Preliminares: Familias de conjuntos

Sea X un conjunto. Denotamos el conjunto potencia de X como $\mathcal{P}(X)$ y al complemento de X por X^c.

Definición 1. *Sean X e I conjuntos y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Una familia de conjuntos indexada en I es una función $f\colon I \to \mathcal{U}$.*

Los elementos de la familia son los valores de la función f. En este caso, denotamos por U_α a cada uno de los valores de f, es decir, si $f\colon I \to \mathcal{U}$ es una familia de conjuntos,

$$U_\alpha \coloneqq f(\alpha).$$

Así, denotamos a la familia de conjuntos como $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Ejemplo 2. *Sean X un conjunto no vacío, $I \coloneqq \{1, 2, 3\}$. Sean $R, S, T \subseteq X$. Definimos $f\colon I \to \{R, S, T\}$ mediante $f(1) \coloneqq R$, $f(2) \coloneqq S$ y $f(3) \coloneqq T$. Entonces, $U_1 = R$, $U_2 = S$ y $U_3 = T$, y $(U_\alpha)_{\alpha \in I} = (U_1, U_2, U_3) = (R, S, T)$.*

Ejemplo 3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto $\left(\frac{1}{n}, 1\right) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donde $f(n) = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ es una familia de conjuntos. Un modo convencional de denotar a esta familia es $\left(\left[\frac{1}{n}, 1\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Definición 4 (Unión de una familia arbitraria de conjuntos)**.** *Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección arbitraria de conjuntos. Entonces,*

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \iff \exists \alpha \in I,\ x \in U_\alpha.$$

Definición 5 (Intersección de una familia arbitraria de conjuntos)**.** *Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección arbitraria de conjuntos. Entonces,*

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \iff \forall \alpha \in I,\ x \in U_\alpha.$$

Ejemplo 6. *Considere la familia $\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{k}\right) = (0, 1)$.*

Demostración. Si $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$. Luego, $0 < x$ y $x < \frac{1}{k} < 1$. Por lo que $x \in (0, 1)$.

Si $x \in (0, 1)$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} > n_0$, esto es, $\frac{1}{n_0} > x$. Por lo tanto, $x \in \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$. Luego, $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{k}\right)$. $\square$

Ejemplo 7. *Considere la familia $\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.*

Demostración. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{0\} \subseteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Luego, $\{0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. De manera equivalente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x| < \frac{1}{n}$. Es decir, $x = 0$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \{0\}$. □

Proposición 8 (Leyes de Morgan)**.** *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$. Entonces se satisfacen*

a) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha^c$.

b) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha^c$.

Demostración. Ejercicio. □

Conjuntos abiertos y cerrados

Comenzaremos esta sección con definiciones.

Definición 9. *Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la bola con centro en a y radio ε como el conjunto*

$$B(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| < \varepsilon\}.$$

Definición 10. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ si para todo $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$B(a, \delta) \subseteq A.$$

Ejemplo 11. *Para cada $a \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $x \in B(a, \varepsilon)$. Entonces, $\|x - a\| < \varepsilon$. Sea $r := \varepsilon - \|x - a\|$ y sea $y \in B(x, r)$. Entonces, aplicando la desigualdad del triángulo y acotando $\|y - x\| < r$, tenemos

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $y \in B(a, \varepsilon)$. Como y fue arbitrario, concluimos que $B(x, r) \subseteq B(a, \varepsilon)$. Así, $B(a, \varepsilon)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. □

Proposición 12. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *$\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son conjuntos abiertos.*
2. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Entonces, $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ es abierto.*
3. *Sean U_1 y U_2 abiertos. Entonces, $U_1 \cap U_2$ es abierto.*

Demostración.

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $B(a, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$, por definición. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es abierto. Por otro lado, $\varnothing$ es abierto por vacuidad.

2. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Entonces, existe $\alpha_1 \in I$ tal que $x \in U_{\alpha_1}$. Sabemos que para cada $\alpha \in I$, U_α es abierto. Luego, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq U_{\alpha_1} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es abierto.

3. Sea $x \in U_1 \bigcap U_2$. Entonces $x \in U_1$ y $x \in U_2$. Por lo tanto, existe $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que
$$B(x,r_1) \subseteq U_1, \qquad B(x,r_2) \subseteq U_2.$$
Hacemos $r \coloneqq \text{mín}\{r_1, r_2\}$. Sea $y \in B(x,r)$. Entonces,
$$\|y - x\| < r \leq r_1, \qquad \|y - x\| < r \leq r_2.$$
Por lo tanto, $y \in B(x,r_1) \subseteq U_1$ y $y \in B(x,r_2) \subseteq U_2$. Luego, $B(x,r) \subseteq U_1 \bigcap U_2$. Es decir, $U_1 \bigcap U_2$ es abierto.

$\square$

Definición 13. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que V es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ si V^c es abierto.*

Note que las definiciones de abierto y cerrado no se excluyen entre sí. Que un conjunto no sea abierto no implica que sea cerrado y viceversa.

Proposición 14. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *$\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son conjuntos cerrados.*
2. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces, $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ es cerrado.*
3. *Sean U_1 y U_2 abiertos. Entonces, $U_1 \bigcup U_2$ es abierto.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Puntos interiores, de adherencia y de acumulación

Definición 15. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in X$. Decimos que a es punto interior de X si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \subseteq X$.*

Definimos el interior de X, X°, como el conjunto de todos los puntos interiores de X:
$$X^\circ \coloneqq \{a \in X\colon\ \exists\, r > 0,\ B(a,r) \subseteq X\}.$$

Proposición 16. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces X° es abierto.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Definición 17. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Decimos que a es punto de adherencia de X, si para cada $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$.*

Definimos la cerradura de X, $\overline{X}$, como el conjunto de todos los puntos de adherencia de X:

$$\overline{X} \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n : \ \forall \varepsilon > 0, \ B(y, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing\}$$

Proposición 18. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, $\overline{X}$ es cerrado.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 19. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces X es cerrado si y solo si $\overline{X} = X$.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Suponemos que X es cerrado. De la definición de $\overline{X}$, tenemos $X \subseteq \overline{X}$. Por otro lado, sea $a \in \overline{X}$ y supongamos que $a \notin X$. Como X es cerrado, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq X^c$. Luego, $B(a, r) \bigcap X \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción, pues $a \in \overline{X}$. Por lo tanto, $a \in X$. Como a fue arbitrario, $\overline{X} \subseteq X$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\overline{X} = X$. Por la proposición 18, se tiene el resultado.

□

Definición 20. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Decimos que a es punto de acumulación de X, si para todo $\varepsilon > 0$, $(B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}) \bigcap X \neq \varnothing$.*

Definimos el conjunto derivado de X, X' como el conjunto de todos sus puntos de acumulación:

$$X' \coloneqq \{a \in \mathbb{R}^n : \ \forall \varepsilon > 0 \ (B(a, \varepsilon) \backslash \{a\})\}.$$

Ejercicios

1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $A_k \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \geq k\}$. Demuestre que

   a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_{k+1} \subseteq A_k$.

   b) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A_1$.

2. Demuestre la proposición 8.

3. En los siguientes incisos, muestre que cada conjunto es abierto y haga un dibujo del conjunto:

   a) $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 > 0, \ x_2 > 0\}$.

   b) $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_1 < 1\}$.

c) $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 < x_1 < x_2\}$.

4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\bigcap_{j=1}^n U_j$ es abierto. Sugerencia: Seguir la demostración del inciso 3. de la proposición 12.

5. Dar un ejemplo de una familia de abiertos tal que su intersección no es un conjunto abierto.

6. Demuestre la proposición 14.

7. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{a\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

8. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

9. Demuestre la proposición 16.

10. En $\mathbb{R}$, sea $A \coloneqq (0, 1]$. Demuestre que A no es abierto ni cerrado. Encontrar $\overline{A}$ y A°.

11. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que $X \subseteq \overline{X}$.

12. Demuestre la proposición 18.

13. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que X' es cerrado.

14. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\overline{X} = X \cup X'$.