Der Robinson–Kalkül

Vereinbarung: Bei Klauseln Allquantoren weggelassen.

Beispiel: Wir schreiben

$$\mathit{pop}(\mathit{push}(x_1, s_1))$$

statt

$$\forall x_1 \in \mathbb{N} : \forall s_1 \in \mathit{Stack} : \mathit{pop}(\mathit{push}(x_1, s_1)).$$

Vereinbarung: Klauseln sind Mengen von Literalen

$$l_1 \vee \cdots \vee l_n \;=\; \{l_1, \cdots, l_n\}$$

Definition: Schluß–Regel ist Paar der Form

$$\langle \{k_1, \cdots, k_n\}, k \rangle$$

k und k_i: prädikatenlogische Klauseln.

k_1, $\cdots$, k_n: Prämissen

k: Konklusion

Schreibweise:

$$\frac{k_1 \quad \cdots \quad k_n}{k}$$

Definition: Substitutions–Regel

$$\frac{k}{k\tau}(\mathit{Subst})$$

k: Klausel

τ: Substitution

Beobachtung: Klauseln “schrumpfen” durch Subst-Regel.

Betrachte:

1. $k = q(x, d) \vee q(c, y)$
2. $\tau = [x \mapsto c, y \mapsto d]$

Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} k\tau & = & q(c, d) \vee q(c, d) \\ & = & \{q(c, d), q(c, d)\} \\ & = & \{q(c, d)\} \\ & = & q(c, d) \end{array}$$

Also: $$\frac{q(x, d) \vee q(c, y)}{q(c, d)}(\mathit{Subst}).$$

Definition: (Schnitt–Regel) Es sei

1. k_1, k_2: prädikatenlogische Klauseln
2. l: prädikatenlogisches Literal

$$\frac{k_1 \vee l \qquad \overline{l} \vee k_2}{k_1 \vee k_2}(\mathit{Schnitt})$$

Definition: Kalkül = Menge von Schluß–Regeln

$\mathit{Simple} := \{\mathit{Subst}, \mathit{Schnitt}\}$

Definition: $M \vdash_{\mathcal{K}} k$

1. Falls $k \in M$, dann $M \vdash_{\mathcal{K}} k$.
2. Falls
   (a) $M \vdash_{\mathcal{K}} k_i$ für alle $i = 1, \cdots, n$ und
   (b) $\dfrac{k_1 \quad \cdots \quad k_n}{k}$ Schluß aus $\mathcal{K}$,

   dann $M \vdash_{\mathcal{K}} k$.

Sprechweise: "k *kann mit* $\mathcal{K}$ *aus* M *hergeleitet werden*".

Beispiel: Signatur

1. $\mathbb{T} := \{\mathbb{B}, \mathbb{N}\}$.
2. *Fz* $:= \{s\}$ und $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
3. *Pz* $:= \{<\}$ und $<: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{B}$.
4. $\mathcal{V} := \{x, y, z, u, v, w\}$.

Klauseln:

1. $g_1 := \neg\, x < x$.
2. $g_2 := \neg\, x < y \;\vee\; \neg\, y < z \;\vee\; x < z$.
3. $g_3 := x < s(x)$.
4. $g_4 := x < s(s(x))$.

Ein Beispiel

Setze: $M := \{g_1, g_2, g_3\}$.

Zeige: $M \vdash_{\mathit{Simple}} g_4$.

1. Aus g_2 folgt mit $\tau = [y \mapsto s(x)]$

$$\frac{\neg\, x < y \;\vee\; \neg\, y < z \;\vee\; x < z}{\neg\, x < s(x) \;\vee\; \neg\, s(x) < z \;\vee\; x < z}(\mathit{Subst})$$

2. Aus g_3 und der letzten Formel folgt mit Schnitt

$$\frac{x < s(x) \qquad \neg\, x < s(x) \;\vee\; \neg\, s(x) < z \;\vee\; x < z}{\neg\, s(x) < z \;\vee\; x < z}$$

3. Daraus folgt mit $\tau = [z \mapsto s(s(x))]$

$$\frac{\neg\, s(x) < z \;\vee\; x < z}{\neg\, s(x) < s(s(x)) \;\vee\; x < s(s(x))}(\mathit{Subst})$$

4. Aus g_3 folgt mit $\tau = [x \mapsto s(x)]$

$$\frac{x < s(x)}{s(x) < s(s(x))}(\mathit{Subst})$$

5. Aus den letzten beiden Formeln folgt mit Schnitt

$$\frac{s(x) < s(s(x)) \qquad \neg\, s(x) < s(s(x)) \;\vee\; x < s(s(x))}{x < s(s(x))}$$

Resolutions–Regel (Motivation)

Frage: Wie wähle ich Substitution τ in (*Subst*)?

Antwort: So, dass Schnitt–Regel anwendbar wird!

$$\dfrac{\dfrac{k_1 \vee l_1}{k_1\tau_1 \vee l_1\tau_1}(\mathit{Subst}) \qquad \dfrac{l_2 \vee k_2}{l_2\tau_2 \vee k_2\tau_2}(\mathit{Subst})}{k_1\tau_1 \vee k_2\tau_2}(\mathit{Schnitt})$$

Forderung:

$$l_1\tau_1 = \overline{l_2}\tau_2$$

Beispiel:

1. $k_1 \vee l_1 \;=\; x < s(x)$
2. $l_2 \vee k_2 \;=\; \neg\, s(x) < z \;\vee\; x < z$
3. $(x < s(x))\tau_1 = (x < z)\tau_2$
4. $\tau_1 = [x \mapsto s(x)]$
5. $\tau_2 = [z \mapsto s(s(x))]$
6. $k_1\tau_1 \vee k_2\tau_2 \;=\; x < s(s(x))$

Definition: $\pi = [x_1 \mapsto y_1, \cdots, x_n \mapsto y_n]$
ist *Variablen–Umbenennung* falls

1. $\{y_1, \cdots, y_n\} \cap \{x_1, \cdots, x_n\} = \emptyset.$
2. $i \neq j \Rightarrow y_i \neq y_j,$

Resolutions–Regel

Definition: (Resolutions–Regel) Es gelte:

1. k_1, k_2: prädikatenlogische Klauseln,
2. l_1, l_2: prädikatenlogische Literale,
3. π: Variablen–Umbenennung,
4. $l_1 \doteq \overline{l_2}\pi$: lösbare syntaktische Gleichung,
5. $\mu = \mathit{mgu}(l_1, \overline{l_2})$.

Dann: *Resolutions–Regel*

$$\frac{k_1 \vee l_1 \qquad l_2 \vee k_2}{k_1\mu \vee k_2\pi\mu}(\mathit{Res})$$

Bemerkung: $\mathit{Res} = 2 * (\mathit{Subst}) + (\mathit{Schnitt})$

$$\frac{\dfrac{k_1 \vee l_1}{k_1\mu \vee l_1\mu}(\mathit{Subst}) \qquad \dfrac{\dfrac{l_2 \vee k_2}{l_2\pi \vee k_2\pi}(\mathit{Subst})}{l_2\pi\mu \vee k_2\pi\mu}(\mathit{Subst})}{k_1\mu \vee k_2\pi\mu}(\mathit{Schnitt})$$

Definition: (Faktorisierungs–Regel)

1. k: prädikatenlogische Klausel,
2. l_1 und l_2: prädikatenlogische Literale,
3. $l_1 \doteq l_2$: lösbare syntaktische Gleichung
4. $\mu = \mathit{mgu}(l_1, l_2)$

$$\frac{k \vee l_1 \vee l_2}{k\mu \vee l_1\mu}(\mathit{Fakt})$$

Beispiel:

$$\frac{q(x,d) \vee q(c,y)}{q(c,d)}(\mathit{Fakt}).$$

Bemerkung: (*Fakt*) ist Spezialfall von (*Subst*)

Definition: Robinson–Kalkül

$\mathcal{R} := \{\mathit{Res}, \mathit{Fakt}\}$

Korrektheits–Satz:

Falls $M \vdash_{\mathcal{R}} k$, dann $M \models k$.

Widerlegungs–Vollständigkeit:

Falls $M \models \bot$, dann $M \vdash_{\mathcal{R}} \bot$.

Beispiel: Sei

1. $g_1 := \neg\, x < x.$
2. $g_2 := \neg\, x < y \ \vee\ \neg\, y < z \ \vee\ x < z.$
3. $g_3 := x < s(x).$
4. $g_4 := x < s(s(x)).$

Zeige: $\{g_1, g_2, g_3\} \vdash_{\mathcal{R}} g_4$

1. Aus g_3 und g_2 folgt mit $\pi = []$ und $\mu = [y \mapsto s(x)]$

$$\frac{x < s(x) \qquad \neg\, x < y \ \vee\ \neg\, y < z \ \vee\ x < z}{\neg\, s(x) < z \ \vee\ x < z}\,(\mathit{Res})$$

2. Aus g_2 und $\neg\, s(x) < z \ \vee\ x < z$ folgt mit
$\pi = [x \mapsto u, z \mapsto v]$ und $\mu = [x \mapsto s(u), v \mapsto s(s(u))]$

$$\frac{x < s(x) \qquad \neg\, s(x) < z \ \vee\ x < z}{u < s(s(u))}\,(\mathit{Res})$$

Verfahren zur Überprüfung $M \models k$

1. Setze $N := M \cup \{\neg f\}$. Dann
$$M \models f \quad \text{g.d.w.} \quad N \models \bot.$$
2. Sei $N = \{g_1, \cdots, g_n\}$.
Überführe $g_1, \cdots g_n$ in Klausel–Normalform:
$$\{g_1, \cdots, g_n\} \approx_e \{k_1, \cdots, k_m\}$$
3. $M \models f \quad$ g.d.w. $\quad \{k_1, \cdots, k_m\} \vdash_{\mathcal{R}} \bot$

Aber: $\{k_1, \cdots, k_m\} \vdash_{\mathcal{R}} \bot$ nur *semi–entscheibar*.

1. Falls $\{k_1, \cdots, k_m\} \vdash_{\mathcal{R}} \bot$, dann finden wir es heraus.
2. Falls $\{k_1, \cdots, k_m\} \not\vdash_{\mathcal{R}} \bot$, dann rechnen wir beliebig lange.
3. Also: Gleichzeitig systematisch nach Struktur $\mathcal{S}$ suchen mit
   (a) $\mathcal{S}(m) = \texttt{true}$ f.a. $m \in M$,
   (b) $\mathcal{S}(f) = \texttt{false}$.

Problem: Manchmal gibt es nur unendliche Strukturen *S* für die $\mathcal{S}(m) = \texttt{true}$ f.a. $m \in M$ gilt.

Beispiel: $M = \{g_1, g_2, g_3\}$

$$\boxed{\boxed{\text{Prädikatenlogik unentscheidbar!}}}$$

Beispiel

Axiome:

1. Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

2. Rote Drachen können fliegen.

3. Die Kinder eines roten Drachens sind immer rot.

Behauptung: Alle roten Drachen sind glücklich.

Formalisierung:

Signatur: $\Sigma_{Drache} := \langle \mathcal{V}, Fz, Pz, arity \rangle$

1. $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$

2. $Fz = \{\}$

3. $Pz = \{rot, fliegt, glück, kind\}$

4. $arity = \{\langle rot, 1\rangle, \langle fliegt, 1\rangle, \langle glück, 1\rangle, \langle kind, 2\rangle\}$

Beispiel (Fortsetzung)

Formalisierung von Axiomen und Behauptung:

1. $f_1 := \forall x : (\forall y : \mathit{kind}(y,x) \rightarrow \mathit{fliegt}(y)) \rightarrow \mathit{glück}(x)$
2. $f_2 := \forall x : \mathit{rot}(x) \rightarrow \mathit{fliegt}(x)$
3. $f_3 := \forall x : \mathit{rot}(x) \rightarrow \forall y : \mathit{kind}(y,x) \rightarrow \mathit{rot}(y)$
4. $f_4 := \forall x : \mathit{rot}(x) \rightarrow \mathit{glück}(x)$

Skolemisierungen f_1:

$$\begin{array}{ll}
f_1 = & \forall x : (\forall y : \mathit{kind}(y,x) \rightarrow \mathit{fliegt}(y)) \rightarrow \mathit{glück}(x) \\
\leftrightarrow & \forall x : \neg(\forall y : \neg\mathit{kind}(y,x) \vee \mathit{fliegt}(y)) \vee \mathit{glück}(x) \\
\leftrightarrow & \forall x : (\exists y : \mathit{kind}(y,x) \wedge \neg\mathit{fliegt}(y)) \vee \mathit{glück}(x) \\
\leftrightarrow & \forall x : \exists y : (\mathit{kind}(y,x) \wedge \neg\mathit{fliegt}(y)) \vee \mathit{glück}(x) \\
\approx_e & \forall x : (\mathit{kind}(k(x),x) \wedge \neg\mathit{fliegt}(k(x))) \vee \mathit{glück}(x)
\end{array}$$

Umformung in Klauseln:

$$k_1 := \mathit{kind}(k(x),x) \vee \mathit{glück}(x)$$
$$k_2 := \neg\mathit{fliegt}(k(x)) \vee \mathit{glück}(x)$$

Umformung in Klauseln f_2:

$$k_3 := \neg\mathit{rot}(x) \vee \mathit{fliegt}(x)$$

Umformung in Klauseln f_3:

$$k_4 := \neg\mathit{rot}(x) \vee \neg\mathit{kind}(y,x) \vee \mathit{rot}(y)$$

Beispiel (Fortsetzung)

Umformung in Klauseln $\neg f_4$:

$$\begin{array}{ll} \neg f_4 = & \neg\forall x : \mathit{rot}(x) \rightarrow \mathit{glück}(x) \\ \leftrightarrow & \neg\forall x : \neg\mathit{rot}(x) \vee \mathit{glück}(x) \\ \leftrightarrow & \exists x : \mathit{rot}(x) \wedge \neg\mathit{glück}(x) \\ \approx_e & \mathit{rot}(d) \wedge \neg\mathit{glück}(d) \end{array}$$

Klauseln:

$$k_5 = \mathit{rot}(d)$$
$$k_6 = \neg\mathit{glück}(d)$$

Definiere $L := \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ mit

1. $k_1 = \mathit{kind}(k(x), x) \vee \mathit{glück}(x)$

2. $k_2 = \neg\mathit{fliegt}(k(x)) \vee \mathit{glück}(x)$

3. $k_3 = \neg\mathit{rot}(x) \vee \mathit{fliegt}(x)$

4. $k_4 = \neg\mathit{rot}(x) \vee \neg\mathit{kind}(y, x) \vee \mathit{rot}(y)$

5. $k_5 = \mathit{rot}(d)$

6. $k_6 = \neg\mathit{glück}(d)$

Zeige:

$$L \vdash_{\mathcal{R}} \perp$$

Der Beweis

1. Aus k_5 und k_4 folgt

$$\frac{\textit{rot}(d) \quad \neg\textit{rot}(x) \vee \neg\textit{kind}(y,x) \vee \textit{rot}(y)}{\neg\textit{kind}(y,d) \vee \textit{rot}(y)}(\mathcal{R})$$

2. Daraus folgt mit k_1

$$\frac{\neg\textit{kind}(y,d) \vee \textit{rot}(y) \quad \textit{kind}(k(x),x) \vee \textit{glück}(x)}{\textit{glück}(d) \vee \textit{rot}(k(d))}(\mathcal{R})$$

3. Daraus folgt mit k_6

$$\frac{\textit{glück}(d) \vee \textit{rot}(k(d)) \quad \neg\textit{glück}(d)}{\textit{rot}(k(d))}(\mathcal{R})$$

4. Daraus folgt mit k_3

$$\frac{\textit{rot}(k(d)) \quad \neg\textit{rot}(x) \vee \textit{fliegt}(x)}{\textit{fliegt}(k(d))}(\mathcal{R})$$

5. Daraus folgt mit k_2

$$\frac{\textit{fliegt}(k(d)) \quad \neg\textit{fliegt}(k(x)) \vee \textit{glück}(x)}{\textit{glück}(d)}(\mathcal{R})$$

6. Daraus folgt mit k_6

$$\frac{\textit{glück}(d) \quad \neg\textit{glück}(d)}{\perp}(\mathcal{R})$$

Hausaufgabe

Gegeben seien folgende Axiome:

1. Jeder Barbier rasiert alle Personen, die sich nicht selbst rasieren.

2. Kein Barbier rasiert jemanden, der sich selbst rasiert.

Folgern Sie daraus:

Alle Barbiere sind blond.