Prädikatenlogik — Normalformen

Definition: Σ-Formeln f und g *äquivalent* g.d.w.

$$\models f \leftrightarrow g$$

Beispiele:

1. $\models (\neg\forall x : f) \leftrightarrow (\exists x : \neg f)$
2. $\models (\neg\exists x : f) \leftrightarrow (\forall x : \neg f)$
3. $\models (\forall x : f) \land (\forall x : g) \leftrightarrow (\forall x : f \land g)$
4. $\models (\exists x : f) \lor (\exists x : g) \leftrightarrow (\exists x : f \lor g)$
5. $\models (\forall x : \forall y : f) \leftrightarrow (\forall y : \forall x : f)$
6. $\models (\exists x : \exists y : f) \leftrightarrow (\exists y : \exists x : f)$
7. Falls $x \notin \mathit{FV}(f)$, gilt
   (a) $\models (\forall x : f) \leftrightarrow f$
   (b) $\models (\exists x : f) \leftrightarrow f$.
   (c) $\models (\forall x : g) \lor f \leftrightarrow (\forall x : g \lor f)$
   (d) $\models f \lor (\forall x : g) \leftrightarrow (\forall x : f \lor g)$
   (e) $\models (\exists x : g) \land f \leftrightarrow (\exists x : g \land f)$
   (f) $\models f \land (\exists x : g) \leftrightarrow (\exists x : f \land g)$

Pränexe Normalform

Definition: f hat pränexe Normalform g.d.w.

$$f = \mathcal{Q}_1 x_1 \cdots \mathcal{Q}_n x_n : g$$

mit $\mathcal{Q} \in \{\forall, \exists\}$ und g quantorenfrei.

Beispiel:

$$\forall x : \exists y : x * y = 1$$

Negatives Beispiel: Sei f quantorenfrei

$$(\forall x : f) \rightarrow (\exists y : f)$$

ist <u>nicht</u> in pränexer Normalform

Definition: (Substitution) Sei

1. x Variable
2. t Term
3. f Formel

$$f[x/t] := x \text{ wird überall in } f \text{ durch } t \text{ ersetzt}$$

Beispiele:

$$\Big(\neg \mathit{empty}(\mathit{push}(x_1, s_1))\Big)[x_1/x_3] \;=\; \neg \mathit{empty}(\mathit{push}(x_3, s_1))$$

$$\Big(\mathit{empty}(s_1)\Big)[s_1/\mathit{push}(x, s_2)] \;=\; \mathit{empty}(\mathit{push}(x, s_2))$$

Umformung in pränexe Normalform

Verfahren zur Umformung in pränexe Normalform

1. Beseitige "$\leftrightarrow$" und "$\rightarrow$"
2. Schiebe Negationen nach innen:
   (a) $\neg\Big(\forall x : f\Big) \quad \leadsto \quad \exists x : \neg f$
   (b) $\neg\Big(\exists x : f\Big) \quad \leadsto \quad \forall x : \neg f$
3. Schiebe Konjunktionen nach innen:
   (a) $\Big(\forall x : f\Big) \wedge \Big(\forall x : g\Big) \quad \leadsto \quad \Big(\forall x : f \wedge g\Big)$
   (b) $\Big(\exists x : f\Big) \wedge g \quad \leadsto \quad \Big(\exists x : f \wedge g\Big)$
   falls $x \notin \mathit{FV}(g) \cup \mathit{BV}(g)$
4. Schiebe Disjunktionen nach innen:
   (a) $\Big(\exists x : f\Big) \vee \Big(\exists x : g\Big) \quad \leadsto \quad \Big(\exists x : f \vee g\Big)$
   (b) $\Big(\forall x : f\Big) \vee g \quad \leadsto \quad \Big(\forall x : f \vee g\Big)$
   falls $x \notin \mathit{FV}(g) \cup \mathit{BV}(g)$
5. Umbenennung: Sei $y \notin \mathit{FV}(f) \cup \mathit{BV}(f)$
   (a) $\forall x : f \quad \leadsto \quad \forall y : f[x/y]$
   (b) $\exists x : f \quad \leadsto \quad \exists y : f[x/y]$

Erfüllbarkeits-Äquivalenz

Gegeben: Formeln f und g

Definition: f und g *erfüllbarkeits-äquivalent* g.d.w.

1. f, g beide erfüllbar oder
2. f, g beide unerfüllbar.

Schreibweise: $f \approx_e g$.

Beispiel: Es sei

1. $p \in \mathcal{P}$ mit *arity*$(p) = 2$.
2. $s \in \mathcal{F}$ mit *arity*$(s) = 1$.

Dann gilt:

$$\Big(\forall x : \exists y : p(x, y)\Big) \;\approx_e\; \Big(\forall x : p(x, s(x))\Big)$$

Bemerkung: Falls $f \approx_e g$ ist, so gilt häufig

1. f ist Σ_1-Formel,
2. g ist Σ_2-Formel und
3. Σ_2 ist *Erweiterung* von Σ_1.
   (Σ_2 enthält mehr Funktions-Zeichen als Σ_1)

Skolemisierung

Satz: Sei

1. $\Sigma = \langle \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathit{arity} \rangle$ Signatur,
2. $s \notin \mathcal{F}$ neues Funktions-Zeichen,
3. $\Sigma' = \langle \mathcal{V}, \mathcal{F} \cup \{s\}, \mathcal{P}, \mathit{arity}' \rangle$
   mit $\mathit{arity}'(s) = n$ und $\mathit{arity}'(f) = \mathit{arity}(f)$ für $f \in \mathcal{F}$.
4. f und h seien Σ–Formeln.

Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & \Big(\forall x_1, \cdots, x_n : \exists y : f\Big) \wedge h \\ \approx_e & \Big(\forall x_1, \cdots, x_n : f[y/s(x_1, \cdots, x_n)]\Big) \wedge h. \end{array}$$

Das neue Funktions–Zeichen s heißt
Skolem–Funktions–Zeichen.

Beispiel: Gruppentheorie

$$\Big(\forall x_1 : \exists x_2 : x_2 * x_1 = 1\Big) \approx_e \Big(\forall x_1 : i(x_1) * x_1 = e\Big)$$

Skolem–Funktions–Zeichen: i

Überführung in Skolem–Normalform

Gegeben: $f \in \mathcal{F}$

Ziel: Überführung von f in Skolem–Normalform

Vorgehen:

1. Überführe f in pränexe Normalform:
   $$f \leftrightarrow \mathcal{Q}_1 x_1 : \cdots \mathcal{Q}_l x_l : g$$
   mit $\mathcal{Q} \in \{\forall, \exists\}$ und g quantorenfrei.

2. Falls f die Form
   $$\Big(\forall x_1 : \cdots \forall x_n : \exists y : h\Big)$$
   hat, dann
   (a) wähle neues Funktions–Zeichen s mit
   $$\mathit{arity}(s) = n,$$
   (b) ersetze y in h durch $s(x_1, \cdots, x_n)$.

   Resultat:
   $$f \approx_e \forall x_1 : \cdots \forall x_n : h[y/s(x_1, \cdots, x_n)].$$

3. Führe Schritt 2 solange durch, bis alle Auftreten von "$\exists$" eleminiert sind.

Ergebnis: $f \approx_e \forall z_1 : \cdots \forall z_m : k$

mit k quantorenfrei.

Klausel–Normalform

Gegeben: $f = \forall z_1 : \cdots \forall z_m : g$

mit k quantorenfrei.

Ziel: Überführe f in Klausel–Normalform

Vorgehen:

1. Bringe g in konjunktive Normalform:

   $$g \leftrightarrow k_1 \wedge \cdots \wedge k_n$$

   mit $\quad k_i = l_1^{(i)} \vee \cdots \vee l_{m(i)}^{(i)}$

   und $\quad l_j^{(i)}$ Literal.

   Literal: $p(s_1, \cdots, s_l)$ oder $\neg p(s_1, \cdots, s_l)$.

2. Verteile Allquantoren auf k_i:

   $$\Big(\forall x : k_1 \wedge k_2\Big) \quad \leftrightarrow \quad \Big(\forall x : k_1\Big) \wedge \Big(\forall x : k_2\Big)$$

3. Beseitige redundante Allquantoren:

   $$\Big(\forall x : f\Big) \quad \leftrightarrow \quad f \qquad \text{falls } x \notin \mathit{FV}(f).$$

Ergebnis: $f \leftrightarrow \forall(k_1) \wedge \cdots \wedge \forall(k_n)$

Definition: Sei $\{x_1, \cdots, x_n\} := \mathit{FV}(f)$.

$$\forall(f) := \forall x_1 : \forall x_2 : \cdots \forall x_n : f$$

Gegeben: $M \subseteq \mathbb{F}_\Sigma$ und $f \in \mathbb{F}_\Sigma$

Frage: Gilt $M \models f$?.

Vorgehen:

1. Setze $N := M \cup \{\neg f\}$. Dann:
$$M \models f \quad \text{g.d.w.} \quad N \models \bot.$$

2. Sei $N = \{g_1, \cdots, g_n\}$.
   (a) Überführe $g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$ in Skolem–Normalform h
   $$g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \approx_e h$$
   (b) Überführe h in in Klausel–Normalform $k_1 \wedge \cdots \wedge k_m$.
   $$h \leftrightarrow k_1 \wedge \cdots \wedge k_m$$

   Jetzt gilt: $N \models \bot$ g.d.w. $\{k_1, \cdots, k_m\} \models \bot$

3. Überprüfe, ob $\{k_1, \cdots, k_m\} \vdash \bot$ gilt.
   Dabei ist "$\vdash$" der *Robinson–Kalkül*. Es gilt:
$$\begin{aligned} & \{k_1, \cdots, k_m\} \vdash \bot \\ \text{g.d.w.} \quad & \{k_1, \cdots, k_m\} \models \bot \\ \text{g.d.w.} \quad & M \models f. \end{aligned}$$

Fehlt noch: Definition des Robinson–Kalküls für Formeln in Klausel–Normalform

Skolem-Normal-Form (Beispiel)

Zeige, das gilt:

$$\models (\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \rightarrow (\forall y\colon \exists x\colon p(x,y))$$

Dies ist äquivalent zu

$$\Big\{\neg\Big((\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \rightarrow (\forall y\colon \exists x\colon p(x,y))\Big)\Big\} \models \bot$$

Berechnung der pränexen NF:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg\Big((\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \rightarrow (\forall y\colon \exists x\colon p(x,y))\Big) \\
\leftrightarrow & \neg\Big(\neg(\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \vee (\forall y\colon \exists x\colon p(x,y))\Big) \\
\leftrightarrow & (\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \wedge \neg(\forall y\colon \exists x\colon p(x,y)) \\
\leftrightarrow & (\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \wedge (\exists y\colon \neg\exists x\colon p(x,y)) \\
\leftrightarrow & (\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \wedge (\exists y\colon \forall x\colon \neg p(x,y)) \\
\leftrightarrow & \exists v\colon \Big((\exists x\colon \forall y\colon p(x,y)) \wedge (\forall u\colon \neg p(u,v))\Big) \\
\leftrightarrow & \exists v\colon \exists x\colon \Big((\forall y\colon p(x,y)) \wedge (\forall u\colon \neg p(u,v))\Big) \\
\leftrightarrow & \exists v\colon \exists x\colon \forall y\colon \Big(p(x,y) \wedge (\forall u\colon \neg p(u,v))\Big) \\
\leftrightarrow & \exists v\colon \exists x\colon \forall y\colon \forall u\colon \Big(p(x,y) \wedge \neg p(u,v)\Big) \\
\approx_e & \exists x\colon \forall y\colon \forall u\colon \Big(p(x,y) \wedge \neg p(u,s_1)\Big) \\
\approx_e & \forall y\colon \forall u\colon \Big(p(s_2,y) \wedge \neg p(u,s_1)\Big) \\
\leftrightarrow & p(s_2,y) \wedge \neg p(u,s_1) \\
\leftrightarrow & \Big\{\{p(s_2,y)\}, \{\neg p(u,s_1)\}\Big\}
\end{array}$$