Producto interno

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial real. Una función $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se llama producto interno en V si satisface las siguientes propiedades:*

a) p es lineal respecto al primer argumento:

$$p(\lambda x + y, z) = \lambda p(x, z) + p(y, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) p es simétrica:

$$p(x, y) = p(y, x), \qquad \forall x, y \in V.$$

c) p es definida positiva:

$$p(x, x) > 0, \qquad \forall x \in V \backslash \{0\}.$$

Con estas propiedades es posible concluir propiedades adicionales de los productos internos.

Proposición 2. *Sea V un espacio vectorial real y $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Entonces, p es lineal respecto al segundo argumento, es decir,*

$$p(x, \lambda y + z) = \lambda p(x, y) + p(x, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un espacio vectorial puede tener varios productos internos. Cuando el producto interno está fijo, una notación habitual para él es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Así, en lugar de escribir $p(x, y)$, escribimos $\langle x, y \rangle$.

Proposición 3 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Demostración. Si $x = 0$, se tiene la igualdad.

Si $x \neq 0$, hacemos $\lambda \coloneqq \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle}$ y $z \coloneqq y - \lambda x$. Utilizando la linealidad del producto interno, observamos que $\langle x, z \rangle = 0$. Luego, $\langle z, z \rangle = \langle y, y \rangle - \frac{(\langle x,y \rangle)^2}{\langle a,a \rangle}$. Como el producto interno es definido positivo, se cumple la desigualdad deseada. $\square$

Definición 4 (Producto interno canónico)**.** *Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.

En adelante, consideraremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico, a menos que se especifique de otro modo.

Norma

Definición 5 (Norma en un espacio vectorial)**.** *Sea V un espacio vectorial real. Una función $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ se llama norma si satisface las siguientes propiedades:*

a) *$\|\cdot\|$ es subaditiva:*
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in V.$$

b) *$\|\cdot\|$ es absolutamente homogénea:*
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) *$\|\cdot\|$ es definida positiva:*
$$\|x\| > 0, \qquad \forall\, x \in V \backslash \{0\}.$$

Si $\|\cdot\|$ es una norma, $(V, \|\cdot\|)$ se llama espacio normado.

Un espacio vectorial puede tener varias normas. En $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, tenemos

a) La norma 1, definida como $\|\cdot\|_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$\|x\|_1 \coloneqq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

b) La norma 2, definida como $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$\|x\|_2 \coloneqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

c) La norma infinito, definida como $\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$\|x\|_\infty \coloneqq \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |x_j|.$$

Proposición 6. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces $N\colon V \to \mathbb{R}$, definida como*
$$N(x) \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle},$$
es una norma en V.

Demostración. Las propiedades absolutamente homogénea y definida positiva, se siguen de las propiedades del producto interno. La propiedad absolutamente homogénea se sigue de la linealidad del producto interno y de la proposición 3. $\square$

En lo siguiente, siempre consideraremos $\mathbb{R}^n$ con la norma inducida por el producto interno canónico (la norma 2, $\|\cdot\|_2$) a menos que se especifique de otro modo. Denotaremos esta norma simplemente por $\|\cdot\|$.

La siguiente definición y el lema que sigue de ella son importantes para demostrar la proposición 9.

Definición 7. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que g es una función* cóncava *si para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y para cada $\lambda \in [0, 1]$ se satisface*

$$(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

Lema 8. *Sea $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función creciente, cóncava y tal que $g(0) \geq 0$. Entonces, g es subaditiva, esto es, para cada $a, b \geq 0$ se cumple la desigualdad*

$$g(a+b) \leq g(a) + g(b).$$

Demostración. Sean $a, b \in [0, +\infty)$. Si $a = b = 0$, el resultado se tiene inmediatamente.

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces por la concavidad de g se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\frac{a}{a+b}g(a+b) \leq \frac{b}{a+b}g(0) + \frac{a}{a+b}g(a+b) \leq g\left(\frac{b}{a+b}0 + \frac{a}{a+b}(a+b)\right) = g(a),$$

$$\frac{b}{a+b}g(a+b) \leq \frac{a}{a+b}g(0) + \frac{b}{a+b}g(a+b) \leq g\left(\frac{a}{a+b}0 + \frac{b}{a+b}(a+b)\right) = g(b).$$

Sumando los extremos de estas desigualdades tenemos el resultado. $\square$

Proposición 9. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \|x\|_1.$$

Demostración. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k^2 \geq 0$. Como la función raíz cuadrada es creciente,

$$|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \|x\|.$$

Por otro lado, es fácil ver que la raíz cuadrada satisface la definición 7 y las hipótesis del lema 8. Entonces, aplicando el lema 8 a cada entrada del vector x, tenemos

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \qquad \square$$

Corolario 10. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1.$$

Distancia

Definición 11. *Sea X un conjunto. Una función $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ se llama distancia en X si satisface las siguientes propiedades:*

a) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.

b) Si $x, y \in X$ satisfacen $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$.

c) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.

d) Para todos $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si d es una distancia en X, entonces (X, d) es un espacio métrico.

Definición 12. *Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Entonces la distancia inducida por la norma, $d_{\|\cdot\|} \colon V \times V \to \mathbb{R}$, se define como*

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) \coloneqq \|x - y\|.$$

Proposición 13. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, $(V, d_{\|\cdot\|})$ es un espacio métrico, es decir, $d_{\|\cdot\|}$ es una distancia en V.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de la norma. $\square$

En $\mathbb{R}^n$, la distancia inducida por la norma 2 se llama *distancia euclidiana*. En adelante consideraremos siempre $\mathbb{R}^n$ con esta distancia a menos que se especifique de otro modo.

Ejercicios

1. Sea V un espacio vectorial real y $p \in \mathbb{N}$. Sean $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p \in V$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$. Demuestre la igualdad:
$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j, \sum_{k=0}^{p} \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_j \beta_k \langle u_j, v_k \rangle.$$

2. En los siguientes ejercicios verifique que p es un producto interno:
   - $p \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde,
   $$p(x, y) \coloneqq x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 x_2 y_2.$$
   - $p \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde,
   $$p(x, y) \coloneqq 4 x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 x_2 y_2.$$
   - $p \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde,
   $$p(x, y) \coloneqq 2 x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2.$$
   - Sean $a, b > 0$. Consideramos $p \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde,
   $$p(x, y) \coloneqq \frac{x_1 y_1}{a} + \frac{x_2 y_2}{b}.$$

3. Escriba de manera detallada la demostración de la proposición 3.

4. Sea V un espacio vectorial con producto interno p. Demuestre que para cada $v \in V$,
$$\langle v, 0 \rangle = 0.$$

5. De una condición necesaria y suficiente para tener la igualdad en la proposición 3. Demuestre su afirmación.

6. Demuestre que $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ y $\| \cdot \|_\infty$ son normas en $\mathbb{R}^n$.

7. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Decimos que x y y son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$. Demuestre que si x y y son ortogonales, entonces
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

8. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sean $a, b \in V$. Demuestre que
$$\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|.$$

9. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y considere su norma inducida. Determine cuándo se cumple la igualdad $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$

10. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre la identidad del paralelogramo:
$$\|x + y\| + \|x - y\| = 2(\|x\| + \|y\|)^2.$$

11. Verifique que la función raíz cuadrada satisface las condiciones de la definición 7 y las hipótesis del lema 8.

12. Escriba de manera explícita las normas inducidas por los productos internos del ejercicio 2 y las distancias inducida por dichas normas. Realizar un dibujo de los círculos unitarios con estas normas.

13. Demuestre el corolario 10 y redacte una interpretación geométrica.

14. De una demostración detallada de la proposición 13.