Aufgabe: Es sei M eine endliche Menge und R sei eine Relation auf M. Wir definieren eine Folge von Relationen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Induktion:

$$S_1 := R \quad \text{und} \quad S_{n+1} = R \cup S_n \circ S_n$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den transitiven Abschluss R^+ konvergiert.

Lösung: Wir berechnen zunächst die Werte S_2 und S_3. Es gilt

$$S_2 = R \cup S_1 \circ S_1 = R \cup R \circ R = R^1 \cup R^2 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= R \cup S_2 \circ S_2 \\ &= R \cup (R^1 \cup R^2) \circ (R^1 \cup R^2) \\ &= R^1 \cup R^1 \circ R^1 \cup R^1 \circ R^2 \cup R^2 \circ R^1 \cup R^2 \circ R^2 \\ &= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^3 \cup R^4 \\ &= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \end{aligned}$$

An dieser Stelle vermuten wir, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Formel

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} R^i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

beschrieben werden kann. (Wenn Sie diese Gesetzmäßgikeit an dieser Stelle noch nicht erkennen können, dann müssen Sie hier halt noch S_4 und S_5 ausrechnen. Spätenstens dann ist das Bildungsgesetz nicht mehr zu übersehen.) Wir beweisen diese Gesetzmäßgikeit nun durch Induktion nach n.

I.A. $n = 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} R^i = \bigcup_{i=1}^{2^{1-1}} R^i = \bigcup_{i=1}^{2^0} R^i = \bigcup_{i=1}^{1} R^i = R^1 = R = S_1$$

I.S. $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= R \cup S_n \circ S_n \\ &= R \cup \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} R^i \circ \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} R^j && \text{nach Induktions-Voraussetzung} \\ &= R \cup \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} R^i \circ R^j && \text{Distributiv-Gesetz} \\ &= R \cup \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} R^{i+j} && \text{Potenz-Gesetz} \\ &= R \cup \bigcup_{k=2}^{2^{n-1}+2^{n-1}} R^k \\ &= R^1 \cup \bigcup_{k=2}^{2^n} R^i \\ &= \bigcup_{i=1}^{2^{(n+1)-1}} R^i \end{aligned}$$

Offenbar ist die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in dem Sinne, dass

$$S_n \subseteq S_{n+1}$$

gilt, denn wir haben nach dem eben gezeigten ja

$$S_{n+1} = S_n \cup \bigcup_{i = 2^{n-1}+1}^{2^n} R^i$$

Daher gibt es genau wie bei der in der Vorlesung diskutierten Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$S_n = S_k \quad \text{für alle } n \geq k$$

gilt und damit gilt genau wie in der Vorlesung

$$S_k = R^+. \qquad \square$$

Bemerkung: Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert wesentlich schneller gegen R^+ als die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.