

1. Diferenciabilidad en \mathbb{R}^n

Definición 1 (D1). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0. \quad (1)$$

Definición 2 (D2). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y una función $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que φ es continua en a , $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x). \quad (2)$$

La transformación lineal T en ambas definiciones, se llama diferencial de f en a .

Estas dos definiciones son aparentemente muy distintas. Veamos que son dos formas de referirnos al mismo objeto. Es decir que equivalentes.

Proposición 3. La definición 1 y la definición 2 son equivalentes.

Demostración. Revisaremos ambas implicaciones.

1 \implies 2) Hacemos $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a; \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Como se satisface (1), haciendo $h := x - a$, φ es continua en a , y $\varphi(a) = 0$. Además, para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x).$$

2 \implies 1) Como se satisface (2), para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}.$$

Haciendo $h := x - a$, como φ es continua en a y $\varphi(a) = 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi(a+h)\| = 0. \quad \square$$

En la mayoría de las ocasiones será más comodo trabajar con la definición 2, aunque en los libros de texto es más común encontrar la definición 1. Notemos también, que de la definición 2 es inmediato ver que si f es diferenciable en a , entonces es continua en a , por la continuidad de T y de φ .

Ejemplo 4. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función constante. Entonces, f es diferenciable en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Hagamos $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = 0$, y $\varphi(x) = 0$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + \|x - a\|\varphi(x).$$

Por lo tanto, f es diferenciable. \square

Ejemplo 5. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, f es diferenciable en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Hagamos $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = f(x)$ y $\varphi(x) = 0$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(a) + T(x - a) + \|x - a\|\varphi(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

Por lo tanto, f es diferenciable en \mathbb{R}^n . \square

Proposición 6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en a . Entonces, la transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y la función $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ de la definición 2 son únicas.

Demostración. Supongamos que existe otra transformación lineal $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y otra función $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que ψ es continua en a , $\psi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + S(x - a) + \|x - a\|\psi(x).$$

Entonces, para cada $x \in X$,

$$(T - S)(x - a) = \|x - a\|(\psi(x) - \varphi(a)).$$

Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $x^k := a + \frac{1}{k}e_j$. Entonces, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$. Además, X es abierto, por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_0) \subseteq X$. Por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x^n \in B(a, \varepsilon_0)$. Así, para todo $n > N$,

$$\begin{aligned} (T - S)(x^k - a) &= \|x^k - a\|(\psi(x^k) - \varphi(x^k)) \\ (T - S)\left(\frac{e_j}{k}\right) &= \frac{1}{k}(\psi(x^k) - \varphi(x^k)) \\ (T - S)e_j &= \psi(x^k) - \varphi(x^k). \end{aligned}$$

Como T , S , φ y ψ son continuas, al pasar al límite,

$$(T - S)e_j = 0.$$

Por lo tanto, $Te_j = Se_j$. Como j fue arbitrario, la igualdad se tiene para cada elemento de la base. Luego, $T = S$ y $\varphi = \psi$. \square

En adelante, la derivada de f en a será denotada como $df(a)$.

Proposición 7. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Supongamos que $f = (f_1, \dots, f_m)$, donde para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable en a si y solo si, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, f_j es diferenciable en a .*

Demostración. \implies) Suponemos que f es diferenciable en a . Entonces existe $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que φ continua en a , $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \|x - a\|\varphi(x). \quad (3)$$

Note que $df(a) = (df(a)_1, \dots, df(a)_m)$ y $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Además, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, φ_j es continua en a , $\varphi_j(a) = 0$ y $df(a)_j$ es lineal. Por la igualdad (3), para cada $x \in X$ y para cada $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$f_j(x) = f_j(a) + df(a)_j(x - a) + \|x - a\|\varphi_j(x).$$

Por lo tanto, f_j es diferenciable.

\impliedby) Ahora, suponemos que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, f_j es diferenciable. Entonces, existe $\varphi_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que φ_j es continua en a , $\varphi_j(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f_j(x) = f_j(a) + df_j(a)(x - a) + \|x - a\|\varphi_j(x).$$

Hacemos $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $T: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ y $Tx := (df_1(a), \dots, df_m(a))$. Luego, para cada $x \in X$,

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} df_1(a) \\ \vdots \\ df_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{bmatrix} + \|x - a\| \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix}.$$

Esto es, $f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \|x - a\|\varphi(x)$. Por lo tanto, f es diferenciable en a . \square

Proposición 8. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in \mathbb{R}^m$ y $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:

a) $f + g$ es diferenciable en a y

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a).$$

b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. αf es diferenciable en a y

$$d(\alpha f)(a) = \alpha df(a).$$

c) Si $m = 1$, fg es diferenciable en a y

$$d(fg)(a) = g(a) df(a) + f(a) dg(a).$$

d) Si $m = 1$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en a y

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) df(a) - f(a) dg(a)}{g(a)^2}.$$

Ejercicios

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es diferenciable en a si y solo si f es diferenciable en a .
2. Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) := x_1 x_2$. Demostrar que f es diferenciable en a .
3. Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) := x_1^2 + x_2^2$. Probar que f es diferenciable y hallar $df(a)$.
4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) := \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$. ¿Es f diferenciable en 0?
5. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Utilizando la definición 1, demuestre que si f es diferenciable en a entonces es continua en a .
6. Demostrar los incisos a) y b) de la proposición 8.