Definición 1. *Sea* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función creciente. Entonces,* $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *es una subsucesión de* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$*.*

Teorema 2 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Sea* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces,* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Realizaremos la demostración por inducctión sobre n.

$n = 1$ Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Sabemos que toda sucesión tiene una subsuseción creciente, digamos $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Como $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

$n + 1$ Suponemos que si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces tiene una subsucesión convergente. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideramos la sucesión $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$y_j^k \coloneqq x_j^k.$$

Es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y^k \coloneqq (x_1^k, \dots, x_n^k)$. Notamos que $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, pues $\|y\| \le \|x\|$. Por lo tanto, existe una función creciente $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(y^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Ahora, consideramos la sucesión $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$, $z^k \coloneqq x_{n+1}^{\alpha(k)}$. Entonces, $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$, pues $|z^k| \le \|x\|$. Por el caso $n = 1$, existe una función creciente $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(z^{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Tomando $\beta \circ \alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la sucesión $(x^{\beta\circ\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}^n$.

□

Definición 3 (Sucesiones de Cauchy)**.** *Sea* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^n$*. Decimos que la sucesión* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy, si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m > N$*, entonces*

$$\|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Proposición 4. *Sea* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces,* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es acotada en* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Como la sucesión es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|x^n - x^m\| < \frac{1}{2}.$$

Luego, para cada $p > N$, utilizando la desigualdad del triángulo, $\|x^p\| < \frac{1}{2} + \|x^{N+1}\|$. Haciendo $M \coloneqq \max\{\|x^1\|, \dots, \|x^N\|, \frac{1}{2} + \|x^{N+1}\|\}$, tenemos el resultado. □

Proposición 5. *Sea* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces,* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy, si y solo si,* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Por la proposición 4 y por el teorema 2, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsusección convergente. Es decir, existen $\alpha\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ creciente y $a\in\mathbb{R}^n$ tales que $\lim_{k\to\infty} x^{\alpha(k)} = a$.

Veamos que la sucesión original $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a a. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que si $n, m > N_1$, entonces

$$\|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, $\lim_{k\to\mathbb{N}} x^{\alpha(k)} = a$. Entonces, existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que si $p > N$, entonces

$$\|x^{\alpha(p)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo $N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$, si $n, p > N$, tenemos

$$\|x^n - a\| \leq \|x^n - x^{\alpha(p)}\| + \|x^{\alpha(p)} - a\| < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir, existe $a\in\mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n > N$,

$$\|x^n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $n, m > N$, se satisface

$$\|x^n - x^m\| < \|x^n - a\| + \|x^m - a\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Ejercicios

1. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y sea $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión. Demuestre que $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

2. Demuestre que la sucesión $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

3. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $x^k \coloneqq \sqrt{k}$, para cada $k\in\mathbb{N}$. Demuestre que

   a) $\lim_{k\to\infty} |x^{k+1} - x^k| = 0$.

   b) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

4. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que para toda $k\in\mathbb{N}$, $|x^k - x^{k+1}| \leq \frac{1}{(k+1)!}$. Demuestre que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

5. Sean $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy. Utilizando la definición 3, demuestre que $(x^k + y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.