Productos internos, normas y distancias

Preliminares

A lo largo de este curso consideraremos $\mathbb{R}^n$ definido de la siguiente forma

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \colon \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ x_j \in \mathbb{R}\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{R}^n$ es una n–tupla de números reales. Si $a \in \mathbb{R}^n$, denotaremos sus componentes (o entradas) con el mismo símbolo y subíndices, es decir

$$a = (a_1, \ldots, a_n)$$

Dos tuplas son iguales si cada una de sus entradas son iguales entre sí, es decir,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ x_j = y_j.$$

Definición 1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La suma de n–tuplas se define entrada por entrada:*

$$x + y \coloneqq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (x_k + y_k)_{k=1}^n.$$

La multiplicación de n–tuplas por escalares se define entrada por entrada:

$$\lambda x \coloneqq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = (\lambda x_j)_{j=1}^n.$$

Con estas operaciones, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Producto interno

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial real. Una función $p \colon V \times V \to \mathbb{R}$ se llama producto interno en V si satisface las siguientes propiedades:*

a) p es lineal respecto al primer argumento:

$$p(\lambda x + y, z) = \lambda p(x, z) + p(y, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) p es simétrica:

$$p(x, y) = p(y, x), \qquad \forall x, y \in V.$$

c) p es definida positiva:

$$p(x, x) > 0, \qquad \forall x \in V \setminus \{0\}.$$

Con estas propiedades es posible concluir propiedades adicionales de los productos internos.

Proposición 3. *Sea V un espacio vectorial real y $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Entonces, p es lineal respecto al segundo argumento, es decir,*

$$p(x, \lambda y + z) = \lambda p(x, y) + p(x, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un espacio vectorial puede tener varios productos internos. Cuando el producto interno está fijo, una notación habitual para él es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Así, en lugar de escribir $p(x, y)$, escribimos $\langle x, y \rangle$.

Proposición 4 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Demostración. Si $x = 0$, se tiene la igualdad.

Si $x \neq 0$, hacemos $\lambda := \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle}$ y $z := y - \lambda x$. Utilizando la linealidad del producto interno, observamos que $\langle x, z \rangle = 0$. Luego, $\langle z, z \rangle = \langle y, y \rangle - \frac{(\langle x,y \rangle)^2}{\langle a,a \rangle}$. Como el producto interno es definido positivo, se cumple la desigualdad deseada. $\square$

Definición 5 (Producto interno canónico)**.** *Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.

En adelante, consideraremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico, a menos que se especifique de otro modo.

Norma

Definición 6 (Norma en un espacio vectorial)**.** *Sea V un espacio vectorial real. Una función $\| \cdot \| \colon V \to \mathbb{R}$ se llama norma si satisface las siguientes propiedades:*

a) *$\| \cdot \|$ es subaditiva:*
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in V.$$

b) *$\| \cdot \|$ es absolutamente homogénea:*

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) $\|\cdot\|$ *es definida positiva:*

$$\|x\| > 0, \qquad \forall\, x \in V \backslash \{0\}.$$

Si $\|\cdot\|$ *es una norma,* $(V, \|\cdot\|)$ *se llama espacio normado.*

Un espacio vectorial puede tener varias normas. En $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, tenemos

a) La norma 1, definida como $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_1 \coloneqq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

b) La norma 2, definida como $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_2 \coloneqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

c) La norma infinito, definida como $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_\infty \coloneqq \max_{j \in \{1,\dots,n\}} |x_j|.$$

Proposición 7. *Sea* V *un espacio vectorial real con producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Entonces* $N \colon V \to \mathbb{R}$*, definida como*

$$N(x) \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

es una norma en V*.*

Demostración. Las propiedades absolutamente homogénea y definida positiva, se siguen de las propiedades del producto interno. La propiedad absolutamente homogénea se sigue de la linealidad del producto interno y de la proposición 4. $\square$

En lo siguiente, siempre consideraremos $\mathbb{R}^n$ con la norma inducida por el producto interno canónico (la norma 2, $\|\cdot\|_2$) a menos que se especifique de otro modo. Denotaremos esta norma simplemente por $\|\cdot\|$.

La siguiente definición y el lema que sigue de ella son importantes para demostrar la proposición 10.

Definición 8. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que g es una función* cóncava *si para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y para cada $\lambda \in [0, 1]$ se satisface*

$$(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

Lema 9. *Sea $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función creciente, cóncava y tal que $g(0) \geq 0$. Entonces, g es subaditiva, esto es, para cada $a, b \geq 0$ se cumple la desigualdad*

$$g(a+b) \leq g(a) + g(b).$$

Demostración. Sean $a, b \in [0, +\infty)$. Si $a = b = 0$, el resultado se tiene inmediatamente.

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces por la concavidad de g se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\frac{a}{a+b} g(a+b) \leq \frac{b}{a+b} g(0) + \frac{a}{a+b} g(a+b) \leq g\left(\frac{b}{a+b} 0 + \frac{a}{a+b}(a+b)\right) = g(a),$$

$$\frac{b}{a+b} g(a+b) \leq \frac{a}{a+b} g(0) + \frac{b}{a+b} g(a+b) \leq g\left(\frac{a}{a+b} 0 + \frac{b}{a+b}(a+b)\right) = g(b).$$

Sumando los extremos de estas desigualdades tenemos el resultado. $\square$

Proposición 10. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \|x\|_1.$$

Demostración. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k^2 \geq 0$. Como la función raíz cuadrada es creciente,

$$|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \|x\|.$$

Por otro lado, es fácil ver que la raíz cuadrada satisface la definición 8 y las hipótesis del lema 9. Entonces, aplicando el lema 9 a cada entrada del vector x, tenemos

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \qquad \square$$

Corolario 11. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1.$$

Distancia

Definición 12. *Sea X un conjunto. Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ se llama distancia en X si satisface las siguientes propiedades:*

a) $d(x,y) \geq 0$ *para todos* $x, y \in X$.

b) *Si* $x, y \in X$ *satisfacen* $d(x,y) = 0$, *entonces* $x = y$.

c) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todos* $x, y \in X$.

d) *Para todos* $x, y, z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Si d es una distancia en X, entonces (X,d) es un espacio métrico.

Definición 13. *Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Entonces la distancia inducida por la norma, $d_{\|\cdot\|}\colon V \times V \to \mathbb{R}$, se define como*

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) \coloneqq \|x - y\|.$$

Proposición 14. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, $(V, d_{\|\cdot\|})$ es un espacio métrico, es decir, $d_{\|\cdot\|}$ es una distancia en V.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de la norma. □

En $\mathbb{R}^n$, la distancia inducida por la norma 2 se llama *distancia euclidiana*. En adelante consideraremos siempre $\mathbb{R}^n$ con esta distancia a menos que se especifique de otro modo.

Ejercicios

1. Verifique que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas al inicio de la sección.

2. Verifique que el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno.

3. Sea V un espacio vectorial real y $p \in \mathbb{N}$. Sean $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p \in V$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$. Demuestre la igualdad:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j, \sum_{k=0}^{p} \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_j \beta_k \langle u_j, v_k \rangle.$$

4. En $\mathbb{R}^2$ considere la función $p\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde,

$$p(x, y) \coloneqq x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Verifique que p es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

5. Escriba de manera detallada la demostración de la proposición 4.

6. De una condición necesaria y suficiente para tener la igualdad en la proposición 4. Demuestre su afirmación.

7. Demuestre que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas en $\mathbb{R}^n$.

8. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Decimos que x y y son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$. Demuestre que si x y y son ortogonales, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

9. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sean $a, b \in V$. Demuestre que

$$\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|.$$

10. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y considere su norma inducida. Determine cuándo se cumple la igualdad $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$

11. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre la identidad del paralelogramo:

$$\|x + y\| + \|x - y\| = 2(\|x\| + \|y\|)^2.$$

12. Verifique que la función raíz cuadrada satisface las condiciones de la definición 8 y las hipótesis del lema 9.

13. Escriba de manera explícita la norma inducida por el producto interno y la distancia inducida por la norma del ejercicio 4.

14. Demuestre el corolario 11 y redacte una interpretación geométrica.

15. De una demostración detallada de la proposición 14.