Aufgaben zur Mengenlehre mit Lösung

Aufgabe 1: Geben Sie die folgende Menge durch explizites Auflisten aller Elemente an:

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0\}.$$

Lösung: Es gilt

$$x^2 - 4 \cdot x + 3 = (x-1) \cdot (x-3) = 0 \quad \text{g.d.w.} \quad x = 1 \lor x = 3.$$

Also gilt

$$M = \{1, 3\}. \qquad \Box$$

Aufgabe 2: Geben Sie für die folgenden Mengen eine Definition in der Form

$$M := \{g(x) \mid F(x)\}$$

an. Dabei ist $g(x)$ ein Term und $F(x)$ ist eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn x ein Element der Menge M ist. Beispiel: Für die Menge

$$M := \{2, 4, 8, \cdots\}$$

lautet die Definition

$$M := \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \land n \geq 1\}.$$

Definieren Sie die folgenden Mengen in der oben gezeigten Form:

(a) $M_1 = \{5, 10, 15, \cdots\}$

(b) $M_2 = \{2, 4, 6, \cdots\} \cap \{3, 6, 9, \cdots\}$

(c) $M_3 = \{2, 4, 6, \cdots\} \cup \{3, 6, 9, \cdots\}$

(d) $M_4 = \{2, 4, 6, \cdots\} \setminus \{3, 6, 9, \cdots\}$

Lösung:

(a) $M_1 = \{5 \cdot n \mid n \in \mathbb{N} \land n \geq 1\}$

(b) $M_2 = \{6 \cdot n \mid n \in \mathbb{N} \land n \geq 1\}$

(c) $M_3 = \{n \mid n \in \mathbb{N} \ \land\ n \geq 1 \ \land\ (n \ \texttt{mod}\ 2 = 0 \ \lor\ n \ \texttt{mod}\ 3 = 0)\}$

(d) $M_4 = \{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N} \ \land\ n \geq 1 \ \land\ n \ \texttt{mod}\ 3 \neq 0\}$ $\Box$

Aufgabe 3: Es seien M und N Mengen und $R \subseteq M \times N$ sei eine binäre Relation. Für eine Menge $X \subseteq M$ ist der Ausdruck $R(X)$ wie folgt definiert:

$$R(X) := \{y \in N \mid \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in R\}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für beliebe Teilmengen $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ gilt

$$R(A \cap B) = R(A) \cap R(B).$$

(b) Für beliebe Teilmengen $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ gilt

$$R(A \cup B) = R(A) \cup R(B).$$

(c) Falls Sie in Teil (a) oder (b) dieser Aufgabe zu dem Schluß kommen, dass die Aussage nicht allgemeingültig ist, dann überlegen Sie, welche Eigenschaften die Relation R haben muß, damit die Aussage richtig wird.

Lösung:

(a) Die Aussage $R(A \cap B) = R(A) \cap R(B)$ ist im Allgemeinen falsch. Gegenbeispiel:

$$M = \{1, 2\}, \quad N = \{3\}, \quad R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}, \quad A = \{1\}, \quad B = \{2\}.$$

Dann gilt

$$R(A) = \{3\},\ R(B) = \{3\}, \quad \text{also} \quad R(A) \cap R(B) = \{3\},$$

aber wir haben

$$A \cap B = \emptyset, \quad \text{und folglich auch} \quad R(A \cap B) = \emptyset.$$

(b) Die Aussage $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ ist richtig:

$$\begin{aligned} R(A \cup B) &= \{y \in N \mid \exists x \in A \cup B : \langle x, y\rangle \in R\} \\ &= \{y \in N \mid (\exists x \in A : \langle x, y\rangle \in R) \vee (\exists x \in B : \langle x, y\rangle \in R)\} \\ &= \{y \in N \mid \exists x \in A : \langle x, y\rangle \in R\} \cup \{y \in N \mid \exists x \in B : \langle x, y\rangle \in R\} \\ &= R(A) \cup R(B) \end{aligned}$$

(c) Das Gegenbeispiel für die Gleichung $R(A \cap B) = R(A) \cap R(B)$ funktioniert nur deshalb, weil die Relation R dort nicht links-eindeutig ist. Falls R links-eindeutig ist, gilt

$$R(A \cap B) = R(A) \cap R(B)$$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass für alle $x \in M$

$$y \in R(A \cap B) \quad \text{g.d.w.} \quad y \in R(A) \cap R(B)$$

gilt. Wir nehmen zunächst $y \in R(A \cap B)$ an (und zeigen $y \in R(A) \cap R(B)$). Nach Definition von $R(A \cap B)$ heißt dass

$$\exists x \in A \cap B : \langle x, y\rangle \in R$$

Da dieses x dann sowohl in A als auch in B liegt, folgt

$$(\exists x \in A : \langle x, y\rangle \in R) \wedge (\exists x \in B : \langle x, y\rangle \in R)$$

Nach Definition von $R(X)$ heißt das

$$y \in R(A) \wedge y \in R(B), \quad \text{also } y \in R(A) \cap R(B).$$

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $y \in R(A) \cap R(B)$ gilt. Also gilt

$$y \in R(A) \quad \text{und} \quad y \in R(B).$$

Nach Definition von $R(X)$ heißt das

$$(\exists x_1 \in A : \langle x_1, y\rangle \in R) \ \wedge \ (\exists x_2 \in B : \langle x_2, y\rangle \in R).$$

An dieser Stelle kommt die Links-Eindeutigkeit zum tragen. Wenn sowohl $\langle x_1, y\rangle \in R$ als auch $\langle x_2, y\rangle \in R$ gilt, dann muss $x_1 = x_2$ sein. Setzen wir $x := x_1$, so gilt dann

$$x \in A \wedge x \in B \wedge \langle x, y\rangle \in R$$

Also haben wir

$$x \in A \cap B \wedge \langle x, y\rangle \in R.$$

Daraus folgt aber $y \in R(A \cap B)$. $\square$

Aufgabe 4: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $(K \setminus M) \setminus N = K \setminus (M \cup N)$

(b) $K \setminus (M \cap N) = (K \setminus M) \cap (K \setminus N)$

(c) $K \setminus (M \cup N) = (K \setminus M) \cup (K \setminus N)$

(d) Falls Sie in Teil (b) oder (c) zu dem Schluß kommen, dass die Gleichung im Allgemeinen nicht gilt, dann geben Sie an, wie Sie die rechte Seite der Gleichung verändern müssen, damit die Gleichung allgemeingültig wird.

Lösung:

(a) Diese Gleichung ist allgemeingültig:

$$\begin{array}{ll} & x \in (K \setminus M) \setminus N \\ \Leftrightarrow & x \in (K \setminus M) \wedge \neg x \in N \\ \Leftrightarrow & x \in K \wedge \neg x \in M \wedge \neg x \in N \\ \Leftrightarrow & x \in K \wedge \neg (x \in M \vee x \in N) \\ \Leftrightarrow & x \in K \wedge \neg (x \in M \cup N) \\ \Leftrightarrow & x \in K \setminus (M \cup N) \end{array}$$

(b) Diese Gleichung ist im Allgemeinen falsch. Gegenbeispiel:

$$K = \{1,2\},\ M = \{1\},\ N = \{2\}.$$

Dann gilt einerseits

$$\begin{array}{ll} & K \setminus (M \cap N) \\ = & \{1,2\} \setminus (\{1\} \cap \{2\}) \\ = & \{1,2\} \setminus \emptyset \\ = & \{1,2\} \end{array}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{array}{ll} & (K \setminus M) \cap (K \setminus N) \\ = & (\{1,2\} \setminus \{1\}) \cap (\{1,2\} \setminus \{2\}) \\ = & \{2\} \cap \{1\} \\ = & \emptyset \end{array}$$

Also haben wir

$$K \setminus (M \cap N) = \{1,2\} \neq \emptyset = (K \setminus M) \cap (K \setminus N).$$

(c) Auch diese Gleichung ist im Allgemeinen falsch. Gegenbeispiel:

$$K = \{1,2\},\ M = \{1\},\ N = \{2\}.$$

Dann gilt einerseits

$$\begin{array}{ll} & K \setminus (M \cup N) \\ = & \{1,2\} \setminus (\{1\} \cup \{2\}) \\ = & \{1,2\} \setminus \{1,2\} \\ = & \emptyset \end{array}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} & (K \setminus M) \cup (K \setminus N) \\ = \; & (\{1,2\} \setminus \{1\}) \cup (\{1,2\} \setminus \{2\}) \\ = \; & \{2\} \cup \{1\} \\ = \; & \{1,2\} \end{aligned}$$

Also haben wir

$$K \setminus (M \cup N) = \emptyset \neq \{1,2\} = (K \setminus M) \cup (K \setminus N).$$

(d) Die korrekte Form der Gleichungen lautet

$$K \setminus (M \cup N) = (K \setminus M) \cap (K \setminus N) \quad \text{und}$$
$$K \setminus (M \cap N) = (K \setminus M) \cup (K \setminus N).$$

Wir zeigen zunächst die erste dieser beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & x \in K \setminus (M \cup N) \\ \Leftrightarrow \; & x \in K \wedge \neg x \in M \cup N \\ \Leftrightarrow \; & x \in K \wedge \neg (x \in M \vee x \in N) \\ \Leftrightarrow \; & x \in K \wedge \neg x \in M \wedge \neg x \in N \\ \Leftrightarrow \; & (x \in K \wedge \neg x \in M) \wedge (x \in K \wedge \neg x \in N) \\ \Leftrightarrow \; & (x \in K \setminus M) \wedge (x \in K \setminus N) \\ \Leftrightarrow \; & x \in (K \setminus M) \cap (K \setminus N) \end{aligned}$$

Der Nachweis der zweiten Gleichung verläuft analog:

$$\begin{aligned} & x \in K \setminus (M \cap N) \\ \Leftrightarrow \; & x \in K \wedge \neg x \in M \cap N \\ \Leftrightarrow \; & x \in K \wedge \neg (x \in M \wedge x \in N) \\ \Leftrightarrow \; & x \in K \wedge (\neg x \in M \vee \neg x \in N) \\ \Leftrightarrow \; & (x \in K \wedge \neg x \in M) \vee (x \in K \wedge \neg x \in N) \\ \Leftrightarrow \; & (x \in K \setminus M) \vee (x \in K \setminus N) \\ \Leftrightarrow \; & x \in (K \setminus M) \cup (K \setminus N) \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Für eine endliche Menge M bezeichnet $card(M)$ die Anzahl der Elemente.

(a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $card(M \times M)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass für die Potenz-Menge 2^M gilt

$$card\big(2^M\big) = 2^{\mathtt{card}(M)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

im Allgemeinen falsch ist.

(d) Können Sie die rechte Seite der Gleichung in Teil (c) so ändern, dass die Gleichung richtig wird?

(e) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $card(A \cup B \cup C)$ an.

Lösung:

(a) Es gilt $card(M \times N) = card(M) \cdot card(N)$.

(b) Wir definieren $n := card(M)$ und zeigen die Behauptung durch Induktion nach der Zahl n der Elemente der Menge M.

I.A. $n = 0$: Dann gilt $M = \emptyset$. Wir haben

$$2^M = \{\emptyset\}$$

Also gilt

$$card(2^M) = card(\{\emptyset\}) = 1 = 2^0 = 2^{card(M)}$$

und damit stimmt die Behauptung in diesem Fall.

I.S. $n \mapsto n + 1$: Dann hat M die Form

$$M = K \cup \{x\} \quad \text{mit } card(K) = n.$$

Die Potenzmenge von M kann dann aus der Potenzmenge von K wie folgt gebildet werden:

$$2^M = 2^K \cup \bigl\{A \cup \{x\} \mid A \in 2^K\bigr\}$$

Damit sehen wir, dass die Potenzmenge von M aus zwei Teilen besteht: der erste Teil ist mit der Potenzmenge von K identisch, den zweiten Teil erhalten wir, wenn wir zu jeder Menge aus der Potenzmenge von K noch das Element x hinzufügen. Offenbar sind diese beiden Mengen einerseits gleichgroß und andererseits disjunkt. Daher gilt

$$card(2^M) = card(2^K) + card(2^K) = 2 \cdot card(2^K) \stackrel{IV}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

(c) Wir erhalten ein triviales Gegenbeispiel, wenn wir $A = \{1\} = B$ setzen, denn dann gilt

$$card(A \cup B) = card(\{1\}) = 1 \neq 1 + 1 = card(A) + card(B).$$

(d) Das Problem ist, dass in der Summe $card(A) + card(B)$ die Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen, doppelt gezählt werden. Das sind aber genau die Elemente aus dem Schnitt von A und B. Die Anzahl dieser Elemente muss also abgezogen werden. Damit lautet die korrekte Formel

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

(e) Die Formel lautet

$$\begin{aligned} card(A \cup B \cup C) \quad = \quad & card(A) + card(B) + card(B) \\ & - card(A \cap B) - card(A \cap B) - card(A \cap B) \\ & + card(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Entscheidend ist hier der Term $card(A \cap B \cap C)$. Er sorgt dafür, dass Elemente, die gleichzeitig in A, B und C auftreten, korrekt gezählt werden. □

Aufgabe 6: Auf der Menge der natürlichen Zahlen werde die Relation R als

$$R := \bigl\{\langle n, 2 \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\}$$

definiert. Berechnen Sie den transitiven Abschluss der Relation R.

Lösung: Wir zeigen zunächst durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass für alle positiven natürlichen Zahlen k folgendes gilt:

$$R^k = \bigl\{\langle n, 2^k \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\}$$

I.A. $k = 1$: Wegen

$$R^1 = R = \bigl\{\langle n, 2 \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\} = \bigl\{\langle n, 2^1 \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\}$$

ist die Behauptung in diesem Fall offensichtlich.

I.S. $k \mapsto k + 1$: In diesem Fall haben wir

$$\begin{array}{lcl}
R^{k+1} & = & R \circ R^k \\
 & \stackrel{IV}{=} & R \circ \bigl\{\langle n, 2^k \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\} \\
 & = & \bigl\{\langle m, 2 \cdot m\rangle \mid m \in \mathbb{N}\bigr\} \circ \bigl\{\langle n, 2^k \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\} \\
 & = & \bigl\{\langle m, 2^k \cdot (2 \cdot m)\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\} \\
 & = & \bigl\{\langle m, 2^{k+1} \cdot m\rangle \mid n \in \mathbb{N}\bigr\}
\end{array}$$

Wegen

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

hat die Relation R^+ dann die Form

$$R^+ = \bigl\{\langle n, 2^k \cdot n\rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 1\bigr\}. \qquad \Box$$

Aufgabe 7: Es sei M eine endliche Menge und

$$\Gamma : 2^M \to 2^M$$

sei eine Funktion, die Teilmengen von M in Teilmengen von M abbildet. Eine Funktion, die Mengen in Mengen abbildet, wird als *Operator* bezeichnet. Wir nennen den Operator *monoton*, wenn

$$\forall A, B \in 2^M : A \subseteq B \to \Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$$

gilt. Wir definieren induktiv eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen der Menge M wie folgt:

1. Induktions-Anfang: $n = 0$

$$X_0 := \emptyset.$$

2. Induktions-Schritt: $n \mapsto n + 1$

$$X_{n+1} := \Gamma(X_n)$$

Nehmen Sie im folgenden an, dass Γ monoton ist und bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n \subseteq X_{n+1}.$$

(b) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq k \to X_n = X_k$

Die Menge X_k definieren wir dann als den *Grenzwert* der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \to \infty} X_n := X_k.$$

(c) Zeigen Sie, dass es eine Menge $X \subseteq M$ gibt, so dass $\Gamma(X) = X$ gilt.

Eine Menge Y mit der Eigenschaft $\Gamma(Y) = Y$ heißt *Fixpunkt* des Operators Γ.

(d) Ist Y ein Fixpunkt des Operators Γ, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_n \subseteq Y.$$

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass auf einer endlichen Menge M jeder monotone Operator

$$\Gamma : 2^M \to 2^M$$

einen kleinsten Fixpunkt hat und gibt darüber hinaus ein Verfahren an, mit dem dieser Fixpunkt berechnet werden kann.

Lösung:

(a) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion n.

I.A. $n = 0$: Es gilt

$$\begin{aligned} & X_0 \subseteq X_1 \\ \Leftrightarrow \quad & \emptyset \subseteq X_1 \end{aligned}$$

Die letzte Behauptung ist offenbar richtig.

I.S. $n \mapsto n+1$: Zunächst wissen wir nach Induktions-Voraussetzung, dass

$$X_n \subseteq X_{n+1}$$

gilt. Aus der Monotonie des Operators Γ folgt dann

$$\Gamma(X_n) \subseteq \Gamma(X_{n+1})$$

Nach der Definition der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$X_{n+1} \subseteq X_{n+2}$$

und das ist genau die Behauptung für $n+1$.

(b) Nach Teil (a) wissen wir

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq M.$$

Da aus $A \subseteq B$ offenbar $\mathit{card}(A) \leq \mathit{card}(B)$ folgt, heißt das

$$\mathit{card}(X_0) \leq \mathit{card}(X_1) \leq \mathit{card}(X_2) \leq \cdots \leq \mathit{card}(X_n) \leq \mathit{card}(X_{n+1}) \leq \cdots \leq \mathit{card}(M)$$

Da M eine endliche Menge ist, kann nicht in allen Ungleichungen

$$\mathit{card}(X_n) \leq \mathit{card}(X_{n+1})$$

ein echtes Ungleichheitszeichen gelten. Wir definieren

$$k := \min\bigl\{n\in\mathbb{N} \mid \mathit{card}(X_n) = \mathit{card}(X_{n+1})\bigr\}$$

Da nun einerseits $\mathit{card}(X_k) = \mathit{card}(X_{k+1})$ und andererseits $X_k \subseteq X_{k+1}$ gilt, haben wir sogar

$$X_k = X_{k+1} = \Gamma(X_k).$$

Dann zeigt eine triviale Induktion, dass für alle $n \geq k$ ebenfalls

$$X_n = X_k$$

gilt.

(c) Nach Teil (b) haben wir

$$\Gamma(X_k) = X_{k+1} = X_k.$$

Damit ist X_k der gesuchte Fixpunkt.

(d) Wir zeigen durch Induktion über n, dass für alle $n\in\mathbb{N}$

$$X_n \subseteq Y$$

gilt. Daraus folgt dann die Behauptung, denn es gilt ja $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

I.A. $n = 0$: Wegen $X_0 = \emptyset$ ist dieser Fall trivial.

I.S. $n \mapsto n+1$: Nach Induktions-Voraussetzung wissen wir

$$X_n \subseteq Y.$$

Aufgrund der Monotonie des Operators Γ folgt daraus

$$\Gamma(X_n) \subseteq \Gamma(Y).$$

Nach Definition der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\Gamma(X_n) = X_{n+1}$ und da Y ein Fixpunkt von Γ ist, gilt $\Gamma(Y) = Y$. Also haben wir

$$X_{n+1} \subseteq Y$$

und das war zu zeigen. $\square$