + v_N(t_0)$$

حالة خاصة: عندما $N = 2$:

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

مثال 6-8: أوجد السعة الكلية المرئية بين الطرفين a و b من الدارة المبينة في الشكل



الشكل () – دارة المثال 6-8

الحل:

المكثفتان $5\,\mu\text{F}$ و $20\,\mu\text{F}$ مربوطتان على التسلسل، السعة المكافئة تكون

$$C_{1eq} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\,\mu\text{F}$$

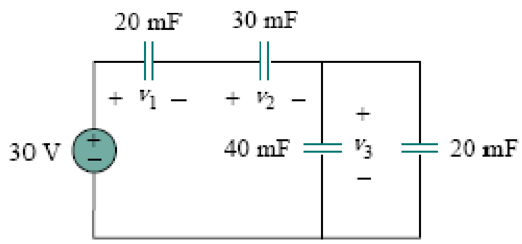
المكثفات $C_{1eq} = 4\,\mu\text{F}$ و $6\,\mu\text{F}$ و $20\,\mu\text{F}$ مربوطة على التفرع، السعة المكافئة تكون

$$C_{2eq} = 4\,\mu\text{F} + 6\,\mu\text{F} + 20\,\mu\text{F} = 30\,\mu\text{F}$$

المكثفات $C_{2eq} = 30\,\mu\text{F}$ و $60\,\mu\text{F}$ مربوطتان على التسلسل، السعة المكافئة تكون

$$C_{eq} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20\,\mu\text{F}$$

مثال 8-7: أوجد الجهد عبر كل مكثفة في الدارة المبينة في الشكل



الشكل () – دارة المثال 8-7

الحل:

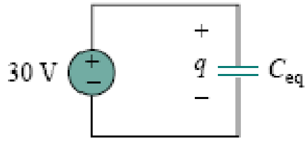
نقوم أولاً بإيجاد السعة المكافئة الكلية. المكثفتان المربوطتان على التوازي $20\,\text{mF}$ و $40\,\text{mF}$ يعطيان مكثفة مكافئة من $40 + 20 = 60\,\text{mF}$، فتكون هذه السعة المكافئة على التسلسل مع المكثفات المتبقية في الدارة. وبالتلي، السعة الكلية المكافئة تكون:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}}\,\text{mF} = 10\,\text{mF}$$

الشحنة الكلية في الدارة تساوي

$$q = C_{eq} v = 10 \times 10^3 \times 30 = 0.3 \text{ C}$$

نرسم الدارة من جديد وفق المعطيات الحاصلة، الشكل ()



الشكل () - الدارة المكافئة

الشحنة الناتجة هي الشحنة على المكثفتين $20\,\text{mF}$ و $30\,\text{mF}$ لأنهما مرتبطتين على التسلسل مع منبع الجهد. بالتالي،

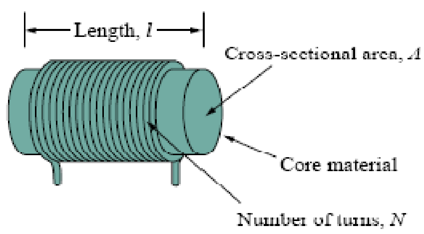
باعتبار أن المكثفتين $20\,\text{mF}$ و $40\,\text{mF}$ على التوازي، فإن الجهد هو نفسه عند كلٍ منهما، أي v_3 و محصلتهما تساوي $40+20=60\,\text{mF}$. هذه السعة المكافئة على التسلسل مع المكثفتين $20\,\text{mF}$ و $30\,\text{mF}$ ، بالنتيجة يكون لها نفس الشحنة. بالتالي

$$v_3 = \frac{q}{60\,\text{mF}} = \frac{0.3}{60 \times 10^{-3}} = 5\,\text{V}$$

الوشائع (inductors)

الوشيعة – عنصرغير فعال (passive) من عناصر الدارة الكهربائية مصمم لتخزين الطاقة (الشحنة) من خلال حقله المغناطيسي.

تتكون الوشيعة أو الملف (coil) من سلك ناقل ملفوف بشكل أسطواني حول قلب معدني وله N لفة، كما في الشكل ()



الشكل () – النوذج الاعتيادي للوشيعة

عند مرور تيار في الملف يتولد مجال مغناطيسي (magnetic field) والذي بدوره يؤدي إلى تدفق مغناطيسي (magnetic flux) مقاساً بالويبر (Wb) ويرمز له Φ.

إن نسبة هذا التدفق الذاتي إلى التيار المار في الملف تكون ثابتة، وهي تتعلق بالملف (عدد اللفات، طول الملف، ......) وتسمى هذه النسبة بالتحريضية أو المحاثة (conductance) ويرمز لها L وتقاس بالهنري (H):

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

يتناسب الجهد عبر الوشيعة طرداً مع تغير التيار بالنسبة للزمن، وفق العلاقة التالية: $v = L\frac{di}{dt}$

ترتبط التحريضية L بالأبعاد الفيزيائية للملف وفق العلاقة التالية: $L = \frac{N^2 \mu A}{l}$

حيث: N - عدد اللفات (number of turns)؛ l - طول الملف (length)؛ A -مساحة المقطع العرضي (cross-sectional area) للقلب (core material)؛ μ -الناقلية المغناطيسية (permeability) للقلب.

يمكن التعبير عن العلاقة بين التيار والجهد كالتالي $di = \frac{1}{L} v\, dt$

وبالتالي، وبتكامل العلاقة، نجد $i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)\,dt$ أو $\boxed{i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)}$

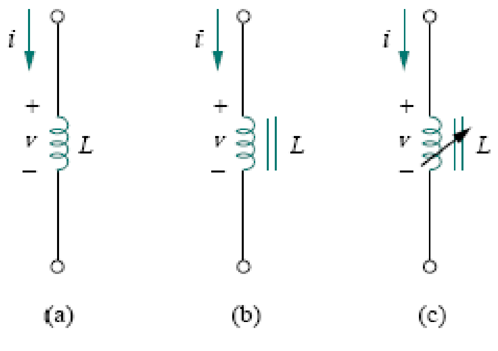
حيث أن $i(t_0)$ هو التيار الكلي من أجل $-\infty < t < t_0$ و $i(-\infty) = 0$

هناك ثلاثة أنواع للتمثيل الرسمي للوشيعة، كما في الشكل ()

a. وشيعة ذات قلب (نواة) هوائية

b. وشيعة ذات قلب معدني- حديد

c. وشيعة ذات قلب من حديد متغير



الشكل () – تمثيل رسمي للوشيعة

تخزين الطاقة في الوشيعة (Energy stored by a inductor)

الاستطاعة المنقولة إلى الوشيعة

$$p = vi = \left(L\frac{di}{dt} \right) i$$

وبالتالي، الطاقة المخزنة

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt = \int_{-\infty}^{t} \left(L\frac{di}{dt} \right) i\,dt = L\int_{-\infty}^{t} i\,di = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(-\infty)$$

وباعتبار أن $i(-\infty) = 0$ ، فإن

$$\boxed{w = \frac{1}{2}Li^2}$$

خصائص الوشيعة:

- عندما يكون التيار ثابتاً (dc) يكون الجهد مساوياً الصفر، أي أن الوشيعة تلعب دور الدارة المقصورة.
- تعارض الوشيعة تغير التيار المار من خلالها.
- الوشيعة المثالية لاتنشر الطاقة.

مثال 8-8: أوجد الجهد عبر وشيعة من $0.1\ \text{H}$ وكذلك الطاقة المخزنة فيها إذا كان التيار المار فيها $i(t) = 10te^{-5t}\ \text{A}$.

الحل:

$$v = L\frac{di}{dt} = 0.1\frac{d}{dt}\left(10te^{-5t}\right) = e^{-5t} + t(-5)e^{-5t} = e^{-5t}(1-5t)\ \text{V}$$

$$w = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(0.1)100t^2e^{-10t} = 5t^2e^{-10t}\ \text{J}$$

مثال 8-9: أوجد التيار المار في وشيعة من $0.1\ \text{H}$ إذا كان الجهد خلالها معطى كالتالي:

$$v(t) = \begin{cases} 30t^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

وكذلك، احسب الطاقة المخزنة خلال الزمن $0 < t < 5\ \text{s}$.

الحل:

باعتبار أن $i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)$ و $L = 5$ H، يكون

$$i = \frac{1}{5}\int_0^t 30t^2\,dt + 0 = 6 \times \frac{t^3}{3} = 2t^3 \text{ A}$$

الاستطاعة: $p = vi = 60t^5$

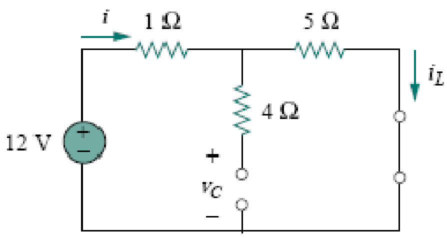
الطاقة المخزنة: $w = \int p\,dt = \int_0^5 60t^5\,dt = 60\frac{t^6}{6}\Big|_0^5 = 156.25$ kJ أو

$$w\Big|_0^5 = \frac{1}{2}Li^2(5) - \frac{1}{2}Li(0) = \frac{1}{2}(5)(2 \times 5^3)^2 - 0 = 156.25 \text{ kJ}$$

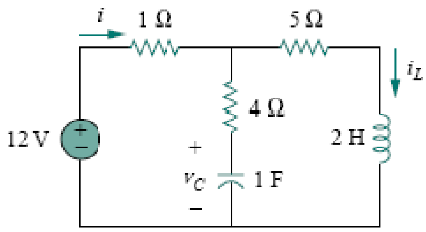
مثال 10-8: لتكن الدارة المبينة في الشكل (a). مستخدماً شروط التيار المستمر ،أوجد:

a. التيار i، الجهد عند المكثفة v_C وتيار الوشيعة i_L

b. الطاقة المخزنة في كلاً من المكثفة والوشيعة.



(b)



(a)

الشكل () – درة المثال 8-10

الحل:

a. وفق شروط التيار المستمر، نستبدل المكثفة بدارة مفتوحة والوشيعة بدارة مقصورة، الشكل (b). ومن الواضح من الشكل (b):

$$i = i_L = \frac{12}{1+5} = 2 \text{ A}$$

الجهد v_C هو نفسه الجهد عند طرفي المقاومة 5Ω لأنهما على التفرع. بالتالي $v_C = 5i = 10$ V

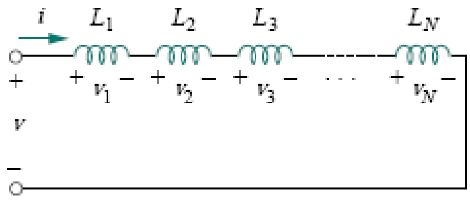
b. الطاقة المخزنة في المكثفة: $w_C = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}(1)(10^2) = 50$ J

الطاقة المخزنة في المكثفة: $w_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}(2)(2^2) = 4$ J

توصيل الوشائع على التفرع و التسلسل (series & parallel inductors)

التسلسل:

لندرس مجموعة من الوشائع المربوطة على التسلسل، الشكل ()، والمكونة من N وشيعة. نلاحظ من التوصيل أن للوشائع نفس التيار i.



الشكل () -

بتطبيق قانون KVL على الحلقة المبينة، نحصل

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_N$$

لكن $v_k = L_k \, di/dt \,, \therefore\, k = 1,2,\ldots,N$ ، بالتعويض

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \ldots + L_N \frac{di}{dt}$$

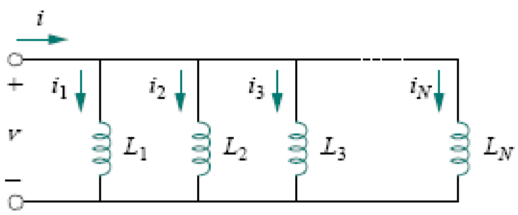
$$v = \left(L_1 + L_2 + \ldots + L_N\right)\frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} L_k\right)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

حيث أن

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N}$$

التفرع:

لندرس مجموعة من الوشائع المربوطة على التفرع، الشكل ()، والمكونة من N وشيعة. نلاحظ من التوصيل أن للوشائع نفس الجهد v.



الشكل ()

بتطبيق قانون KCL على الدارة المبينة، نحصل

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_N$$

لكن

$$i_k = \frac{1}{L_k}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i_k(t_0)$$

بالتالي:

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i_1(t_0) + i_k = \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i_2(t_0) + \ldots + i_k = \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i_N(t_0)$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \ldots + i_N(t_0)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{L_k}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + \sum_{k=1}^{N} i_k(t_0) = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i(t_0)$$

حيث أن

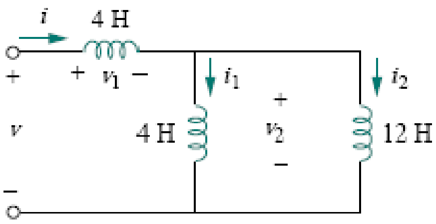
$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \ldots + i_N(t_0)$$

حالة خاصة: عندما $N = 2$:

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}$$

مثال 8-11: لتكن الدارة المبينة في الشكل (). احسب $i_1(0)$، $v(t)$، $v_1(t)$ ، $v_2(t)$، $i_1(t)$ و $i_2(t)$ إذا كان $i(t)=4(2-e^{-10t})\ \text{mA}$ و $i_2(0)=-1\ \text{mA}$.



الحل:

من $i(t)=4(2-e^{-10t})\ \text{mA}$ نجد أن $i(0)=4(2-1)=4\ \text{mA}$. طالما $i(0)=i_1(0)+i_2(0)$، فإن $i_1(0)=i(0)-i_2(0)=4-(-1)=5\ \text{mA}$

التحريضية المكافئة تكون:

$$L_{\text{eq}}=2+4\parallel 12=2+3=5\ \text{H}$$

وبذلك:

$$v(t)=L_{\text{eq}}\frac{di}{dt}=5(4)(-1)(-10)e^{-10t}\ \text{mV}=200e^{-10t}\ \text{mV}$$

$$v_1(t)=2\frac{di}{dt}=2(-4)(-10)e^{-10t}\ \text{mV}=80e^{-10t}\ \text{mV}$$

بما أن $v=v_1+v_2$ ، فإن $v_2(t)=v(t)-v_1(t)=120e^{-10t}\ \text{mV}$

التيار $i_1(t)$ يمكن حسابه كالتالي:

$$i_1(t)=\frac{1}{4}\int_0^t v_2\,dt+i_1(0)=\frac{120}{4}\int_0^t e^{-10t}\,dt+5\ \text{mA}$$
$$=-3e^{-10t}\Big|_0^t+5\ \text{mA}=-3e^{-10t}+3+5=8-3e^{-10t}\ \text{mA}$$

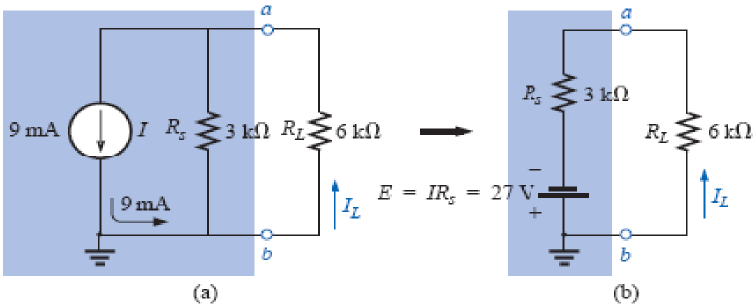
بشكل متشابه:

$$i_2(t)=\frac{1}{12}\int_0^t v_2\,dt+i_2(0)=\frac{120}{12}\int_0^t e^{-10t}\,dt-1\ \text{mA}$$
$$=-e^{-10t}\Big|_0^t-1\ \text{mA}=-e^{-10t}+1-1=-e^{-10t}\ \text{mA}$$

لاحظ أن $i_1(t)+i_2(t)=i(t)$.

أمثلة وصفية إضافية

مثال1: لتكن الدارة المبينة في الشكل (a). حول مصدر التيار إلى مصدر للجهد واحسب تيار الحمل I_L لكل مصدر.



الشكل (8-39) – دارة المثال 8-15

الحل:

من الشكل، نجد أن:

$E = IR_s = (9\,\text{mA})(3\,\text{k}\Omega) = 27\,\text{V}$ ، و بالتالي تكون الدارة المكافئة، المبينة في الشكل(b) ومنه:

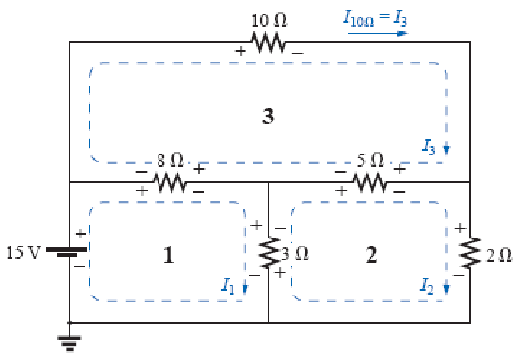
من الشكل (a):

$$I_L = \frac{R_s I}{R_s + R_L} = \frac{(3\,\text{k}\Omega)(9\,\text{mA})}{3\,\text{k}\Omega + 6\,\text{k}\Omega} = \frac{27\,\text{V}}{9\,\text{k}\Omega} = 3\,\text{mA}$$

الشكل (b):

$$I_L = \frac{E}{R_s + R_L} = \frac{27\,\text{V}}{3\,\text{k}\Omega + 6\,\text{k}\Omega} = \frac{27\,\text{V}}{9\,\text{k}\Omega} = 3\,\text{mA}$$

مثال2: أوجد التيار المار عبر المقاومة $10\,\Omega$ في الشبكة المبينة في الشكل باستخدام طريقة التحليل الحلقي.



الشكل (8-41) – دارة المثال 8-17

الحل:

خطوة 1 و 2 منفذة كمل هو واضح في الشكل، أي تم تحديد التيارات في كل حلقة مغلقة وكذلك تم تحديد قطبية المقاومات.

خطوة 3: نطبق قانون كرشوف للجهد في كل حلقة مغلقة فنجد:

$$\text{Loop}\,1,\ I_1 : \quad (8\,\Omega)(I_1 - I_3) + (3\,\Omega)(I_1 - I_2) = 15\,\text{V}$$

$$\text{Loop}\,2,\ I_2 : (3\,\Omega)(I_2 - I_1) + (5\,\Omega)(I_2 - I_3) + 2\Omega I_2 = 0$$

$$\text{Loop}\,3,\ I_3 : (8\,\Omega)(I_3 - I_1) + (10\,\Omega)I_3 + (5\,\Omega)(I_3 - I_2) = 0$$

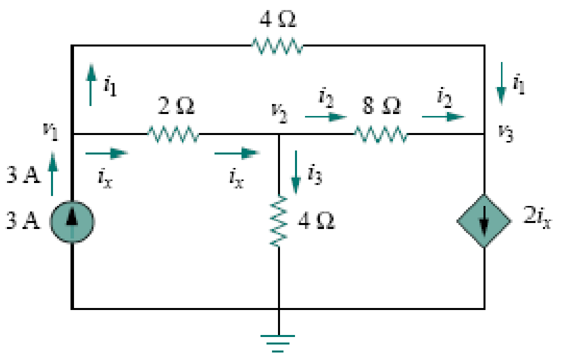
وبعد التبسيط، نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} 11I_1 - 8I_3 - 3I_2 &= 15 \\ 10I_2 - 3I_1 - 5I_3 &= 0 \\ 23I_3 - 8I_1 - 5I_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 11I_1 - 3I_2 - 8I_3 &= 15 \\ -3I_1 + 10I_2 - 5I_3 &= 0 \\ -8I_1 - 5I_2 + 23I_3 &= 0 \end{aligned}$$

ومنه، نجد:

$$I_3 = I_{10\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3 & 15 \\ -3 & 10 & 0 \\ -8 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 & -8 \\ -3 & 10 & -5 \\ -8 & -5 & 23 \end{vmatrix}} = 1.220\,\text{A}$$

مثال3: أوجد الجهد في كل عقدة من الدارة المبينة في الشكل.



الحل:

في العقدة 1:

$$3 = i_1 + i_x \quad \Longrightarrow \quad 3 = \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2}$$

أو

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 12 \qquad (1)$$

في العقدة 2:

$$i_x = i_2 + i_3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_2 - v_3}{8} + \frac{v_2 - 0}{4}$$

أو

$$-4v_1 + 7v_2 - v_3 = 0 \qquad (2)$$

في العقدة 3:

$$i_1 + i_2 = 2i_x \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_3}{8} = \frac{2(v_1 - v_2)}{2}$$

أو

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \qquad (3)$$

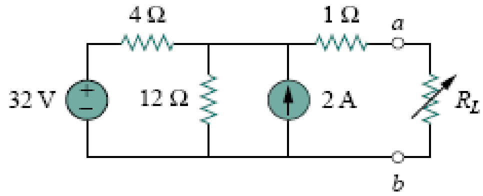
بحل المعادلات (1) و (2) و(3) نجد:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

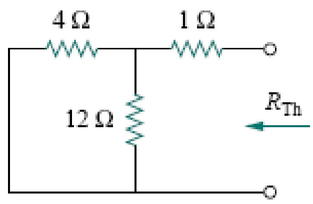
$$v_1 = 4.8\,\text{V}, \qquad v_2 = 2.4\,\text{V}, \qquad v_3 = -2.4\,\text{V}$$

مثال4: أوجد دارة ثفنن المكافئة للدارة المبينة في الشكل ، ثم أوجد تيار الحمل i_L المار في المقاومة R_L من أجل $R_L = 32\ \Omega$.



الحل:

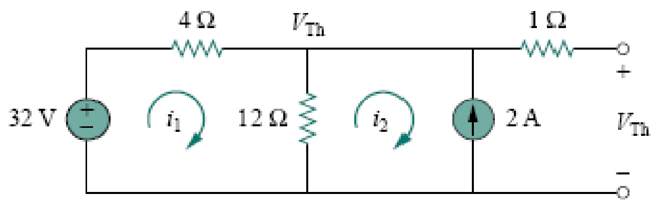
حساب المقاومة R_{Th} : نضع كل المنابع مساوية للصفر، أي يستبدل كلاً منبع الجهد بدارة مقصورة ومنبع التيار بدارة مفتوحة، وتصبح الدارة كالتالي



ومنه:

$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4\ \Omega$$

حساب الجهد V_{Th} : نعيد المنابع إلى وضعها، كما في الشكل



نطبق التحليل الحلقي:

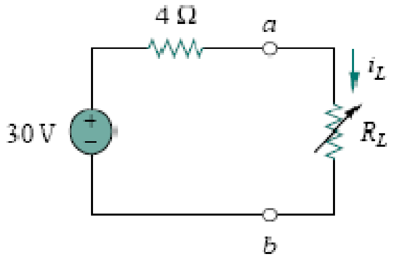
الحلقة1: $32\ V = 4i_1 + 12(i_1 - i_2)$ أو $-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0$

الحلقة2: $i_2 = -2\ A$

بالتعويض نجد أن: $i_1 = 0.5\ A$

وبالتالي: $V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12(0.5 + 2.0) = 30\ V$

تكون الدارة المكافئة



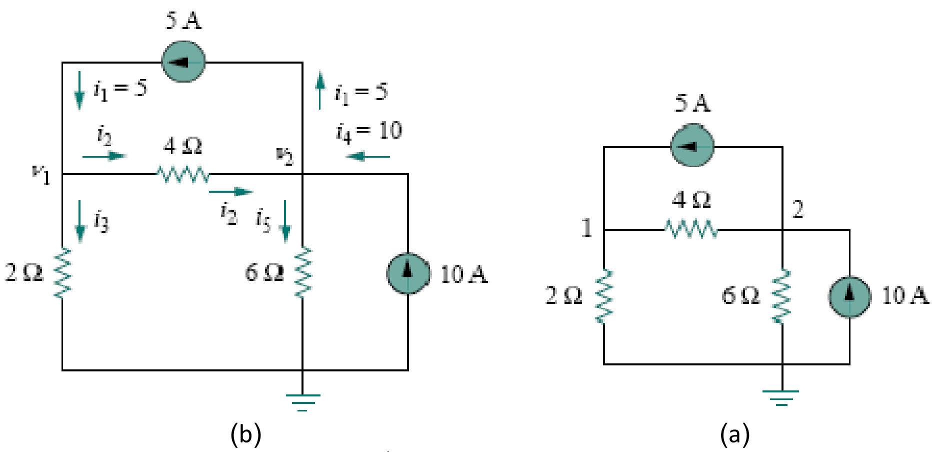
ومنه:

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$

من أجل $R_L = 32\ \Omega$:

$$I_L = \frac{30}{40} = 0.75\ \text{A}$$

مسألة 5 : احسب الجهد في كل عقدة من الدارة المبينة في الشكل (a-1). (باستخدام التحليل العقدي)



الشكل (1) – دارة المسألة 1

الحل:

نحدد اتجاهات ةالتيارات في الدارة كما هو مبين في الشكل (b-1)

نطبق قانون KCL عند العقدة 1:

$$i_1 = i_2 + i_3 \;\;\Rightarrow\;\; 5\text{ A} = \left(\frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_1 - 0}{2}\right)\text{A}$$

أو $\qquad 3v_1 - v_2 = 20 \qquad$ (1)

نطبق قانون KCL عند العقدة 2:

$$i_2 + i_4 = i_1 + i_5 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{v_1 - v_2}{4} + 10 = 5 + \frac{v_2 - 0}{6}$$

$-3v_1 + 5v_2 = 60 \qquad$ (2)

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = 15 - 3 = 12$$

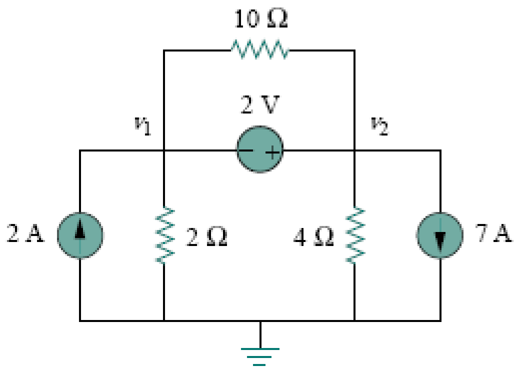
$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 60 & 5 \end{vmatrix}}{12} = \frac{100 + 60}{12} = 13.33\text{ V}$$

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -3 & 60 \end{vmatrix}}{12} = \frac{180 + 60}{12} = 20\text{ V}$$

إذا كانت هناك حاجة لحساب التيارات، بالتعويض نجد التالي:

$$i_1 = 5\text{ A},\; i_2 = \frac{v_1 - v_2}{4} = -1.6667\text{ A},\; i_3 = \frac{v_1}{2} = 6.666\text{ A},\; i_4 = 10\text{ A},\; i_5 = \frac{v_2}{6}\text{ A}$$

مسألة 6 : احسب الجهد في كل عقدة من الدارة المبينة في الشكل (a-2). (باستخدام التحليل العقدي ومفهوم العقدة الفائقة)



الشكل (a-2)

الحل:

وجود منبع الجهد بين العقدتين v_1 و v_2 وحيداً، والمقاومة 10Ω على التفرع فانه يشكل مايسمى بالعقدة الفائقة (supernode).

لتحليل الدارة نستبدل مصدر الجهد في العقدة الفائقة بدارة مقصورة، كما في الشكل (b-2).

تطبيق قانون KCL على العقدة الفائقة يعطينا التالي:

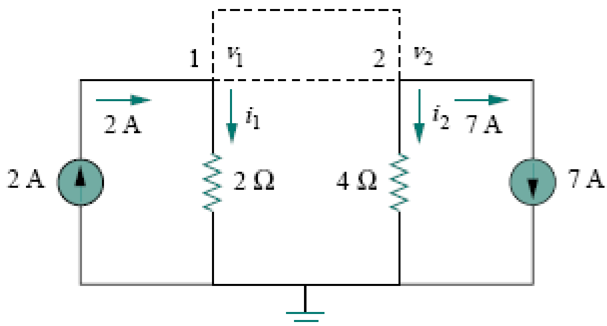
$$2 = i_1 + i_2 + 7$$

وبالتعبير عن التيار بدلالة الجهد:

$$2 = \frac{v_1 - 0}{2} + \frac{v_2 - 0}{4} + 7 \quad \Longrightarrow \quad 8 = 2v_1 + v_2 + 28$$

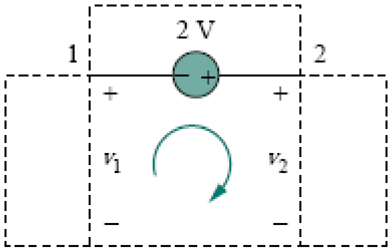
أو

$$v_2 = -20 - 2v_1 \qquad (1)$$



الشكل (b-2)

لإيجاد العلاقة بين الجهدين v_1 و v_2 نطبق قانون KVL على الحلقة المشار إليها في دارة الشكل (c-2) انطلاقاً من عقدة المرجع (Ground) حيث الجهد عندها يساوي الصفر.



الشكل (c-2)

وبالتالي:

$$v_1 + 2\text{ V} - v_2 = 0 \quad \Rightarrow v_2 = v_1 + 2\text{ V} \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد أن:

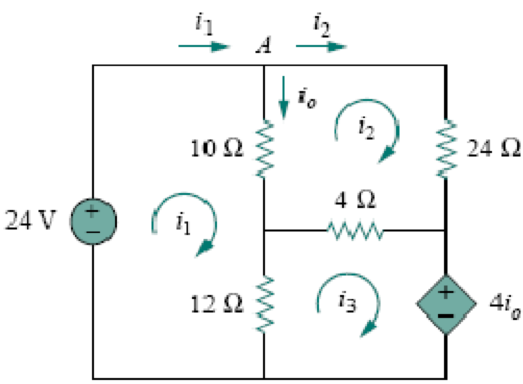
$$v_2 = v_1 + 2 = -20 - 2v_1$$

$$3v_1 = -22 \qquad \Longrightarrow \qquad v_1 = -7.333\text{ V}$$

$$v_2 = v_1 + 2 = -5.333\text{ V}$$

نلاحظ أن المقاومة $10\,\Omega$ لم تلعب أي دوراً في تحليل الدارة لأنها موصولة عبر العقدة الفائقة.

مسألة 7: أوجد التيار i_o المشار إليه في الدارة المبينة في الشكل (3).



الشكل (3)

الحل:

نطبق قانون KVL على الحلقات الثلاث المشار إليها.

الحلقة1:

$$-24 + 10(i_1 - i_2) + 12(i_1 - i_3) = 0$$

أو $\quad 11i_1 - 5i_2 - 6i_3 = 12 \quad (1)$

الحلقة2:

$$24i_2 + 4(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) = 0$$

أو $\quad -5i_1 + 19i_2 - 2i_3 = 0 \quad (2)$

الحلقة3:

$$4i_o + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

ولكن عند العقدة A : $i_o = i_1 - i_2$ ، وبالتعويض في معادلة الحلقة 3، نجد

$$4(i_1 - i_2) + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

أو $\quad -i_1 - i_2 + 2i_3 = 0 \quad (3)$

نكتب المعادلات (1) و (2) و(3) على شكل مصفوفة ونحلها، فنجد

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{array}{c} \\ \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{vmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$$= 418 - 30 - 10 - 114 - 22 - 50 = 192$$

$$\Delta_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{vmatrix} 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array} = 456 - 24 = 432$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24 + 120 = 144$$

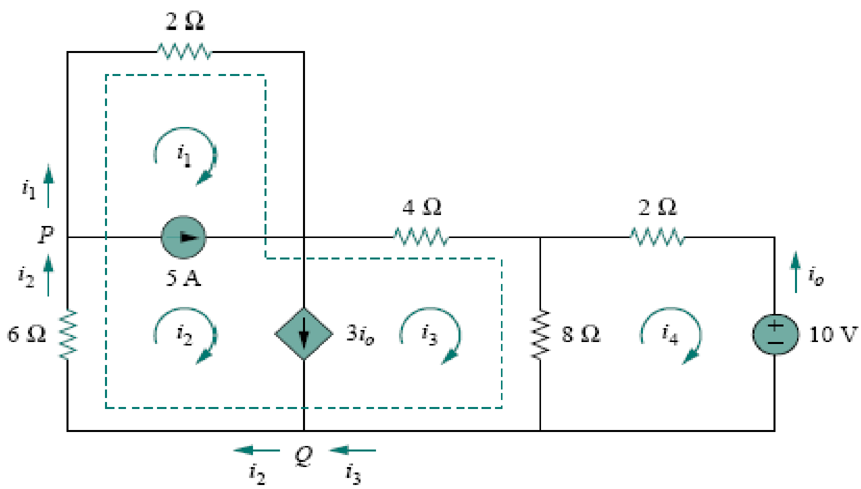
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \end{vmatrix} = 60 + 228 = 288$$

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{432}{192} = 2.25 \text{ A}, \qquad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{192} = 0.75 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{288}{192} = 1.5 \text{ A}$$

وبالتالي
$$i_o = i_1 - i_2 = 1.5 \text{ A}$$

مسألة 8: أوجد التيارات i_1 و i_4 المشار إليها في الدارة المبينة في الشكل (a-4) مستخدماً التحليل الحلقي ومفهوم الحلقة الفائقة (Supermesh).



الشكل (a-4)

الحل:

الحلقة 1 والحلقة 2 تشكلان حلقة فائقة بسبب وجود منبع للتيار مشترك بينهما. وكذلك أيضاً، الحلقة 2 والحلقة 3 تشكلان حلقة فائقة بسبب وجود منبع للتيار غير مستقل مشترك بينهما. وبالتالي، الحلقتان الفائقتان تشكلان حلقة فائقة كبيرة كما هو مبين في الشكل والمشار إليها بالخط المنقط.

بتطبيق قانون KVL على الحلقة الكبيرة نجد:

$$2i_1 + 4i_3 + 8(i_3 - i_4) + 6i_2 = 0$$

أو

$$i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 \qquad (1)$$

عند العقدة P وبتطبيق قانون KCL:

$$i_2 = i_1 + 5 \qquad (2)$$

عند العقدة Q وبتطبيق قانون KCL:

$$i_2 = i_3 + 3i_o$$

لكن $i_o = -i_4$ ، ومنه

$$i_2 = i_3 - 3i_4 \qquad (3)$$

بتطبيق قانون KVL على الحلقة 4:

$$2i_4 + 8(i_4 - i_3) + 10 = 0$$

أو

$$5i_4 - 4i_3 = -5 \qquad (4)$$

بحل المعادلات الحاصلة (1) و (2) و(3) و (4) نحصل على التيارات المطلوبة التالية:

$$i_1 = -7.5 \text{ A}, \qquad i_2 = -2.5 \text{ A}, \qquad i_3 = 3.93 \text{ A}, \qquad i_4 = 2.143 \text{ A}$$
