## Requisitos

**Teorema 1** (Bolzano–Weierstrass)**.** *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.*

**Corolario 2.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, $X$ es cerrado si y solo si existe una sucesión de elementos de $X$, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$.*

**Proposición 3.** *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si y solo si, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.*

# Conjuntos compactos

El objetivo de esta sección es conocer a los conjuntos compactos y demostrar el teorema de Heine–Borel.

**Definición 4** (Cubierta de un conjunto)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es cubierta abierta de $X$ si*

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

*Si $J \subseteq I$, y $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ es cubierta de $X$, decimos que $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ es subcubierta de $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$.*

**Definición 5** (Conjuntos compactos)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que $K$ es compacto si para toda cubierta abierta de $K$, $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$, existen $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I$ tales que $(U_{\alpha_j})_{j=1}^m$ es cubierta de $K$.*

Note que para demostrar que un conjunto $K$ es compacto, debemos dar una cubierta abierta arbitraria de $K$ y encontrar una subcubierta finita.

**Definición 6** (Conjuntos secuencialmente compactos)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Si toda sucesión de elementos de $K$, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tiene una subsucesión $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^{\alpha(k)} \in K$, decimos que $K$ es secuencialmente compacto.*

**Lema 7.** *Sea $X \in \mathbb{R}^n$ secuencialmente compacto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que*

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon).$$

*Demostración.* Supongamos que no se satisface el lema. Es decir, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $x_1, \dots, x_m \in X$,

$$X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon).$$

Sea $x^1 \in X$. Por la suposición inicial, $X \not\subseteq B(x_1, \varepsilon_0)$. Luego, existe $x^2 \in X$ tal que $x^2 \notin B(x^1, \varepsilon_0)$ y $X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{2} B(x^j, \varepsilon_0)$. Supongamos que hemos escogido $k$ elementos de $X$ de manera que si $l, m \in \{1, \dots, k\}$ y $l \neq k$, entonces $\|x^l - x^m\| \geq \varepsilon_0$ y $X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x^j, \varepsilon_0)$. Escogemos $x^{k+1} \in X$ tal que $x^{k+1} \notin \bigcup_{j=1}^{k} B(x^j, \varepsilon_0)$. Así, de manera inductiva construimos una sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $X$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, si $l < m$, entonces

$$\|x^m - x^k\| \geq \varepsilon_0, \qquad X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x^j, \varepsilon_0).$$

Como $X$ es secuencialmente compacto, la sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsuseción convergente $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Por la proposición 3 $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$,

$$\|x^{\alpha(n)} - x^{\alpha(m)}\| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Por otro lado, si $n > m$, $\|x^{\alpha(n)} - x^{\alpha(m)}\| \geq \varepsilon_0$. Lo cual es una contradicción. □

**Lema 8.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ secuencialmente compacto y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$. Entonces, existe $\varepsilon_0$ tal que para toda $x \in X$ existe $\alpha_x \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_x}$.*

*Demostración.* Supongamos que no se satisface el lema. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que para todo $\alpha \in I$, $B(x, \varepsilon) \not\subseteq U_\alpha$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $a^k \in X$ tal que para todo $\alpha \in I$, $B(a^k, \frac{1}{k}) \not\subseteq U_\alpha$. Consideramos la sucesión $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como $X$ es secuencialmente compacto, $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsuseción convergente $(a^{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\mathbb{N}} a^{\beta(k)} \in X$. Sea $a \coloneqq \lim_{k\to\mathbb{N}} a^{\beta(k)}$. Como $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es cubierta de $X$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $a \in U_{\alpha_0}$. Además, $U_{\alpha_0}$ es abierto, por lo que existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq U_{\alpha_0}$.

Recordemos que $(a^{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Entonces, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$,

$$\|x^{\beta(n)} - a\| < \frac{r}{2}.$$

Sea $x \in B(a^{\beta(l)}, \frac{1}{\beta(l)})$. Por la propiedad arquimediana, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\beta(N_2)} < \frac{r}{2}$. Sea $N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$ y $l > N$.

$$\|a - x^{\beta(l)}\| < \frac{1}{\beta(l)} < \frac{r}{2}.$$

Por otro lado,
$$\|x-a\| \leq \|x-x^{\beta(k)}\| + \|x^{\beta(k)}-a\| < r.$$
Es decir, $x \in B(a,r)$. Por lo tanto, $B(a^{\beta(l)}, \frac{1}{\beta(l)}) \subseteq B(a,r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Lo cual es una contradicción. $\square$

**Teorema 9** (Heine–Borel)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, son equivalentes*

*i) $K$ es compacto.*

*ii) $K$ es cerrado y acotado.*

*iii) $K$ es secuencialmente compacto.*

*Demostración.* Realizaremos la demostración siguiendo $i) \implies ii)$, $ii) \implies iii)$ y $iii) \implies i)$.

$i) \implies ii)$ Suponemos que $K$ es compacto. Veamos que $K$ es acotado.

Consideramos la familia de bolas $(B(0,n))_{n\in\mathbb{N}}$. Esta familia es cubierta de $K$. Como $K$ es compacto, existen $N \in \mathbb{N}$ y $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$ tales que
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(0,k_j).$$
Haceindo $r \coloneqq \max\{k_1, \ldots, k_N\}$, tenemos que $K \subseteq B(0,r)$. Es decir, $K$ es acotado.

Ahora, veamos que $K$ es cerrado. Para esto verificamos que $K^c$ es abierto. Sea $a \in K^c$. Para cada $y \in K$, hacemos $r_y \coloneqq \frac{\|y-a\|}{2}$. La familia de bolas $(B(y,r_y))_{y\in K}$ es cubierta de $K$. Como $K$ es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_N \in K$ tales que
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(y_j, r_{y_j}).$$
Sean $\varepsilon \coloneqq \min\{r_{y_1}, \ldots, r_{y_N}\}$ y $x \in K$. Entonces, existe $l \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $x \in B(y_l, r_{y_l})$. Luego, $\|x-y_l\| < r_l$. Por otro lado, de la desigualdad del triángulo, $\|x-y_l\| \leq \|x-a\| + \|y_l-a\|$. Entonces, tenemos las siguientes desigualdades
$$\begin{aligned}\|x-a\| &\geq \|y_l-a\| - \|x-y_l\| \\ &\geq \|y_l-a\| - r_l \\ &= \|y_l-a\| - \frac{\|y_l-a\|}{2} = r_{y_l} \geq \varepsilon.\end{aligned}$$
Es decir, $x \notin B(a,\varepsilon)$. Como $x$ fue arbitrario, $K \subseteq B(a,\varepsilon)^c$. Luego, $B(a,\varepsilon) \subseteq K^c$.

*ii)* $\implies$ *iii)* Suponemos que $K$ es cerrado y acotado. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $K$. Como $K$ es acotado, por el teorema 1 $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Sea $a := \lim_{k\to\infty} x^{\alpha(k)}$. Como $K$ es cerrado, por el corolario 2, $a \in K$. Por lo tanto, $K$ es secuencialmente compacto.

*iii)* $\implies$ *i)* Suponemos que $K$ es secuencialmente compacto. Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de $K$. Por el lema 8 existe $\varepsilon_0$ tal que para cada $x \in K$ existe $\alpha \in I$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subseteq U_\alpha$. Por el lema 7 existen $s \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_s \in K$ tales que $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} B(x, \varepsilon_0)$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$ existe $\alpha_j \in I$ tal que $B(x_j, \varepsilon_0) \subseteq U_{\alpha_j}$. Por lo tanto,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} U_{\alpha_j}. \qquad \square$$

## Ejercicios

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{a\}$ es compacto.

2. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es compacto.

3. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un conjunto compacto.

4. Sean $A$ y $B$ conjuntos compactos. Demuestre que $A \cup B$ es compacto.

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos compactos. Demuestre que $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ es compacto.

6. Sea $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos compactos. Demuestre que $\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha$ es compacto.

7. Sea $K$ un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y $V \subseteq K$ cerrado. Utilizando la definición 5, demuestre que $V$ es compacto.

8. Sea $K$ un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y $V \subseteq K$ cerrado. Utilizando el teorema 9, demuestre que $V$ es compacto.