Widerlegungs-Vollständigkeit des Gentzen-Kalküls

Gegeben: $M \subseteq \mathcal{F}$ und $f \in \mathcal{F}$

Gesucht: Verfahren, um $M \models f$ zu entscheiden.

Bekannte Verfahren: Sei $M = \{g_1, \cdots, g_n\}$. Dann gilt

$$M \models f \quad \text{g.d.w.} \quad \models g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \rightarrow f$$

Entscheidung, ob Tautologie durch

1. Werte-Tabelle oder

2. Konjunktive Normalform

Beide Verfahren sind ineffizient:

1. Werte-Tabelle:
   Bei n Aussage-Variablen hat Tabelle 2^n Zeilen.

2. KNF: Sei g_i Klausel mit m_i Literalen.
   Dann hat KNF von $g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \rightarrow f$ mindestens $m_1 * \cdots * m_n$ Klauseln.

Andere Möglichkeit:

$$M \models f \quad \text{g.d.w.} \quad M \cup \{\neg f\} \models \bot$$
$$\text{g.d.w.} \quad M \cup \{\neg f\} \vdash_G \bot$$

Sei $M \subseteq \mathcal{F}$ und $f \in \mathcal{F}$.

Korrektheit:

$$M \vdash_G f \quad \Rightarrow \quad M \models f$$

Widerlegungs-Vollständigkeit:

$$M \models \bot \quad \Rightarrow \quad M \vdash_G \bot$$

Zusammen: $M \models \bot$ g.d.w. $M \vdash_G \bot$

Definition: Sei $k \in \mathcal{K}$, $M \subseteq \mathcal{K}$ und $l \in \mathcal{L}$.

$$\textit{redukt}(k,l) := \begin{cases} \top & \text{falls } l \in k; \\ k \backslash \{\,\overline{l}\,\} & \text{falls } l \notin k \text{ und } \overline{l} \in k; \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\textit{Redukt}(M,l) := \{\ \textit{redukt}(k,l) \mid k \in M\ \}.$$

Beispiel:

$$M = \Big\{\{\neg r, p, q\}, \{\neg r, \neg p, \neg o\}, \{r, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg p, o\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\}$$

$$\textit{Redukt}(M,p) = \Big\{\top, \{\neg r, \neg o\}, \{r, q\}, \{o\}, \{q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\}$$

$$\textit{Redukt}(M,\neg p) = \Big\{\{\neg r, q\}, \top, \{r, q\}, \{\neg q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\}$$

Eigenschaften von *Redukt*(M, l)

Beobachtung:
p tritt weder in *Redukt*(M, p) noch in *Redukt*$(M, \neg p)$ auf.

Satz: Ist $M \subseteq \mathcal{K}$ und $l \in \mathcal{L}$, so gilt

$$M \models \bot \quad \Rightarrow \quad \textit{Redukt}(M, l) \models \bot.$$

Satz: Ist $M \subseteq \mathcal{K}$, $f \in \mathcal{K}$ und $l \in \mathcal{L}$, so gilt:

$$\textit{Redukt}(M, l) \vdash_G f \;\Rightarrow\; M \vdash_G f \text{ oder } M \vdash_G f \cup \{\overline{l}\}.$$

Aufgabe: Zeigen Sie

1. $\Big\{\{\neg r, \neg o\}, \{r, q\}, \{o\}, \{q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\} \vdash_G \bot$

2. $\Big\{\{\neg r, q\}, \{r, q\}, \{\neg q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\} \vdash_G \bot$

3. $\Big\{\{\neg r, p, q\}, \{\neg r, \neg p, \neg o\}, \{r, q\}, \{\neg q, p\},$
$\{\neg p, o\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\} \vdash_G \bot$

Widerlegungs-Vollständigkeit des Gentzen-Kalküls

Theorem: (Widerlegungs-Vollständigkeit von G)

Sei $M \subseteq \mathcal{K}$. Dann gilt

$$M \models \bot \quad \Rightarrow \quad M \vdash_G \bot.$$

Beweis: Induktion über Anzahl n der Aussage-Variablen in M.

Satz: Sei $M \subseteq \mathcal{K}$, $f \in \mathcal{K}$ und $p \in \mathcal{P}$

$$M \models \bot$$

g.d.w.

$$\textit{Redukt}(M, p) \vdash_G \bot \quad \text{und} \quad \textit{Redukt}(M, \neg p) \vdash_G \bot$$

Aufgabe: Zeigen Sie

$$\Big\{\{t, \neg s, q\}, \{\neg t, q, p\}, \{t, s, \neg r\}, \{\neg t, s, \neg r\}, \{s, p\}, \\ \{t, p\}, \{\neg t, \neg q, p\}, \{\neg s, \neg p\}, \{u, r, \neg p\}, \{\neg u, \neg p\}\Big\} \models \bot$$

$$M = \Big\{\{\neg r, p, q\}, \{\neg r, \neg p, \neg o\}, \{r, q\}, \{\neg q, p\},$$
$$\{\neg p, o\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\}$$

Redukt$(M, p) =$
$$\Big\{\top, \{\neg r, \neg o, \underline{\neg p}\}, \{r, q\}, \{o, \underline{\neg p}\}, \{q, \underline{\neg p}\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\}$$

Redukt$(M, \neg p) = \Big\{\{\neg r, q, \underline{p}\}, \top, \{r, q\}, \{\neg q, \underline{p}\}, \{\neg q, r, \neg o\}\Big\}$

Es gilt *Redukt*$(M, p) \vdash_G \perp$ wegen

1. $\{o, \underline{\neg p}\}$, $\{\neg r, \neg o, \underline{\neg p}\} \vdash_G \{\neg r, \underline{\neg p}\}$
2. $\{\neg r, \underline{\neg p}\}$, $\{\neg q, r, \neg o\} \vdash_G \{\neg q, \neg o, \underline{\neg p}\}$
3. $\{o, \underline{\neg p}\}$, $\{\neg q, \neg o, \underline{\neg p}\}$, $\vdash_G \{\neg q, \underline{\neg p}\}$
4. $\{\neg q, \underline{\neg p}\}$, $\{q, \underline{\neg p}\}$, $\vdash_G \{\underline{\neg p}\}$

Es gilt *Redukt*$(M, \neg p) \vdash_G \perp$ wegen

1. $\{\neg q, \underline{p}\}$, $\{\neg r, q, \underline{p}\} \vdash_G \{\neg r, \underline{p}\}$
2. $\{\neg r, \underline{p}\}$, $\{r, q\} \vdash_G \{q, \underline{p}\}$
3. $\{q, \underline{p}\}$, $\{\neg q, \underline{p}\} \vdash_G \{\underline{p}\}$

Also gilt: $M \vdash_G \{\neg p\}$ und $M \vdash_G \{p\}$

Mit Schnitt folgt: $M \vdash_G \perp$

Davis-Putnam Verfahren

Geg.: K Menge von Klauseln

Ges.: $\mathcal{I}$ aussagenlogische Belegung mit

$$\forall k \in K : \mathcal{I}(k) = \texttt{true}$$

Davis-Putnam Verfahren

1. Führe alle Schnitte mit Unit-Klauseln durch:
$$\frac{\{p\} \qquad \{\neg p\} \cup k}{k} \qquad\qquad \frac{k \cup \{p\} \qquad \{\neg p\}}{k}$$
2. Vereinfache mit Subsumption
$K \cup \big\{\{l\}, \{l, l_1, \cdots, l_m\}, k_1, \cdots, k_n\big\} \leadsto \big\{\{l\}, k_1, \cdots, k_n\big\}$
3. Wähle aussagenlogische Variable p aus K.
   (a) Suche rekursiv Lösung für $\mathcal{I}$ für $K \cup \big\{\{p\}\big\}$.
   (b) Falls (a) erfolglos ist:
   Suche rekursiv Lösung für $\mathcal{I}$ für $K \cup \big\{\{\neg p\}\big\}$

Berechnung von Unit-Schnitten:

$\texttt{\textbf{unitCut}} : 2^{\mathcal{K}} \times \mathcal{L} \rightarrow 2^{\mathcal{K}}$

$\texttt{unitCut}(K, l)$: bilde alle Unit-Schnitte mit Klausel $\{l\}$.

$\texttt{unitCut}(K, l) =$

$\{\, k - \{\neg l\} \mid k \in K \wedge (\neg l) \in k \,\} \cup \{\, k \mid k \in K \wedge (\neg l) \notin k\}$

Subsumption:

$\texttt{unitSubsumption} : 2^{\mathcal{K}} \times \mathcal{L} \rightarrow 2^{\mathcal{K}}$.

$\texttt{unitSubsumption}(K, l)$: Entferne alle Klauseln aus K, die von der Klausel $\{l\}$ subsumiert werden.

$\texttt{unitSubsumption}(K, l) = \{\, k \mid k \in K \wedge l \notin k \,\}$.