1 Problème 1 (échiquier)

1.1 Notations

- n x n = dimension de l'échiquier
- k_1 = nombre de tours
- k_2 = nombre de fous
- k_3 = nombre de cavaliers
- m = $(k_1 + k_2 + k_3)$
- y = $(t_1, t'_1, ..., t_{k_1}, t'_{k_1}, f_1, f'_1, ..., f_{k_2}, f'_{k_2}, h_1, h'_1, ..., h_{k_3}, h'_{k_3})$

1.2 Variables

$$\begin{aligned} X = \{ & t_i : i \in \{1, ..., k_1\}, f_i : i \in \{1, ..., k_2\}, h_i : i \in \{1, ..., k_3\}, \\ & t'_i : i \in \{1, ..., k_1\}, f'_i : i \in \{1, ..., k_2\}, h'_i : i \in \{1, ..., k_3\}\} \end{aligned} \tag{1}$$

1.3 Domaine

$$D = \{1, ..., n\}$$

1.4 Question 1

1.4.1 Contraintes

La question 1 est l'union de l'ensemble de contraintes:

$$C = \{c_1 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_4\}$$

tel que:

- c_1 est la contrainte pour indiquer que 2 pièces ne peuvent pas se trouver dans la même case.

$$c_1 = (y, \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \forall\, 1 \leq i \neq j \leq m, (v_{2i-1} \neq v_{2j-1}) \vee (v_{2i} \neq v_{2j})\})$$

- c_2 indique la contrainte pour la portée des tours

$$c_2 = (y, \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \forall\, 1 \leq i \leq k_1, \forall\, 1 \leq j \leq m, (v_{2i-1} \neq v_{2j-1}) \wedge (v_{2i} \neq v_{2j})\})$$

- c_3 représente la contrainte pour la portée des fous

$$c_3 = (y, \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \forall\, k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + k_2, \forall\, 1 \leq j \leq m, \forall\, k \in \{-n, n\},$$

$$[((v_{2i-1} \neq v_{2j-1} + k) \vee (v_{2i} \neq v_{2j} + k)) \wedge ((v_{2i-1} \neq v_{2j-1} - k) \vee (v_{2i} \neq v_{2j} + k))]\})$$

- c_4 est la contrainte pour la portée des cavaliers

$$c_4 = (y, \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \forall\, k_1 + k_2 + 1 \leq i \leq m, \forall\, 1 \leq j \leq m, \forall\, k \in \{-2, 2\},$$

$$\forall\, l \in \{-1, 1\}, [((v_{2i-1} \neq v_{2j-1} + k) \vee (v_{2i} \neq v_{2j} + l)) \wedge ((v_{2i-1} \neq v_{2j-1} + l) \vee (v_{2i} \neq v_{2j} + k))]\})$$

1.5 Question 2

1.5.1 Contraintes

Nous définissons l'ensemble de contraintes de la question 2 comme étant l'union:

$$C = \{c_1 \cup c_2\}$$

tel que :

- c_1 représente la contrainte pour indiquer que 2 pièces ne peuvent pas se trouver dans la même case.

$$c_1 = (y, \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \forall\, 1 \leq i \neq j \leq m, (v_{2i-1} \neq v_{2j-1}) \vee (v_{2i} \neq v_{2j})\})$$

- c_2 représente la contrainte pour que chaque case soit occupée par une pièce ou qu'elle soit menacée par au moins une pièce

$$c_2 = (y, \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq n, u1_{i,j} \cup u2_{i,j} \cup u3_{i,j} \cup u4_{i,j})$$

avec :

- $u1_{i,j} = \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \exists k \in \{1, ..., m\}, v_{2k-1} = i \wedge v_{2k} = j\}$
  La case {i, j} est occupée par une pièce

- $u2_{i,j} = \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \exists k \in \{1, ..., k1\}, v_{2k-1} = i \vee v_{2k} = j\}$
  La case {i, j} est menacée par au moins une tour

- $u3_{i,j} = \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \exists k \in \{k1 + 1, ..., k1 + k2\}, p \in \{-n, n\}, ((v_{2k-1} = i + p \wedge v_{2k} = j + p) \vee ((v_{2k-1} = i - p \wedge v_{2k} = j + p)))\}$
  La case {i, j} est menacée par au moins un fou

- $u4_{i,j} = \{(v_1, ..., v_{2m}) \in D^{2m} \mid \exists k \in \{k1{+}k2{+}1, ..., m\}, p \in \{-2, 2\}, l \in \{-1, 1\}, ((v_{2k-1} = i + k \wedge v_{2k} = j + l) \vee ((v_{2k-1} = i + l \wedge v_{2k} = j + k)))\}$
  La case {i, j} est menacée par au moins un cavalier