Aufgabe: Es sei $R \subseteq M \times N$. Unter welchen Bedingungen gilt

$$R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M?$$

Lösung: Die Gleichung $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M$ gilt genau dann, wenn R links-total und links-eindeutig ist. Wir wiederholen zunächst die Definitionen dieses Begriffe. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist *links-total* auf M genau dann, wenn

$$\forall x \in M : \exists y \in M : \langle x, y\rangle \in R \tag{1}$$

gilt. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist *links-eindeutig* genau dann, wenn

$$\forall x, y, z \in M : \big(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in R \rightarrow x = z\big) \tag{2}$$

gilt. Wir behaupten nun, dass Folgendes gilt:

$$R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M \quad \text{g.d.w.} \quad R \text{ ist links-eindeutig und links-total auf } M.$$

Beweis: Der Beweis einer Aussage“A g.d.w. B” zerfällt oft in zwei Teile: Zunächst nehmen wir an, dass A gilt und zeigen, dass daraus B folgt. Anschließend nehmen wir an, dass B gilt und zeigen, dass daraus A folgt. Wir wenden dieses Beweis-Prinzip an und zerlegen den Beweis damit in zwei Teile:

“$\Rightarrow$” Wir zeigen zunächst, dass aus der Gültigkeit der Gleichung

$$R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M$$

folgt, dass R sowohl links-total als auch links-eindeutig ist.

(a) Als erstes zeigen wir, dass R auf M links-total ist. Sei also eine beliebiges $x \in M$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $y \in M$ gibt, so dass $\langle x, y\rangle \in R$ ist. Wir wissen, dass

$$\langle x, x\rangle \in \mathrm{id}_M$$

gilt. Aus der vorausgesetzten Gleichung $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M$ folgt dann

$$\langle x, x\rangle \in R \circ R^{-1}$$

Setzen wir hier die Definition des relationalen Produkts ein, so sehen wir, dass

$$\langle x, x\rangle \in \big\{\langle x, z\rangle \mid \exists y : (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1})\big\}$$

gilt. Daraus folgt aber sofort die Formel

$$\exists y : (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R^{-1})$$

Berücksichtigen wir hier wieder, dass $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$ g.d.w. $\langle x, y\rangle \in R$ gilt, so haben wir

$$\exists y : (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R),$$

was äquivalent ist zu

$$\exists y : \langle x, y\rangle \in R.$$

Da es sich bei dem x, das in dieser Formel auftritt, um ein beliebiges Element der Menge M handelt, haben wir damit gezeigt, dass R auf M links-total ist.

(b) Wir zeigen nun, dass R links-eindeutig ist. Es seien nun Elemente x, y und z der Menge gegeben, so dass

$$\langle x, y\rangle \in R \quad \text{und} \quad \langle z, y\rangle \in R$$

gilt. Wir müssen zeigen, dass dann $x = z$ gelten muss. Dazu beobachten wir, dass

$$\langle z, y\rangle \in R \quad \text{g.d.w.} \quad \langle y, z\rangle \in R^{-1}$$

gilt. Nun folgt aus $\langle x, y\rangle \in R$ und $\langle y, z\rangle \in R^{-1}$ nach Definition des relationalen Produkts, dass

$$\langle x, z\rangle \in R \circ R^{-1}$$

gilt. Aus der vorausgesetzten Gleichung $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M$ folgt dann

$$\langle x, z\rangle \in \mathrm{id}_M$$

und nach Definition der Relation id_M folgt daraus $x = z$.

Damit ist der Beweis der Richtung "$\Rightarrow$" abgeschlossen.

"$\Leftarrow$" Wir nehmen nun an, dass R links-eindeutig und links-total auf M ist und zeigen, dass unter diesen Bedingungen die Gleichung

$$R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_M \tag{3}$$

gültig ist. Da es sich hier um eine Gleichung zwischen Mengen handelt, zerlegen wir diesen Beweis in zwei Teile indem wir zeigen, dass sowohl

$$R \circ R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_M \quad \text{als auch} \quad R \circ R^{-1} \supseteq \mathrm{id}_M$$

gilt.

"$\subseteq$" : Sei $\langle x, z\rangle \in R \circ R^{-1}$. Nach Definitionen des relationalen Produkts heißt dies, dass

$$\langle x, z\rangle \in \bigl\{\langle x, z\rangle \mid \exists y : (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1})\bigr\}$$

gilt. Daraus folgt sofort

$$\exists y : \bigl(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1}\bigr)$$

Wegen $\langle y, z\rangle \in R^{-1}$ g.d.w. $\langle z, y\rangle \in R$ ist dies äquivalent zu

$$\exists y : \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in R$$

Mit der Links-Eindeutigkeit (2) der Relation R folgt daraus

$$x = z.$$

Also haben wir

$$\langle x, z\rangle = \langle x, x\rangle \in \mathrm{id}_M.$$

"$\supseteq$" : Sei nun $\langle x, x\rangle \in \mathrm{id}_M$. Wir müssen $\langle x, x\rangle \in R \circ R^{-1}$ zeigen. Nach Definition des relationalen Produkts ist das äquivalent zu

$$\langle x, x\rangle \in \bigl\{\langle x, z\rangle \mid \exists y : (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1})\bigr\}$$

zeigen und dies ist äquivalent zu der Formel

$$\exists y : \bigl(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R^{-1}\bigr).$$

Mit der Definition von R^{-1} kann dies umgeformt werden zu

$$\exists y : \bigl(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R\bigr).$$

Diese Formel ist offenbar äquivalent zu der Formel

$$\exists y : \langle x, y\rangle \in R$$

und diese Formel folgt sofort aus der Tatsache, dass die Relation R links-total ist.

Damit ist nun auch der Beweis der Richtung "$\Leftarrow$" abgeschlossen und wir haben die Behauptung vollständig bewiesen. $\square$