**Definición 1.** *Sean $X$, $Y$ conjuntos. Una función entre $X$ y $Y$, o de $X$ a $Y$ es una regla de asignación $f$ tal que a cada $x \in X$ le es asignado un único $y \in Y$. En este caso, escribiremos $f\colon X \to Y$. Si $x \in X$, la asignación para $x$ bajo $f$ se denota por $f(x)$.*

**Definición 2.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función. Sea $A \subseteq X$. La imagen de $A$ bajo $f$ es el conjunto*

$$f[A] \coloneqq \{y \in Y \colon\ \exists\, x \in A,\ f(x) = y\}. \tag{1}$$

*Sea $B \subseteq Y$. La imagen inversa de $B$ bajo $f$ es el conjunto*

$$f^{-1}[B] \coloneqq \{x \in X \colon\ f(x) \in B\}. \tag{2}$$

**Proposición 3.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

*i)* $f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

*ii)* $f\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right] \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

*Demostración.* i) Sea $y \in f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Entonces, existe $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Luego, existe $\alpha \in I$ tal que $x \in U_\alpha$, por lo que $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Así, $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$. Es decir, $f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

Sea $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$. Entonces, existe $\alpha \in I$ tal que $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Luego, existe $x \in U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Pero $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Por lo tanto, $y \in f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right] \subseteq f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$.

ii) Sea $y \in f\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Entonces, existe $x \in \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Es decir, para todo $\alpha \in I$, $x \in U_\alpha$. Luego, para todo $\alpha \in I$, $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Por lo tanto, $y \in \bigcap_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

$\square$

**Proposición 4.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

*i)* $f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}\left[U_\alpha\right]$.

*ii)* $f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}\left[U_\alpha\right]$.

*Demostración.* Ejercicio. $\square$

**Ejemplo 5.** *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Sean $A \coloneqq (-1, 2]$, $B \coloneqq [-3, 0)$ $C \coloneqq [1, 2]$. Calcular $f[A]$, $f[B]$, $f[A \cap B]$ y $f^{-1}[C]$.*

*Demostración.* Si $y \in f[A]$, existe $x \in A$ tal que $x^2 = y$. Es decir, $x \in (-1, 2]$. Entonces, $x^2 \in f[A]$ si y solo si $-1 < x \leq 2$. Luego, $1 < x^2 \leq 4$. Por lo tanto, $f[A] = (1, 4]$.

Si $y \in f[B]$, existe $x \in B$ tal que $x^2 = y$. Razonando como en el caso anterior, tenemos $f[B] = (0, 9]$.

$A \cap B = (-1, 0)$. Entonces, $f[A \cap B] = (0, 1)$. Por otro lado, es importante observar que $f[A] \cap f[B] = (1, 3]$. Por lo tanto, $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.

Si $x \in f^{-1}[C]$, existe $y \in C$ tal que $x^2 = y$. Es decir, $x^2 \in [1, 2]$. Luego, $1 \leq x^2 \leq 2$. Aplicando la raíz cuadrada tenemos $1 \leq |x| \leq \sqrt{2}$. Separando las desigualdades utilizando las propiedades del valor absoluto, $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ o $1 \leq x \leq \sqrt{2}$. Por lo tanto, concluimos que $x \in [-\sqrt{2}, -1] \bigcup [1, \sqrt{2}]$. □

**Definición 6.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función.*

*i) $f$ es inyectiva si para todos $x, y \in X$, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.*

*ii) $f$ es suprayectiva si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

*iii) $f$ es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.*

# Ejercicios

1. Demostrar la proposición 4.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq 2x_1 - x_2$ y sea $B = \{0\}$. Hallar $f^{-1}[B]$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$ y sean $B \coloneqq 1$, $C = (-2, 0)$. Hallar $f^{-1}[B]$ y $f^{-1}[C]$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2$. Demostrar que $f$ no es inyectiva ni suprayectiva.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^3$. Demostrar que $f$ es biyectiva.