Matière non-exhaustive pour l'examen du cours de Modélisation et Simulation

Théo Verhelst

31 décembre 2016

1 Introduction

Ce document reprend les questions/définitions listées par Mr. Bontempi comme étant des questions potentielles à son examen oral, et y répond à partir des définitions du syllabus.

Note : Toutes les définitions ne sont pas explicitées formellement, car Mr. Bontempi m'a assuré que seul la compréhension des concepts est évaluée, pas la restitution pure des définitions.

Note : Les variables et conventions de notations utilisées sont basées sur celles du syllabus.

2 Définitions

Propriétés de la fonction de transition :

— *Consistance :* Si l'état du système au temps t est x, la fonction de transition à l'instant t doit donner x.

$$\varphi(t, t, x, u(\cdot)) = x \quad \forall t \in T, x \in X, u(\cdot) \in \Omega$$

— *Irreversibilité :* φ est définie pour tout $t \geq t_0, t \in T$

— *Composition :* Si l'entrée $u(\cdot)$ fait évoluer l'état de x_0 à $\varphi(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))$ durant $[t_0, t_2]$ en passant par $x(t_1)$, alors la même entrée fera passer l'état de $x(t_1)$ à $\varphi(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))$ durant $[t_1, t_2]$.

— *Causalité :* Si deux fonction d'entrées sont identiques sur un intervalles, elles auront le même effet dans cette intervalle sur un système donné pour un état initial donné.

Accessibilité :

Un état x_2 est *accessible* à l'instant t_2 à partir d'un état x_1 si $\exists\, t_1, u(\cdot)$ tels que

$$\varphi(t_2, t_1, x_1, u(\cdot)) = x_2$$

Observabilité :

Notions de stabilité :

Un système est dit *stable* si une petite perturbation de son état initial n'induit pas une grande perturbation de son comportement au cours du temps.

Plus formellement, un mouvement avec une condition initiale $\bar{x}$ est stable si pour tout voisinage V_ϵ de ce mouvement, on peut trouver une condition initale proche de $\bar{x}$ telle que le mouvement partant de cette condition initiale perturbée reste dans le voisinage V_ϵ.

Critère de stabilité de Liapounov :

Soit un système à temps continu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

où le vecteur de fonctions $f(\cdot, \cdot)$ est continu ainsi que ses dérivées partielles.

Soit $\bar{x}$ un état d'équilibre pour la fonction d'entrée constante $\bar{u}$.

— *Critère de stabilité de Liapounov :* S'il existe une fonction $V(\cdot)$ continue (et que ses dérivées partielles sont également continues), qui soit définie positive en $\bar{x}$ et telle que la fonction

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) = \Delta V(x) f(x, \bar{u})$$

où

$$\Delta V(x) = [\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}]$$

soit semi-définie négative en $\bar{x}$, alors $\bar{x}$ est un état d'équilibre stable.

— *Critère de stabilité asymptotique de Liapounov :* Si le critère de stabilité de Liapounov est satisfait et que $\dot{V}(\cdot)$ est définie positive (et non uniquement semi-définie positive) en $\bar{x}$, alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.
— *Critère d'instabilité de Liapounov :* Soit $V(\cdot)$ une fonction continue (dont les dérivées partielles sont également continues) dans un voisinage de $\bar{x}$. Soit $V(\bar{x}) = 0$ et positive dans un voisinage arbitrairement petit de $\bar{x}$. Si $V(\cdot) = \Delta V(x)f$ est définie positive en $\bar{x}$, alors l'état d'équilibre en $\bar{x}$ est instable.

Propriétés des systèmes linéaires continus :
Définissons d'abord deux notions sur les mouvements :
— Le *mouvement libre* est obtenu quand la fonction d'entrée est nulle ($u(\cdot) = 0$).
— Le *mouvement forcé* est obtenu quand la l'état initial est nul ($x(t_0) = 0$).
Un système linéaire jouit des propriétés suivantes :
— Tout mouvement est la somme des mouvements libre et forcés correspondants.
— Si l'état initial x_0 est une combinaison linéaire $ax_{01} + bx_{02}$ de deux états initiaux, alors le mouvemement libre correspondant est la même combinaison linéaire des deux mouvemements libres correspondant à x_{01} et x_{02}.
— Si la fonction d'entrée $u(\cdot)$ est une combinaison linéaire $au_1(\cdot) + bu_2(\cdot)$ de deux fonctions d'entrée, alors le mouvemement forcé correspondant est la même combinaison linéaire des deux mouvemements forcés correspondant à $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$.
— La transformation de sortie η est une fonction linéaire.

Relation entre stabilité et le critère de Hurwitz :
Satisfaire le critère de Hurwitz est équivalent à prouver que le système est asymptotiquement stable.
Le citère de Hurwitz se formulle comme suit :
Soit le système linéaire invariant et autonome

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

et soit

$$\Delta_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i}$$

son polynôme caractéristique. Posons

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a1 & 1 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

où $a_{n+i} = 0 \forall i > 0$.
Le critère de Hurwitz est satisfait si tous les mineurs principaux de H sont positifs.

Principe de superposition des effets dans le cas d'un système linéaire du second ordre :
Attention ! Je ne suis pas sûre que ce théorème corresponde à cette définition !
Soit le système

$$\dot{x} = Ax$$

et $x^{(1)}(t) \in \mathbb{R}$ $x^{(2)}(t) \in \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de ce système.

$$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

c_1 et c_2 sont déterminés en fonction des condition initiales.

Classifier la stabilité des systèmes de seconde ordre par rapport à la matrice des coefficients
Soit le système

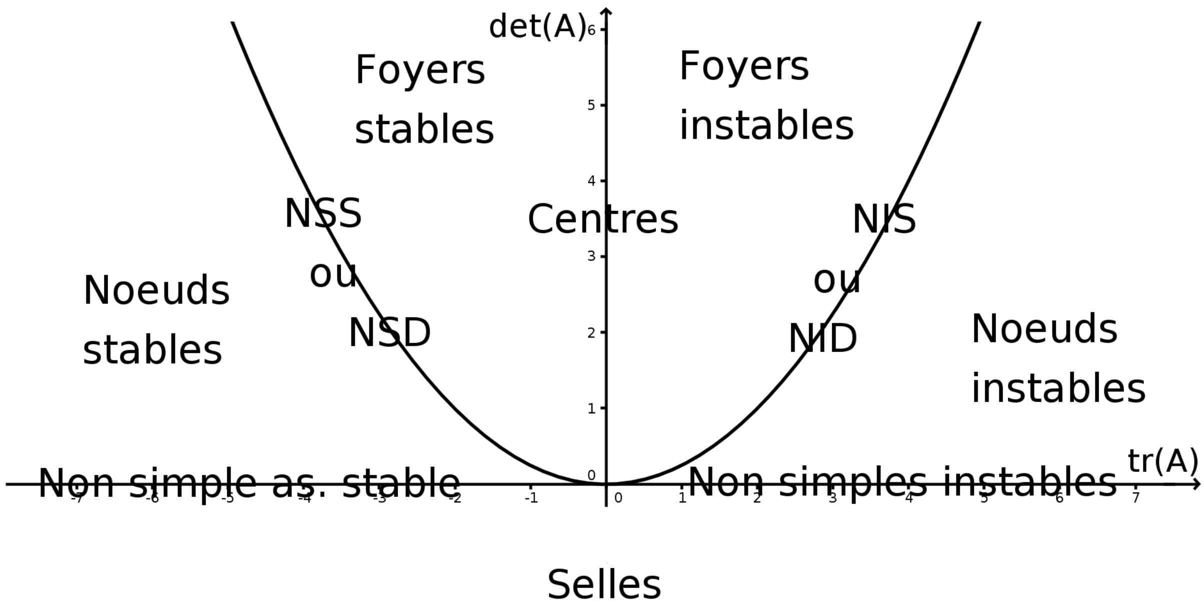
$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On a

$$tr(A) = a_{11} + a_{22}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

On peut classer les systèmes en fonction de leur trace et de leur déterminant :



NSS : noeuds stables singuliers

NSD : noeuds stables dégénérés

NIS : noeuds instables singuliers

NID : noeuds instables dégénérés

La parabole des noeuds singuliers ou dégénérés est d'équation

$$det(A) = \frac{(tr(A))^2}{4}$$

Relation entre linéarisation et stabilité :

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, u)$$

avec un point d'équilibre $\bar{x}$ et sa linéarisation en $\bar{x}, \bar{u}$

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} u = Ax + Bu$$

— Si le système linéarisé est asymptotiquement stable (c'est-à-dire toutes les valeurs propres de A sont négatives), alors l'état d'équilibre $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.

— Si la matrice A du système linéarisé a une ou plusieurs valeurs propres avec partie réelle positive, alors l'état d'équilibre $\bar{x}$ du système est instable.

Notion de diagramme de bifurcation :

Cycle limite :

Dimensionnalité d'un ensemble fractal :

Système chatoique :

Équation caractéristique et solutions d'un système linéaire à temps discret :

Étude graphique d'une équation linéaire affine à un pas :

Relation entre linéarisation et stabilité :

Diagramme de bifurcation de la fonction logistique :

Composantes d'un algorithme Monte Carlo :

Propriétés d'un générateur de nombre pseudo-aléatoires uniformes :

Méthode de la transformation inverse :