Aufgaben zur Mengenlehre

Aufgabe 1: Geben Sie die folgende Menge durch explizites Auflisten aller Elemente an:

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0\}.$$

Aufgabe 2: Geben Sie für die folgenden Mengen eine Definition in der Form

$$M := \{g(x) \mid F(x)\}$$

an. Dabei ist $g(x)$ ein Term und $F(x)$ ist eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn x ein Element der Menge M ist. Beispiel: Für die Menge

$$M := \{2, 4, 8, \cdots\}$$

lautet die Definition

$$M := \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\}.$$

Definieren Sie die folgenden Mengen in der oben gezeigten Form:

(a) $M_1 = \{5, 10, 15, \cdots\}$

(b) $M_2 = \{2, 4, 6, \cdots\} \cap \{3, 6, 9, \cdots\}$

(c) $M_3 = \{2, 4, 6, \cdots\} \cup \{3, 6, 9, \cdots\}$

(d) $M_4 = \{2, 4, 6, \cdots\} \setminus \{3, 6, 9, \cdots\}$

Aufgabe 3: Es seien M und N Mengen und $R \subseteq M \times N$ sei eine binäre Relation. Für eine Menge $X \subseteq M$ ist der Ausdruck $R(X)$ wie folgt definiert:

$$R(X) := \{y \in N \mid \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R\}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für beliebe Teilmengen $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ gilt

$$R(A \cap B) = R(A) \cap R(B).$$

(b) Für beliebe Teilmengen $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ gilt

$$R(A \cup B) = R(A) \cup R(B).$$

(c) Falls Sie in Teil (a) oder (b) dieser Aufgabe zu dem Schluß kommen, dass die Aussage nicht allgemeingültig ist, dann überlegen Sie, welche Eigenschaften die Relation R haben muß, damit die Aussage richtig wird.

Aufgabe 4: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $(K \setminus M) \setminus N = K \setminus (M \cup N)$

(b) $K \setminus (M \cap N) = (K \setminus M) \cap (K \setminus N)$

(c) $K \setminus (M \cup N) = (K \setminus M) \cup (K \setminus N)$

(d) Falls Sie in Teil (b) oder (c) zu dem Schluß kommen, dass die Gleichung im Allgemeinen nicht gilt, dann geben Sie an, wie Sie die rechte Seite der Gleichung verändern müssen, damit die Gleichung richtig wird.

Aufgabe 5: Für eine endliche Menge M bezeichnet $card(M)$ die Anzahl der Elemente.

(a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $card(M \times M)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass für die Potenz-Menge 2^M gilt

$$card\big(2^M\big) = 2^{card(M)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

im Allgemeinen falsch ist.

(d) Können Sie die rechte Seite der Gleichung in Teil (c) so ändern, dass die Gleichung richtig wird?

(e) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $card(A \cup B \cup C)$ an.

Aufgabe 6: Auf der Menge der natürlichen Zahlen werde die Relation R als

$$R := \big\{ \langle n, 2 \cdot n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \big\}$$

definiert. Berechnen Sie den transitiven Abschluss der Relation R.

Aufgabe 7: Es sei M eine endliche Menge und

$$\Gamma : 2^M \rightarrow 2^M$$

sei eine Funktion, die Teilmengen von M in Teilmengen von M abbildet. Eine Funktion, die Mengen in Mengen abbildet, wird als *Operator* bezeichnet. Wir nennen den Operator *monoton*, wenn

$$\forall A, B \in 2^M : A \subseteq B \rightarrow \Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$$

gilt. Wir definieren induktiv eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen der Menge M wie folgt:

1. Induktions-Anfang: $n = 0$

   $$X_0 := \emptyset.$$

2. Induktions-Schritt: $n \mapsto n + 1$

   $$X_{n+1} := \Gamma(X_n)$$

Nehmen Sie im folgenden an, dass Γ monoton ist und bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n \subseteq X_{n+1}.$$

(b) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq k \rightarrow X_n = X_k$

Die Menge X_k definieren wir dann als den *Grenzwert* der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \to \infty} X_n := X_k.$$

(c) Zeigen Sie, dass es eine Menge $X \subseteq M$ gibt, so dass $\Gamma(X) = X$ gilt.

Eine Menge Y mit der Eigenschaft $\Gamma(Y) = Y$ heißt *Fixpunkt* des Operators Γ.

(d) Ist Y ein Fixpunkt des Operators Γ, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} X_n \subseteq Y.$$

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass auf einer endlichen Menge M jeder monotone Operator

$$\Gamma : 2^M \rightarrow 2^M$$

einen kleinsten Fixpunkt hat und gibt darüber hinaus ein Verfahren, um diesen Fixpunkt zu berechnen.