Matière non-exhaustive pour l'examen du cours de Modélisation et Simulation

Théo Verhelst

1er janvier 2017

1 Introduction

Ce document reprend les questions/définitions listées par Mr. Bontempi comme étant des questions potentielles à son examen oral, et y répond à partir du contenu du syllabus.

Note : Toutes les définitions ne sont pas explicitées formellement, car Mr. Bontempi m'a assuré que seul la compréhension des concepts est évaluée, pas la restitution pure des définitions.

Note 2 : Les variables et conventions de notation utilisées sont basées sur celles du syllabus.

2 Définitions

Propriétés de la fonction de transition :

- *Consistance :* Si l'état du système au temps t est x, la fonction de transition à l'instant t doit donner x.
$$\varphi(t, t, x, u(\cdot)) = x \quad \forall t \in T, x \in X, u(\cdot) \in \Omega$$
- *Irreversibilité :* φ est définie pour tout $t \geq t_0, t \in T$
- *Composition :* Si l'entrée $u(\cdot)$ fait évoluer l'état de x_0 à $\varphi(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))$ durant $[t_0, t_2]$ en passant par $x(t_1)$, alors la même entrée fera passer l'état de $x(t_1)$ à $\varphi(t_2, t_0, x_0, u(\cdot))$ durant $[t_1, t_2]$.
- *Causalité :* Si deux fonction d'entrées sont identiques sur un intervalles, elles auront le même effet dans cette intervalle sur un système donné pour un état initial donné.

Accessibilité :

Un état x_2 est *accessible* à l'instant t_2 à partir d'un état x_1 si $\exists\, t_1, u(\cdot)$ tels que

$$\varphi(t_2, t_1, x_1, u(\cdot)) = x_2$$

Observabilité :

Notions de stabilité :

Un système est dit *stable* si une petite perturbation de son état initial n'induit pas une grande perturbation de son comportement au cours du temps.
Plus formellement, un mouvement avec une condition initiale $\bar{x}$ est stable si pour tout voisinage V_ϵ de ce mouvement, on peut trouver une condition initale proche de $\bar{x}$ telle que le mouvement partant de cette condition initiale perturbée reste dans le voisinage V_ϵ.

Critère de stabilité de Liapounov :

Soit un système à temps continu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

où le vecteur de fonctions $f(\cdot, \cdot)$ est continu ainsi que ses dérivées partielles.
Soit $\bar{x}$ un état d'équilibre pour la fonction d'entrée constante $\bar{u}$.

- *Critère de stabilité de Liapounov :* S'il existe une fonction $V(\cdot)$ continue (et que ses dérivées partielles sont également continues), qui soit définie positive en $\bar{x}$ et telle que la fonction
$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) = \Delta V(x) f(x, \bar{u})$$
où
$$\Delta V(x) = [\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}]$$
soit semi-définie négative en $\bar{x}$, alors $\bar{x}$ est un état d'équilibre stable.

— *Critère de stabilité asymptotique de Liapounov :* Si le critère de stabilité de Liapounov est satisfait et que $\dot{V}(\cdot)$ est définie négative (et non uniquement semi-définie négative) en $\bar{x}$, alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.
Une telle fonction V est appelée fonction de Liapounov.
— *Critère d'instabilité de Liapounov :* Même restrictions que pour le critère de stabilité de Liapounov, si ce n'est que $\dot{V}(\cdot)$ doit être définie positive, et non (semi-)définie négative. Si c'est le cas, alors $\bar{x}$ est un état d'équilibre instable.

Propriétés des systèmes linéaires continus :
Définissons d'abord deux notions sur les mouvements :
— Le *mouvement libre* est obtenu quand la fonction d'entrée est nulle ($u(\cdot) = 0$).
— Le *mouvement forcé* est obtenu quand la l'état initial est nul ($x(t_0) = 0$).
Un système linéaire jouit des propriétés suivantes :
— Tout mouvement est la somme des mouvements libre et forcés correspondants.
— Si l'état initial x_0 est une combinaison linéaire $ax_{01} + bx_{02}$ de deux états initiaux, alors le mouvemement libre correspondant est la même combinaison linéaire des deux mouvemements libres correspondant à x_{01} et x_{02}.
— Si la fonction d'entrée $u(\cdot)$ est une combinaison linéaire $au_1(\cdot) + bu_2(\cdot)$ de deux fonctions d'entrée, alors le mouvemement forcé correspondant est la même combinaison linéaire des deux mouvemements forcés correspondant à $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$.
— La transformation de sortie η est une fonction linéaire.

Relation entre stabilité et le critère de Hurwitz :
Satisfaire le critère de Hurwitz est équivalent à prouver que le système est asymptotiquement stable.
Le citère de Hurwitz se formulle comme suit :
Soit le système linéaire invariant et autonome

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

et soit

$$\Delta_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i}$$

son polynôme caractéristique. Posons

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a1 & 1 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

où $a_{n+i} = 0 \forall i > 0$.
Le critère de Hurwitz est satisfait si tous les mineurs principaux de H sont positifs.

Principe de superposition des effets dans le cas d'un système linéaire du second ordre :
Attention ! Je ne suis pas sûre que ce théorème corresponde à cette définition !
Soit le système

$$\dot{x} = Ax$$

et $x^{(1)}(t) \in \mathbb{R}$ $x^{(2)}(t) \in \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de ce système.

$$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ t.q. } x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

c_1 et c_2 sont déterminés en fonction des condition initiales.

Classifier la stabilité des systèmes de seconde ordre par rapport à la matrice des coefficients
Soit le système

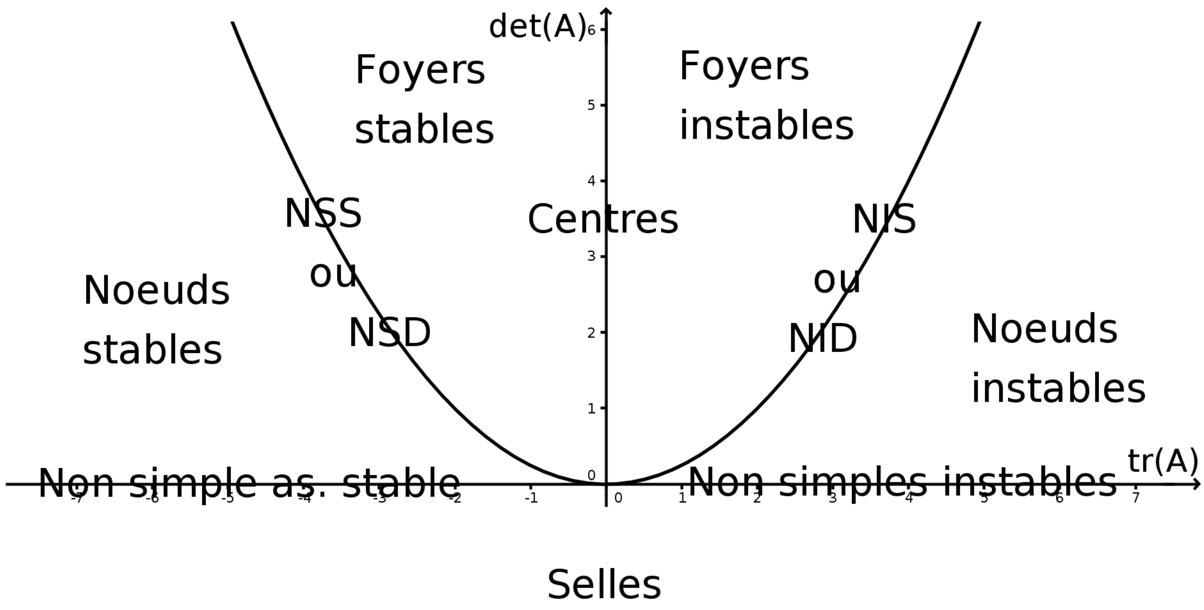
$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On a

$$tr(A) = a_{11} + a_{22}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

On peut classer les systèmes en fonction de leur trace et de leur déterminant :



NSS : noeuds stables singuliers
NSD : noeuds stables dégénérés
NIS : noeuds instables singuliers
NID : noeuds instables dégénérés
La parabole des noeuds singuliers ou dégénérés est d'équation

$$det(A) = \frac{(tr(A))^2}{4}$$

Relation entre linéarisation et stabilité :
Soit le système

$$\dot{x} = f(x, u)$$

avec un point d'équilibre $\bar{x}$ et sa linéarisation en $\bar{x}, \bar{u}$

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} u = Ax + Bu$$

— Si le système linéarisé est asymptotiquement stable (c'est-à-dire toutes les valeurs propres de A sont négatives), alors l'état d'équilibre $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.
— Si la matrice A du système linéarisé a une ou plusieurs valeurs propres avec partie réelle positive, alors l'état d'équilibre $\bar{x}$ du système est instable.

Notion de diagramme de bifurcation :
Dans le cadre d'un système paramétrique continu d'ordre 1, un diagramme de bifurcation est un graphique représentant la position des points fixes du système (en ordonnée) en fonction du paramètre (en abscisse).

Cycle limite :
Un cycle limite est une trajectoire fermée et isolée. Isolée veut dire que les trajectoire avoisinantes ne sont pas closes.
Un cycle limite peut être stable (ou attracteur), instable ou demi-stable. Ce dernier cas représente un cycle limite dont les trajectoires intérieures (exterieures) convergent, alors que les trajectoires exterieures (intérieures) divergent.

Dimensionnalité d'un ensemble fractal :
Pour une courbe ou une surface fractale créée par un processus de fragmentation avec N copies de taille r, la *dimension fractale* D_0 (ou *dimension de Hausdorff*) de cette courbe est :

$$D_0 = \frac{\log N}{\log r^{-1}}$$

Système chaotique :
Un comportement chaotique est un comportement apériodique à long terme d'un système déterministe qui affiche une sensible dépendance aux conditions initiales.
Un système chaotique est un système dont le comportement est chaotique.

Équation caractéristique et solutions d'un système linéaire à temps discret :

Soit le système

$$x(k+n) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(k)x(k+i) = g(k)$$

L'équation homogène associée est

$$x(k+n) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(k)x(k+i) = 0$$

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est

$$\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i a_i = 0$$

Pour toute solution λ de multiplicité m de l'équation caractéristique, on a

$$x^{(i)}(k) = k^i \lambda^k \quad 0 \leq i < m$$

m solutions linéarement indépendantes de l'équation homogène.
Toute solution de l'équation homogène peut s'écrire sous la forme

$$x^{(h)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{(i)}(k)$$

où les $x^{(i)}(k)$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène, et les constantes c_i sont déterminées arbitrairement, ou en fonction des conditions initiales.
Soit $x^{(p)}(k)$ une solution particulière de l'équation non-homogène. Toute solution générale de l'équation non-homogène est de la forme

$$x(k) = x^{(p)}(k) + x^{(h)}(k)$$

Étude graphique d'une équation linéaire affine à un pas :

Soit le système

$$x(k+1) = f(x(k))$$

On peut représenter son évolution avec un graphique ayant comme axes $0'_x \equiv x(k)$ en abscisse, et $0_y \equiv x(k+1)$ en ordonnée.
En traçant dans cet espace la fonction f par $y = f(x')$, ainsi que la bissectrice des axes $y = x'$, on peut visualiser différents mouvements en suivant une règle géométrique simple (la toile d'araignée) :

1. Commencer sur l'axe x par le point $x(k)$ et tracer une droite verticale jusqu'à la fonction f (au point $(x(k), f(x(k))))$.
2. Puisque $f(x(k)) = x(k+1)$, on peut tracer une droite horizontale jusqu'à la bissectrice (au point $(f(x(k)), f(x(k)))$), pour ainsi avoir la valeur $x(k+1)$ en abscisse.
3. On peut réitérer ce procédé autant de fois que nécessaire.

Diagramme de bifurcation de la fonction logistique :

Ce diagramme est un bon exemple de la complexité que peut montrer un système simple, en l'occurence

$$x(k+1) = ax(k)(1 - x(k)), \quad a \in [0,4], x \in [0,1]$$

Le diagramme montre l'évolution des toutes les valeurs que peut prendre x quand $t \to +\infty$, en fonction du paramètre a. Le diagramme est relativement simple tant que $a \lessapprox 1 + \sqrt{6}$. Mais une fois dépassé cette région, le nombre de valeurs de x explose exponientellement. Le comportement du système devient même chaotique une fois que $a \gtrapprox 3.56994$.

Composantes d'un algorithme Monte Carlo :

Description probabiliste : un modèle stochastique du problème.

Générateur uniforme de nombres aléatoires : un générateur de nombres aléatoires uniformément distribués sur $[0,1]$.

Loi d'échantillonage : une technique pour échantilloner une distribution de probabilité générique.

Simulateur : Un simulateur déterministe qui renvoie la sortie quand tous les paramètres en entrée sont connus.

Collecteur de sortie : structure de donnée qui stocke toutes les sorties de la simulation.

Analyseur de sortie : ensemble de techniques statistiques qui permettent de tirer des conclusions à partir des données générées par le simulateur.

Estimateur d'erreur : ceci permet d'associer à chaque quantité estimée à partir de la sortie une indication sur l'erreur ou sur la confiance (par exemple en fonction du nombre de répétitions de la simulation).

Propriétés d'un générateur de nombre pseudo-aléatoires uniformes :

Distribution correcte : Les nombres doivent être distribués selon la distribution visée, sans corrélation visible dans la séquence générée.

Longue période : La périodicité est inévitable de par de la nature discrète des ordinateurs. Toutefois, cette périodicité doit être plus grande que la taille de la séquence générée.

Répétabilité : Pour faciliter son utilisation, le générateur doit pouvoir permettre de répéter son comportement, par exemple au moyen d'une *seed*.

Longues séquences non corrélées : Pour des simulations de longue durée, il est important de pouvoir exécuter plusieurs sous-simulations indépendamment et de pouvoir les recombiner sans compromettre l'indépendance statistique.

Portabilité : Les nombres générés ne doivent pas dépendre de la configuration de la machine, mais uniquement de la *seed*.

Efficacité : La génération d'un nombre doit se faire de manière efficace, sans demander de ressources excessives.

Méthode de la transformation inverse :

C'est une méthode pour générer des nombres aléatoires selon une distribution arbitraire, à partir d'une distribution uniforme sur $[0, 1]$. Pour mettre en oeuvre cette méthode, nous avons besoin du résultat suivant :

Résultat *Pour toute variable aléatoire* $\mathbf{x} \in X$ *avec une fonction de répartition* $F_{\mathbf{x}}(x)$*, la variable aléatoire* $\mathbf{y} = F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ *est distribuée uniformément sur l'intervalle* $[0, 1]$.

Démonstration Considérons une variable $\mathbf{x} \in X$ de densité $p_{\mathbf{x}}(x)$. Définissons une nouvelle variable aléatoire $\mathbf{y} \in Y$ telle que $y = y(x)$ soit une fonction monotone non décroissante. On a également, selon la définition de la densité de probabilité,

$$p_{\mathbf{x}}(x)dx = p_{\mathbf{y}}(y)dy \;\Leftrightarrow\; p_{\mathbf{y}}(y) = \frac{p_{\mathbf{x}}(x)}{\frac{dy}{dx}}$$

si $y(x)$ est une fonction monotone non décroissante.
Prenons comme fonction $y(x)$ la fonction suivante :

$$y = y(x) = F_{\mathbf{x}}(x), \quad F_{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$$

où $F_{\mathbf{x}}$ est la fonction de répartition de $\mathbf{x}$. Puisque $F_{\mathbf{x}}$ est une fonction monotone non décroissante, $y(x)$ l'est aussi. On a alors

$$p_{\mathbf{y}}(y) = \frac{p_{\mathbf{x}}(x)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{p_{\mathbf{x}}(x)}{\frac{dF_{\mathbf{x}}(x)}{dx}} = \frac{p_{\mathbf{x}}(x)}{p_{\mathbf{x}}(x)} = 1$$

En d'autres termes, $\mathbf{y} = F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ est toujours distribuée de manière uniforme sur $[0, 1]$ pour toute densité de probabilité $p_{\mathbf{x}}(x)$.

Méthode Pour calculer N nombre aléatoires $(x_i)_{i \in [N]}$ selon la densité de probabilité $p_{\mathbf{x}}(x)$, on effectue N fois les opérations suivantes :

1. Un nombre u_i est généré à partir d'une distribution $\mathcal{U}(0, 1)$
2. La valeur $x_i = F^{-1}(u_i)$ est calculée