Definition: Gegeben sei Signatur

$$\Sigma = \langle \mathbb{T}, \mathit{Fz}, \mathit{Pz}, \mathtt{sign}_F, \mathtt{sign}_P, \mathcal{V}, \mathit{var} \rangle$$

Σ–Substitution: endliche Menge von Paaren der Art

$$\sigma = \Big\{ \langle x_1, t_1 \rangle, \cdots, \langle x_n, t_n \rangle \Big\}.$$

mit

1. $x_i \in \mathcal{V}$ für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$
   Die x_i sind Variablen.

2. $x_i \in \mathit{var}(\tau) \Rightarrow t_i \in \mathcal{T}_\tau$ für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$
   Die Terme t_i haben den gleichen Typ wie x_i.

3. $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$
   Die x_i sind paarweise verschieden.

Schreibweise:

$$\sigma = [x_1 \mapsto t_1, \cdots, x_n \mapsto t_n].$$

Definition: *Domain* von σ

$$\mathit{dom}(\sigma) := \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

Substitutions–Anwendung

Gegeben:

1. t: Term
2. $\sigma = [x_1 \mapsto s_1, \cdots, x_n \mapsto s_n]$: Substitution

Anwendung von σ auf t:

Ersetze x_i durch s_i.

Induktive Definition: $t\sigma$ (*Anwendung* von σ auf t)

1. t ist Variable:
   (a) $x_i\sigma := s_i$.
   (b) $y\sigma := y$, falls $y \in \mathcal{V}$, aber $y \notin \{x_1, \cdots, x_n\}$.
2. $f(t_1, \cdots, t_n)\sigma := f(t_1\sigma, \cdots, t_n\sigma)$.

Sei $p(t_1, \cdots, t_n)$ atomare Formel

$$p(t_1, \cdots, t_n)\sigma := p(t_1\sigma, \cdots, t_n\sigma).$$

Sei f quantorenfreie Formel.

Induktive Definition von $f\sigma$

1. $(\neg f)\sigma := \neg(f\sigma)$.
2. $(f_1 \wedge f_2)\sigma := f_1\sigma \wedge f_2\sigma$.
3. $(f_1 \vee f_2)\sigma := f_1\sigma \vee f_2\sigma$.

Komposition von Substitutionen

Gegeben:

1. $\sigma = [x_1 \mapsto s_1, \cdots, x_m \mapsto s_m]$
2. $\tau = [y_1 \mapsto t_1, \cdots, y_n \mapsto t_n]$
3. $\mathit{dom}(\sigma) \cap \mathit{dom}(\tau) = \emptyset$

Definition: $\sigma\tau$ (*Komposition* von σ und τ)

$$\sigma\tau := [x_1 \mapsto s_1\tau, \cdots, x_m \mapsto s_m\tau,\ y_1 \mapsto t_1, \cdots, y_n \mapsto t_n]$$

Satz: Gegeben

1. t: Term
2. σ, τ: Substitutionen

Dann gilt: $(t\sigma)\tau = t(\sigma\tau)$

Definition: Gegeben

1. s, t: Terme vom selben Typ, oder
2. s, t: atomare Formeln.

Dann ist $s \doteq t$ eine *syntaktische Gleichung*.

$$E = \{s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n\}$$

heißt *syntaktisches Gleichungssystem*

Unifikator

Gegeben:

1. Syntaktisches Gleichungssystem
$$E = \{s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n\},$$
2. Substitution σ.

Definition: σ ist *Unifikator* von E g.d.w.
$s_i\sigma = t_i\sigma$ für alle $i = 1, \cdots, n$.

Beobachtung: Sei

1. E: syntaktisches Gleichungssystem,
2. σ: Substitution
3. σ sei Unifikator von E,
4. τ: Substitution mit $dom(\tau) \cap dom(\sigma) = \emptyset$

Behauptung: $\sigma\tau$ Unifikator von E

Definition: Unifikator σ ist *allgemeiner* als Unifikator $\sigma\tau$.

Signatur Σ_{Stack} für Stacks

$\Sigma_{Stack} := \langle \mathbb{T}, Fz, Pz, \mathtt{sign}_F, \mathtt{sign}_P, \mathcal{V}, var \rangle$

1. $\mathbb{T} := \{\mathbb{B}, \mathbb{N}, Stack\}$
2. $Fz := \{0, s, nil, push, pop, top\}$
3. $Pz := \{empty, =_O, =_S\}$

   Typ–Spezifikationen:

   (a) $0 : \mathbb{N}$

   (b) $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

   Interpretation: $s(n) = n + 1$

   (c) $nil : Stack$

   (d) $push : \mathbb{N} \times Stack \rightarrow Stack$

   (e) $pop : Stack \rightarrow Stack$

   (f) $top : Stack \rightarrow \mathbb{N}$

   (g) $empty : Stack \rightarrow \mathbb{B}$

   (h) $=_O : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$

   (i) $=_S : Stack \times Stack \rightarrow \mathbb{B}$

4. $\mathcal{V} := \{x_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{s_i | i \in \mathbb{N}\}$.
5. $var(\mathbb{N}) := \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$.
6. $var(Stack) := \{s_i | i \in \mathbb{N}\}$.

Lösung syntaktischer Gleichungen

Definition: Ein Gleichungssystem der Form

$$\{x_1 \doteq t_1, \cdots, x_n \doteq t_n\}$$

ist *trivial* g.d.w.

1. $x_i \in \mathcal{V}$ für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$,
2. $x_i \notin \mathit{var}(t_j)$ für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ und
3. $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Satz: Sei $E := \{x_1 \doteq t_1, \cdots, x_n \doteq t_n\}$ trivial.
Dann ist $\sigma := [x_1 \mapsto t_1, \cdots, x_n \mapsto t_n]$ Lösung von E.
Dann **definiere**: $\mathit{Subst}(E) := \sigma$

Definition: Eine syntaktische Gleichung e ist

offensichlich unlösbar

falls einer der folgenden Fälle vorliegt:

1. $e = (x \doteq t)$ mit $t \neq x$ und $x \in \mathit{Var}(t)$
2. $e = (\, g(s_1, \cdots, s_m) \doteq f(t_1, \cdots, t_n)\,)$ mit $f \neq g$.

Satz: Sei

1. $s \doteq t$ offensichlich unlösbar und
2. σ beliebige Substitution.

Dann gilt: $s\sigma \neq t\sigma$.

Martelli–Montanari–Regeln

1. Falls $y \in \mathcal{V}$ mit $y \notin \mathit{Var}(t)$:
$$\langle E \cup \{y \doteq t\}, \sigma\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle E[y \mapsto t], \sigma[y \mapsto t]\rangle$$
2. Falls $y \in \mathcal{V}$ mit $y \in \mathit{Var}(t)$:
$$\langle E \cup \{y \doteq t\},\ \sigma\rangle \ \rightsquigarrow\ \Omega.$$
3. Falls $y \in \mathcal{V}$ und $t \notin \mathcal{V}$:
$$\langle E \cup \{t \doteq y\}, \sigma\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle E \cup \{y \doteq t\}, \sigma\rangle.$$
4. Falls $x \in \mathcal{V}$:
$$\langle E \cup \{x \doteq x\}, \sigma\rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle E, \sigma\rangle.$$
5. Falls f n-stelliges Funktions-Zeichen:
$$\begin{aligned} & \langle E \cup \{f(s_1, \cdots, s_n) \doteq f(t_1, \cdots, t_n)\}, \sigma\rangle \\ \rightsquigarrow \quad & \langle E \cup \{s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n\}, \sigma\rangle. \end{aligned}$$
6. Falls $f \neq g$;
$$\langle E \cup \{f(s_1, \cdots, s_m) \doteq g(t_1, \cdots, t_n)\}, \sigma\rangle \ \rightsquigarrow\ \Omega.$$

Eigenschaften der Martelli–Montanari–Regeln

Satz: Invariante

Vor.: $\langle E_1, F_2 \rangle \leadsto \langle E_2, F_2 \rangle$

Beh: σ löst $E_1 \cup F_1$ g.d.w.
σ löst $E_2 \cup F_2$.

Satz: Terminierung

Beh.: Es gibt keine unendliche Folge $\langle E_n, F_n \rangle$ mit
$\langle E_n, F_n \rangle \leadsto \langle E_{n+1}, F_{n+1} \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition: $\langle E_1, F_1 \rangle$ ist *maximal reduziert* g.d.w.
es gibt kein $\langle E_2, F_2 \rangle$ mit

$$\langle E_1, F_1 \rangle \leadsto \langle E_2, F_2 \rangle$$

Satz: Sei $E_1 := E$, $F_1 := \emptyset$

1. $\langle E_1, F_1 \rangle \leadsto \langle E_2, F_2 \rangle \leadsto \cdots \leadsto \langle E_n, F_n \rangle$
2. $\langle E_n, F_n \rangle$ maximal reduziert

Dann gilt $E_n = \emptyset$ und entweder

1. F_n trivial und *Subst*(F_n) Lösung von E oder
2. F_n offensichlich unlösbar und E unlösbar.