Schluß-Regeln

Eine *Schluß-Regel* ist eine Paar

$$\langle \{f_1, \cdots, f_n\}, k \rangle$$

mit $f_1, \cdots, f_n, k \in \mathcal{F}$.

f_1, $\cdots$, f_n: *Prämissen*.

k: *Konklusion*.

Schreibweise: $\dfrac{f_1 \qquad \cdots \qquad f_n}{k}$

Beispiele für Schluß-Regeln:

1. "*Modus Ponens*":
$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q} \; (MP)$$

2. "*Modus Ponendo Tollens*":
$$\frac{\neg q \qquad p \rightarrow q}{\neg p} \; (MPT)$$

3. "*Modus Tollendo Tollens*":
$$\frac{\neg p \qquad p \rightarrow q}{\neg q} \; (MTT)$$

Frage: Wann sind Schluß-Regeln korrekt?

Erfüllbarkeit

Geg.: $M = \{k_1, \cdots, k_n\}$ Menge von Klauseln

1. **Frage**: Wann ist M Tautologie?
   Formal: Wann gilt $\models k_1 \wedge \cdots \wedge k_n$?

   Antwort:

   $$\begin{array}{lll} & \models M & \\ \text{g.d.w.} & \models k_i & \text{für alle } i = 1, \cdots, n \\ \text{g.d.w.} & k_i \text{ trivial} & \text{für alle } i = 1, \cdots, n \end{array}$$

   Zufriedenstellende Antwort.

2. **Frage**: Wann ist M erfüllbar?
   Formal: Wann gibt es Belegung $\mathcal{I}$ so dass gilt:

   $$\texttt{eval}(k_i, I) = \texttt{true} \qquad \text{für alle } i = 1, \cdots, n?$$

   Antwort ist schwieriger:

   $$\begin{array}{ll} & M \ \textbf{\texttt{unerfüllbar}} \\ \text{g.d.w.} & \textbf{\texttt{aus}}\ M\ \textbf{\texttt{ist}}\ \perp\ \textbf{\texttt{herleitbar}} \\ \text{g.d.w.} & M \vdash \perp \end{array}$$

   Wir benötigen den

   Herleitungs-Begriff

   zur Beantwortung der Frage.

Spezialfälle der Schnitt-Regel

1. Setze $k_1 := \emptyset$, $l := p$ und $k_2 := \{q\}$:

   $$\frac{\{\} \cup \{p\} \qquad \{\neg p\} \cup \{q\}}{\{\} \cup \{q\}}$$

   Interpretation von Mengen als Disjunktionen liefert:

   $$\frac{p \qquad \neg p \vee q}{q}$$

   Berücksichtigung von $\neg p \vee q \;\leftrightarrow\; p \rightarrow q$ liefert:

   $$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q} \quad (\textit{Modus Ponens})$$

2. Setze $k_1 := \emptyset$, $l := \neg q$ und $k_2 := \{\neg p\}$:

   $$\frac{\{\} \cup \{\neg q\} \qquad \{q\} \cup \{\neg p\}}{\{\} \cup \{\neg p\}}$$

   Interpretation von Mengen als Disjunktionen liefert:

   $$\frac{\neg q \qquad q \vee \neg p}{\neg p}$$

   Berücksichtigung von $q \vee \neg p \;\leftrightarrow\; p \rightarrow q$ liefert:

   $$\frac{\neg q \qquad p \rightarrow q}{\neg p} \quad (\textit{Modus Ponendo Tollens})$$

3. $$\frac{\neg p \qquad p \rightarrow q}{\neg q} \quad (\textit{Modus Tollendo Tollens})$$

   Ist *MTT* Spezialfall der Schnitt-Regel?

Beweis-Begriff: $M \vdash f$

Vor.: $M \subseteq \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}$.

Schreibweise: $M \vdash f$ (M beweist f)

Definition induktiv:

1. $M \vdash \top$
2. Wenn $f \in M$ ist, dann gilt $M \vdash f$.
3. Es gelte:
   (a) $M \vdash k_1 \cup \{p\}$,
   (b) $M \vdash \{\neg p\} \cup k_2$.

   Dann gilt auch
   $$M \vdash k_1 \cup k_2.$$

Korrektheits-Satz: Es gilt:

$$M \vdash f \quad \Rightarrow \quad M \models f$$

Widerlegungs-Vollständigkeit

Theorem: (Widerlegungs-Vollständigkeit von G)

Sei $\{k_1, \cdots, k_n\} \subseteq \mathcal{K}$. Dann gilt

$$\{k_1, \cdots, k_n\} \models \bot \quad \Rightarrow \quad \{k_1, \cdots, k_n\} \vdash \bot.$$

Frage: Wann folgt f aus Klausel-Menge $\{k_1, \cdots, k_n\}$?

Antwort: Falls gilt: $\{k_1, \cdots, k_n\} \cup \mathit{knf}(\neg f) \vdash \bot$

Definition: Sei $k \in \mathcal{K}$, $M \subseteq \mathcal{K}$ und $l \in \mathcal{L}$.

$$\mathit{redukt}(k, l) := \begin{cases} \top & \text{falls } l \in k; \\ k \backslash \{\overline{l}\} & \text{falls } l \notin k \text{ und } \overline{l} \in k; \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathit{Redukt}(M, l) := \{\ \mathit{redukt}(k, l) \mid k \in M\ \}.$$

Satz: Ist $M \subseteq \mathcal{K}$ und $l \in \mathcal{L}$, so gilt

$$M \models \bot \quad \Rightarrow \quad \mathit{Redukt}(M, l) \models \bot.$$

Satz: Ist $M \subseteq \mathcal{K}$, $f \in \mathcal{K}$ und $l \in \mathcal{L}$, so gilt:

$$\mathit{Redukt}(M, l) \vdash f \ \Rightarrow\ M \vdash f \text{ oder } M \vdash f \cup \{\overline{l}\}.$$