Cálculo Diferencial e Integral III
UNAM–FES Acatlán
Actuaria

Enrique Abdeel Muñoz de la Colina

31 de octubre de 2024

Índice

1. Producto interno, normas y distancias

1.1. Preliminares

A lo largo de este curso consideraremos $\mathbb{R}^n$ definido de la siguiente forma

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{(x_1, \dots, x_n)\colon\ \forall j \in \{1, \dots, n\},\ x_j \in \mathbb{R}\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{R}^n$ es una n–tupla de números reales. Si $a \in \mathbb{R}^n$, denotaremos sus componentes (o entradas) con el mismo símbolo y subíndices, es decir

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

Dos tuplas son iguales si cada una de sus entradas son iguales entre sí, es decir,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ x = y \quad \iff \quad \forall j \in \{1, \dots, n\},\ x_j = y_j.$$

Definición 1.1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La suma de n–tuplas se define entrada por entrada:*

$$x + y \coloneqq (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_k + y_k)_{k=1}^n.$$

La multiplicación de n–tuplas por escalares se define entrada por entrada:

$$\lambda x \coloneqq (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (\lambda x_j)_{j=1}^n.$$

Con estas operaciones, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

1.2. Producto interno

Definición 1.2. *Sea V un espacio vectorial real. Una función $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se llama producto interno en V si satisface las siguientes propiedades:*

a) p es lineal respecto al primer argumento:

$$p(\lambda x + y, z) = \lambda p(x, z) + p(y, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) p es simétrica:

$$p(x, y) = p(y, x), \qquad \forall x, y \in V.$$

c) p es definida positiva:

$$p(x, x) > 0, \qquad \forall x \in V \backslash \{0\}.$$

Con estas propiedades es posible concluir propiedades adicionales de los productos internos.

Proposición 1.3. *Sea V un espacio vectorial real y $p\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Entonces, p es lineal respecto al segundo argumento, es decir,*

$$p(x, \lambda y + z) = \lambda p(x, y) + p(x, z), \qquad \forall\, x, y, z \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un espacio vectorial puede tener varios productos internos. Cuando el producto interno está fijo, una notación habitual para él es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Así, en lugar de escribir $p(x, y)$, escribimos $\langle x, y \rangle$.

Proposición 1.4 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Demostración. Si $x = 0$, se tiene la igualdad.

Si $x \neq 0$, hacemos $\lambda := \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle}$ y $z := y - \lambda x$. Utilizando la linealidad del producto interno, observamos que $\langle x, z \rangle = 0$. Luego, $\langle z, z \rangle = \langle y, y \rangle - \frac{(\langle x,y \rangle)^2}{\langle a,a \rangle}$. Como el producto interno es definido positivo, se cumple la desigualdad deseada. □

Definición 1.5 (Producto interno canónico)**.** *Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.

En adelante, consideraremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico, a menos que se especifique de otro modo.

1.3. Norma

Definición 1.6 (Norma en un espacio vectorial)**.** *Sea V un espacio vectorial real. Una función $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ se llama norma si satisface las siguientes propiedades:*

a) *$\|\cdot\|$ es subaditiva:*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in V.$$

b) *$\|\cdot\|$ es absolutamente homogénea:*

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) $\|\cdot\|$ es definida positiva:

$$\|x\| > 0, \qquad \forall\, x \in V\backslash\{0\}.$$

Si $\|\cdot\|$ es una norma, $(V, \|\cdot\|)$ se llama espacio normado.

Un espacio vectorial puede tener varias normas. En $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, tenemos

a) La norma 1, definida como $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_1 \coloneqq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

b) La norma 2, definida como $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_2 \coloneqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

c) La norma infinito, definida como $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_\infty \coloneqq \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |x_j|.$$

Proposición 1.7. *Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entonces $N \colon V \to \mathbb{R}$, definida como*

$$N(x) \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

es una norma en V.

Demostración. Las propiedades absolutamente homogénea y definida positiva, se siguen de las propiedades del producto interno. La propiedad absolutamente homogénea se sigue de la linealidad del producto interno y de la proposición 1.4. □

En lo siguiente, siempre consideraremos $\mathbb{R}^n$ con la norma inducida por el producto interno canónico (la norma 2, $\|\cdot\|_2$) a menos que se especifique de otro modo. Denotaremos esta norma simplemente por $\|\cdot\|$.

La siguiente definición y el lema que sigue de ella son importantes para demostrar la proposición 1.10.

Definición 1.8. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que g es una función* cóncava *si para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y para cada $\lambda \in [0,1]$ se satisface*

$$(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

Lema 1.9. *Sea $g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función creciente, cóncava y tal que $g(0) \geq 0$. Entonces, g es subaditiva, esto es, para cada $a, b \geq 0$ se cumple la desigualdad*

$$g(a+b) \leq g(a) + g(b).$$

Demostración. Sean $a, b \in [0,+\infty)$. Si $a = b = 0$, el resultado se tiene inmediatamente.

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces por la concavidad de g se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\frac{a}{a+b} g(a+b) \leq \frac{b}{a+b} g(0) + \frac{a}{a+b} g(a+b) \leq g\left(\frac{b}{a+b}0 + \frac{a}{a+b}(a+b)\right) = g(a),$$

$$\frac{b}{a+b} g(a+b) \leq \frac{a}{a+b} g(0) + \frac{b}{a+b} g(a+b) \leq g\left(\frac{a}{a+b}0 + \frac{b}{a+b}(a+b)\right) = g(b).$$

Sumando los extremos de estas desigualdades tenemos el resultado. □

Proposición 1.10. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \|x\|_1.$$

Demostración. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k^2 \geq 0$. Como la función raíz cuadrada es creciente,

$$|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \|x\|.$$

Por otro lado, es fácil ver que la raíz cuadrada satisface la definición 1.8 y las hipótesis del lema 1.9. Entonces, aplicando el lema 1.9 a cada entrada del vector x, tenemos

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$ □

Corolario 1.11. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1.$$

1.4. Distancia

Definición 1.12. *Sea X un conjunto. Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ se llama distancia en X si satisface las siguientes propiedades:*

a) $d(x, y) \geq 0$ *para todos* $x, y \in X$.

b) *Si* $x, y \in X$ *satisfacen* $d(x, y) = 0$, *entonces* $x = y$.

c) $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* $x, y \in X$.

d) *Para todos* $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si d es una distancia en X, entonces (X, d) es un espacio métrico.

Definición 1.13. *Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Entonces la distancia inducida por la norma, $d_{\|\cdot\|}\colon V \times V \to \mathbb{R}$, se define como*

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|.$$

Proposición 1.14. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, $(V, d_{\|\cdot\|})$ es un espacio métrico, es decir, $d_{\|\cdot\|}$ es una distancia en V.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de la norma. □

En $\mathbb{R}^n$, la distancia inducida por la norma 2 se llama *distancia euclidiana*. En adelante consideraremos siempre $\mathbb{R}^n$ con esta distancia a menos que se especifique de otro modo.

1.5. Ejercicios

1. Verifique que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas al inicio de la sección.

2. Verifique que el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno.

3. Sea V un espacio vectorial real y $p \in \mathbb{N}$. Sean $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p \in V$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$. Demuestre la igualdad:
$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j, \sum_{k=0}^{p} \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_j \beta_k \langle u_j, v_k \rangle.$$

4. En $\mathbb{R}^2$ considere la función $p\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde,
$$p(x, y) := x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 5x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$
Verifique que p es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

5. Escriba de manera detallada la demostración de la proposición 1.4.

6. De una condición necesaria y suficiente para tener la igualdad en la proposición 1.4. Demuestre su afirmación.

7. Demuestre que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas en $\mathbb{R}^n$.

8. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Decimos que x y y son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$. Demuestre que si x y y son ortogonales, entonces
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

9. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sean $a, b \in V$. Demuestre que
$$\|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|.$$

10. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y considere su norma inducida. Determine cuándo se cumple la igualdad $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

11. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre la identidad del paralelogramo:
$$\|x+y\| + \|x-y\| = 2(\|x\| + \|y\|)^2.$$

12. Verifique que la función raíz cuadrada satisface las condiciones de la definición 1.8 y las hipótesis del lema 1.9.

13. Escriba de manera explícita la norma inducida por el producto interno y la distancia inducida por la norma del ejercicio 4.

14. Demuestre el corolario 1.11 y redacte una interpretación geométrica.

15. De una demostración detallada de la proposición 1.14.

2. Topología de $\mathbb{R}^n$

2.1. Preliminares: Familias de conjuntos

Sea X un conjunto. Denotamos el conjunto potencia de X como $\mathcal{P}(X)$ y al complemento de X por X^c.

Definición 2.1. *Sean X e I conjuntos y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Una familia de conjuntos indexada en I es una función $f\colon I \to \mathcal{U}$.*

Los elementos de la familia son los valores de la función f. En este caso, denotamos por U_α a cada uno de los valores de f, es decir, si $f\colon I \to \mathcal{U}$ es una familia de conjuntos,

$$U_\alpha \coloneqq f(\alpha).$$

Así, denotamos a la familia de conjuntos como $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Ejemplo 2.2. *Sean X un conjunto no vacío, $I \coloneqq \{1, 2, 3\}$. Sean $R, S, T \subseteq X$. Definimos $f\colon I \to \{R, S, T\}$ mediante $f(1) \coloneqq R$, $f(2) \coloneqq S$ y $f(3) \coloneqq T$. Entonces, $U_1 = R$, $U_2 = S$ y $U_3 = T$, y $(U_\alpha)_{\alpha\in I} = (U_1, U_2, U_3) = (R, S, T)$.*

Ejemplo 2.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el conjunto $\left(\frac{1}{n}, 1\right) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donde $f(n) = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ es una familia de conjuntos. Un modo convencional de denotar a esta familia es $\left(\left[\frac{1}{n}, 1\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definición 2.4 (Unión de una familia arbitraria de conjuntos)**.** *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una colección arbitraria de conjuntos. Entonces,*

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \iff \exists\alpha \in I,\ x \in U_\alpha.$$

Definición 2.5 (Intersección de una familia arbitraria de conjuntos)**.** *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una colección arbitraria de conjuntos. Entonces,*

$$x \in \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha \iff \forall\alpha \in I,\ x \in U_\alpha.$$

Ejemplo 2.6. *Considere la familia $\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{k}\right) = (0, 1)$.*

Demostración. Si $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$. Luego, $0 < x$ y $x < \frac{1}{k} < 1$. Por lo que $x \in (0, 1)$.

Si $x \in (0, 1)$, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} > n_0$, esto es, $\frac{1}{n_0} > x$. Por lo tanto, $x \in \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$. Luego, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{k}\right)$. $\square$

Ejemplo 2.7. *Considere la familia* $\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

Demostración. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{0\} \subseteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Luego, $\{0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. De manera equivalente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x| < \frac{1}{n}$. Es decir, $x = 0$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \{0\}$. □

Proposición 2.8 (Leyes de Morgan)**.** *Sea* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$. *Entonces se satisfacen*

a) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha^c$.

b) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha^c$.

Demostración. Ejercicio. □

2.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Comenzaremos esta sección con definiciones.

Definición 2.9. *Sea* $a \in \mathbb{R}^n$ *y* $\varepsilon > 0$. *Definimos la bola con centro en* a *y radio* ε *como el conjunto*

$$B(a, \varepsilon) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| < \varepsilon\}.$$

Definición 2.10. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Decimos que* A *es un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$ *si para todo* $a \in A$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$B(a, \delta) \subseteq A.$$

Ejemplo 2.11. *Para cada* $a \in \mathbb{R}^n$ *y cada* $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon)$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $x \in B(a, \varepsilon)$. Entonces, $\|x - a\| < \varepsilon$. Sea $r \coloneqq \varepsilon - \|x - a\|$ y sea $y \in B(x, r)$. Entonces, aplicando la desigualdad del triángulo y acotando $\|y - x\| < r$, tenemos

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $y \in B(a, \varepsilon)$. Como y fue arbitrario, concluimos que $B(x, r) \subseteq B(a, \varepsilon)$. Así, $B(a, \varepsilon)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. □

Proposición 2.12. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. $\mathbb{R}^n$ *y* $\varnothing$ *son conjuntos abiertos.*
2. *Sea* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ *una familia de conjuntos abiertos. Entonces,* $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ *es abierto.*
3. *Sean* U_1 *y* U_2 *abiertos. Entonces,* $U_1 \cap U_2$ *es abierto.*

Demostración. 1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $B(a,1) \subseteq \mathbb{R}^n$, por definición. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es abierto. Por otro lado, $\varnothing$ es abierto por vacuidad.

2. Sea $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Entonces, existe $\alpha_1 \in I$ tal que $x \in U_{\alpha_1}$. Sabemos que para cada $\alpha \in I$, U_α es abierto. Luego, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq U_{\alpha_1} \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ es abierto.

3. Sea $x \in U_1 \bigcap U_2$. Entonces $x \in U_1$ y $x \in U_2$. Por lo tanto, existe $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que
$$B(x,r_1) \subseteq U_1, \qquad B(x,r_2) \subseteq U_2.$$
Hacemos $r \coloneqq \text{mín}\{r_1, r_2\}$. Sea $y \in B(x,r)$. Entonces,
$$\|y - x\| < r \le r_1, \qquad \|y - x\| < r \le r_2.$$
Por lo tanto, $y \in B(x,r_1) \subseteq U_1$ y $y \in B(x,r_2) \subseteq U_2$. Luego, $B(x,r) \subseteq U_1 \bigcap U_2$. Es decir, $U_1 \bigcap U_2$ es abierto.

□

Definición 2.13. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que V es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ si V^c es abierto.*

Note que las definiciones de abierto y cerrado no se excluyen entre sí. Que un conjunto no sea abierto no implica que sea cerrado y viceversa.

Proposición 2.14. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *$\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son conjuntos cerrados.*
2. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces, $\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha$ es cerrado.*
3. *Sean U_1 y U_2 abiertos. Entonces, $U_1 \bigcup U_2$ es abierto.*

Demostración. Ejercicio. □

2.3. Puntos interiores, de adherencia y de acumulación

Definición 2.15. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in X$. Decimos que a es punto interior de X si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \subseteq X$.*

Definimos el interior de X, X°, como el conjunto de todos los puntos interiores de X:
$$X^\circ \coloneqq \{a \in X\colon\ \exists\, r > 0,\ B(a,r) \subseteq X\}.$$

Proposición 2.16. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces X° es abierto.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Definición 2.17. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Decimos que a es punto de adherencia de X, si para cada $\varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap X \neq \varnothing$.*

Definimos la cerradura de X, $\overline{X}$, como el conjunto de todos los puntos de adherencia de X:

$$\overline{X} := \{y \in \mathbb{R}^n : \ \forall\, \varepsilon > 0, \ B(y,\varepsilon) \cap X \neq \varnothing\}$$

Proposición 2.18. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, $\overline{X}$ es cerrado.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Proposición 2.19. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces X es cerrado si y solo si $\overline{X} = X$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponemos que X es cerrado. De la definición de $\overline{X}$, tenemos $X \subseteq \overline{X}$. Por otro lado, sea $a \in \overline{X}$ y supongamos que $a \notin X$. Como X es cerrado, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq X^c$. Luego, $B(a,r) \bigcap X \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción, pues $a \in \overline{X}$. Por lo tanto, $a \in X$. Como a fue arbitrario, $\overline{X} \subseteq X$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\overline{X} = X$. Por la proposición 2.18, se tiene el resultado.

$\square$

Definición 2.20. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Decimos que a es punto de acumulación de X, si para todo $\varepsilon > 0$, $(B(a,\varepsilon)\backslash\{a\}) \bigcap X \neq \varnothing$.*

Definimos el conjunto derivado de X, X' como el conjunto de todos sus puntos de acumulación:

$$X' := \{a \in \mathbb{R}^n : \ \forall\, \varepsilon > 0 \ (B(a,\varepsilon)\backslash\{a\})\}.$$

2.4. Ejercicios

1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $A_k := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \geq k\}$. Demuestre que

   a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_{k+1} \subseteq A_k$.

   b) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A_1$.

2. Demuestre la proposición 2.8.

3. En los siguientes incisos, muestre que cada conjunto es abierto y haga un dibujo del conjunto:

a) $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$.

b) $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \|x\|_1 \leq 1\}$.

c) $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 < x_1 < x_2\}$.

4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\bigcap_{j=1}^n U_j$ es abierto. Sugerencia: Seguir la demostración del inciso 3. de la proposición 2.12.

5. Dar un ejemplo de una familia de abiertos tal que su intersección no es un conjunto abierto.

6. Demuestre la proposición 2.14.

7. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{a\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

8. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

9. Demuestre la proposición 2.16.

10. En $\mathbb{R}$, sea $A \coloneqq (0, 1]$. Demuestre que A no es abierto ni cerrado. Encontrar $\overline{A}$ y A°.

11. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que $X \subseteq \overline{X}$.

12. Demuestre la proposición 2.18.

13. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que X' es cerrado.

14. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\overline{X} = X \cup X'$.

3. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 3.1 (Sucesión en $\mathbb{R}^n$)**.** *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el valor de a en k, se llama k–ésimo término de la sucesión.*

Identificamos cada término con un subíndice:

$$a(k) \coloneqq a_k.$$

Denotaremos a toda la sucesión por $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Note que cada sucesión en $\mathbb{R}^n$ determina n sucesiones en $\mathbb{R}$, pues para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$a^k = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k),$$

donde, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, a_j^k es la entrada j–ésima del k–ésimo término de la sucesión.

Ejemplo 3.2. *En $\mathbb{R}^2$, sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k \coloneqq \left(\frac{1}{k}, \frac{k^2}{k+1}\right)$. En este caso, $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_2^k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{k}{k^2+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Definición 3.3. *Sean $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *Se define la sucesión suma $((a+b)^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$(a+b)_k \coloneqq a_k + b_k.$$

- *Se define la sucesión producto $((ab)^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$(ab)_k \coloneqq a_k b_k.$$

- *Se define la sucesión producto por escalar $(\lambda a^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$(\lambda a)_k \coloneqq \lambda a_k.$$

3.1. Sucesiones convergentes

Definición 3.4 (Límite de una sucesión)**.** *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $(x^k)_{k\in\mathbb{R}^n}$ es una sucesión convergente si existe $l \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,*

$$\|x^n - l\| < \varepsilon.$$

En ese caso, decimos que l es el límite de la sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.5. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Entonces, su límite es único.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Proposición 3.6. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Entonces, la sucesión es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Proposición 3.7. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es a, si y solo si, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión $(a_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y su límite es a_j.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es a. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\|x^n - l\| < \varepsilon$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Por el corolario 1.11, tenemoos

$$|x_j^n - l_j| \leq \|x^n - l\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión $(x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a l_j en $\mathbb{R}$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión $(a_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y su límite es a_j. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existen $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{N}$ tales que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, si $n > N_j$, entonces

$$|x_n^k - l_j| < \frac{\varepsilon}{N_j}.$$

Haciendo $N := \text{máx}\{N_1, \dots, N_n\}$, si $n > N$, por el corolario 1.11,

$$\|x^n - l\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j^k - l_j| < \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición 3.8 (Propiedades de los límites)**.** *Sean $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes en $\mathbb{R}^n$, $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}$. Entonces,*

i) $\text{lím}_{k\to\infty}(a+b)_k = \text{lím}_{k\to\infty} a_k + \text{lím}_{k\to\infty} b_k$.

ii) $\text{lím}_{k\to\infty}(\lambda a)_k = \text{lím}_{k\to\infty} \lambda_k \, \text{lím}_{k\to\infty} a_k$.

iii) Sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces, $\text{lím}_{k\to\infty}(\gamma a)_k = \gamma \, \text{lím}_{k\to\infty} a_k$.

Demostración. Hacemos $l_1 := \text{lím}_{k\to\infty} a_k$ y $l_2 := \text{lím}_{k\to\infty} b_k$.

i) Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existen N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > N_1$ y $j > N_2$, entonces
$$\|a^k - l_1\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|b^j - l_2\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sea $N := \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, si $m \geq N$,
$$\|a + b - l_1 - l_2\| \leq \|a - l_1\| + \|b - l_2\| < \varepsilon.$$

ii) Sea $\varepsilon > 0$. Si $\gamma = 0$, se tiene el resultado. Supongamos que $\gamma \neq 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$,
$$\|a^n - l_1\| \leq \frac{\varepsilon}{|\gamma|}.$$
Luego, para cada $n > N$,
$$\|\gamma a^n - \gamma l_1\| = |\gamma|\|a^n - l_1\| < \varepsilon.$$

iii) Ejercicio.

□

Proposición 3.9. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $a \in \overline{X}$ si y solo si existe una sucesión de elementos de X, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que* $\lim_{k\to\infty} x^k = a$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $a \in \overline{X}$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$,
$$X \bigcap B(a, \frac{1}{m}) \neq \varnothing.$$
Sean $\varepsilon > 0$ y $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in X \bigcap B(a, \frac{1}{m})$. Notemos que si $n \geq m$, entonces $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq B\left(a, \frac{1}{m}\right)$.

Luego, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Por lo tanto, si $n > N$,
$$\|x^n - a\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de elementos de X que converge a a, es decir, una sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$. Entonces, por la definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$,
$$\|x^n - a\| < \varepsilon.$$
Esto es, $B(a, \varepsilon) \bigcap X \neq \varnothing$, pues todos los términos de la sucesión son elementos de X. Por lo tanto, $a \in \overline{X}$.

□

Corolario 3.10. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, X es cerrado si y solo si para cada $a \in X$ existe una sucesión de elementos de X, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que* $\lim_{k\to\infty} x^k = a$.

Demostración. Por la proposición 2.18, cada punto de X es de adherencia. □

3.2. Sucesiones de Cauchy y Teorema de Bolzano–Weierstrass

Definición 3.11. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función creciente. Entonces, $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 3.12 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción sobre n.

$n=1$ Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Sabemos que toda sucesión tiene una subsuseción creciente, digamos $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Como $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

$n+1$ Suponemos que si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces tiene una subsucesión convergente. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideramos la sucesión $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$, donde para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $j\in\{1,\dots,n\}$,

$$y_j^k \coloneqq x_j^k.$$

Es decir, para cada $k\in\mathbb{N}$, $y^k \coloneqq (x_1^k,\dots,x_{n-1}^k)$. Notamos que $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, pues $\|y\|\le\|x\|$. Por lo tanto, existe una función creciente $\alpha\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $(y^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Ahora, consideramos la sucesión $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde para cada $k\in\mathbb{N}$, $z^k\coloneqq x_{n+1}^{\alpha(k)}$. Entonces, $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$, pues $|z^k|\le\|x\|$. Por el caso $n=1$, existe una función creciente $\beta\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $(z^{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Tomando $\beta\circ\alpha\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, la sucesión $(x^{\beta\circ\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}^n$.

□

Definición 3.13 (Sucesiones de Cauchy)**.** *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Decimos que la sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si para cada $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m>N$, entonces*

$$\|x^n-x^m\|<\varepsilon.$$

Proposición 3.14. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como la sucesión es de Cauchy, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m>N$, entonces

$$\|x^n-x^m\|<\frac{1}{2}.$$

Luego, para cada $p>N$, utilizando la desigualdad del triángulo, $\|x^p\|<\frac{1}{2}+\|x^{N+1}\|$. Haciendo $M\coloneqq\max\{\|x^1\|,\dots,\|x^N\|,\frac{1}{2}+\|x^{N+1}\|\}$, tenemos el resultado. □

Proposición 3.15. *Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Por la proposición 3.14 y por el teorema 3.12, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsusección convergente. Es decir, existen $\alpha\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ creciente y $a\in\mathbb{R}^n$ tales que $\lim_{k\to\infty} x^{\alpha(k)} = a$.

Veamos que la sucesión original $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a a. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que si $n, m > N_1$, entonces

$$\|x^n - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, $\lim_{k\to\mathbb{N}} x^{\alpha(k)} = a$. Entonces, existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que si $p > N$, entonces

$$\|x^{\alpha(p)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo $N := \max\{N_1, N_2\}$, si $n, p > N$, tenemos

$$\|x^n - a\| \le \|x^n - x^{\alpha(p)}\| + \|x^{\alpha(p)} - a\| < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir, existe $a\in\mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n > N$,

$$\|x^n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $n, m > N$, se satisface

$$\|x^n - x^m\| < \|x^n - a\| + \|x^m - a\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de sucesiones en $\mathbb{R}^n$ con las operaciones de la definición 3.3 es un espacio vectorial.

2. Escriba la definición de sucesión convergente en términos de la distancia euclidiana y de bolas en $\mathbb{R}^n$.

3. Determine si las siguientes son sucesiones convergentes. De ser así, proponga el límite y demuestre que la sucesión converge a este punto.

   - Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $k\in\mathbb{N}$, $x^k := \left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)$.

- Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k := \left(\frac{k}{2k+1}, \frac{2k^2}{3k^2+1}\right)$.
- Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}^3$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k := \left(\frac{1-k}{2k}, \frac{k}{k^2+1}, \frac{2-k^2}{3+k^2}\right)$.

4. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$, $y^k := x^{p+k}$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} y^k = \lim_{k\to\infty} x^k$.

5. Demuestre la proposición 3.5.

6. Demuestre la proposición 3.6.

7. Demuestre el corolario 3.10.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$. Demuestre que $[a, b]$ es cerrado utilizando el corolario 3.10.

9. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, a es punto de acumulación de X si y solo si existe una sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $X \backslash \{a\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$.

10. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y sea $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión. Demuestre que $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

11. Demuestre que la sucesión $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

12. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $x^k := \sqrt{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que

    a) $\lim_{k\to\infty} |x^{k+1} - x^k| = 0$.

    b) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

13. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$, $|x^k - x^{k+1}| \leq \frac{1}{(k+1)!}$. Demuestre que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

14. Sean $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy. Utilizando la definición 3.13, demuestre que $(x^k + y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

4. Conjuntos compactos

El objetivo de esta sección es conocer a los conjuntos compactos y demostrar el teorema de Heine–Borel.

Definición 4.1 (Cubierta de un conjunto). *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una cubierta abierta de X si*

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

Si $J \subseteq I$, y $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ es cubierta de X, decimos que $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ es subcubierta de $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Definición 4.2 (Conjuntos compactos). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que K es compacto si para toda cubierta abierta de K, $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$, existen $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$ tales que $(U_{\alpha_j})_{j=1}^m$ es cubierta abierta de K.*

Note que para demostrar que un conjunto K es compacto, debemos dar una cubierta abierta arbitraria de K y encontrar una subcubierta finita.

Definición 4.3 (Conjuntos secuencialmente compactos). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Si toda sucesión de elementos de K, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tiene una subsucesión $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^{\alpha(k)} \in K$, decimos que K es secuencialmente compacto.*

Lema 4.4. *Sea $X \in \mathbb{R}^n$ secuencialmente compacto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que*

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon).$$

Demostración. Supongamos que no se satisface el lema. Es decir, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $x_1, \dots, x_m \in X$,

$$X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon).$$

Sea $x^1 \in X$. Por la suposición inicial, $X \not\subseteq B(x_1, \varepsilon_0)$. Luego, existe $x^2 \in X$ tal que $x^2 \notin B(x^1, \varepsilon_0)$ y $X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{2} B(x^j, \varepsilon_0)$. Supongamos que hemos escogido k elementos de X de manera que si $l, m \in \{1, \dots, k\}$ y $l \neq k$, entonces $\|x^l - x^m\| \geq \varepsilon_0$ y $X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x^j, \varepsilon_0)$. Escogemos $x^{k+1} \in X$ tal que $x^{k+1} \notin \bigcup_{j=1}^{k} B(x^j, \varepsilon_0)$. Así, de manera inductiva construimos una sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, si $l < m$, entonces

$$\|x^m - x^k\| \geq \varepsilon_0, \qquad X \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x^j, \varepsilon_0).$$

Como X es secuencialmente compacto, la sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsuseción convergente $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Por la proposición 3.15 $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$,

$$\|x^{\alpha(n)} - x^{\alpha(m)}\| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Por otro lado, si $n > m$, $\|x^{\alpha(n)} - x^{\alpha(m)}\| \geq \varepsilon_0$. Lo cual es una contradicción. □

Lema 4.5. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ secuencialmente compacto y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$. Entonces, existe ε_0 tal que para toda $x \in X$ existe $\alpha_x \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_x}$.*

Demostración. Supongamos que no se satisface el lema. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que para todo $\alpha \in I$, $B(x,\varepsilon) \nsubseteq U_\alpha$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $a^k \in X$ tal que para todo $\alpha \in I$, $B(a^k, \frac{1}{k}) \nsubseteq U_\alpha$. Consideramos la sucesión $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como X es secuencialmente compacto, $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsuseción convergente $(a^{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\mathbb{N}} a^{\beta(k)} \in X$. Sea $a := \lim_{k\to\mathbb{N}} a^{\beta(k)}$. Como $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es cubierta de X, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $a \in U_{\alpha_0}$. Además, U_{α_0} es abierto, por lo que existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq U_{\alpha_0}$.

Recordemos que $(a^{\beta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Entonces, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$,

$$\|x^{\beta(n)} - a\| < \frac{r}{2}.$$

Sea $x \in B(a^{\beta(l)}, \frac{1}{\beta(l)})$. Por la propiedad arquimediana, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\beta(N_2)} < \frac{r}{2}$. Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$ y $l > N$.

$$\|x - a^{\beta(l)}\| < \frac{1}{\beta(l)} < \frac{r}{2}.$$

Por otro lado,

$$\|x - a\| \leq \|x - a^{\beta(k)}\| + \|a^{\beta(k)} - a\| < r.$$

Es decir, $x \in B(a,r)$. Por lo tanto, $B(a^{\beta(l)}, \frac{1}{\beta(l)}) \subseteq B(a,r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Lo cual es una contradicción. □

Teorema 4.6 (Heine–Borel)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, son equivalentes*

i) K es compacto.

ii) K es cerrado y acotado.

iii) K es secuencialmente compacto.

Demostración. Realizaremos la demostración siguiendo $i) \implies ii)$, $ii) \implies iii)$ y $iii) \implies i)$.

$i) \implies ii)$ Suponemos que K es compacto. Veamos que K es acotado.

Consideramos la familia de bolas $(B(0,n))_{n\in\mathbb{N}}$. Esta familia es cubierta de K. Como K es compacto, existen $N \in \mathbb{N}$ y $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(0, k_j).$$

Haceindo $r := \text{máx}\{k_1, \dots, k_N\}$, tenemos que $K \subseteq B(0, r)$. Es decir, K es acotado.

Ahora, veamos que K es cerrado. Para esto verificamos que K^c es abierto. Sea $a \in K^c$. Para cada $y \in K$, hacemos $r_y := \frac{\|y-a\|}{2}$. La familia de bolas $(B(y, r_y))_{y\in K}$ es cubierta de K. Como K es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ y $y_1, \dots, y_N \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(y_j, r_{y_j}).$$

Sean $\varepsilon := \text{mín}\{r_{y_1}, \dots, r_{y_N}\}$ y $x \in K$. Entonces, existe $l \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x \in B(y_l, r_{y_l})$. Luego, $\|x - y_l\| < r_l$. Por otro lado, de la desigualdad del triángulo, $\|x - y_l\| \leq \|x - a\| + \|y_l - a\|$. Entonces, tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \|x - a\| &\geq \|y_l - a\| - \|x - y_l\| \\ &\geq \|y_l - a\| - r_l \\ &= \|y_l - a\| - \frac{\|y_l - a\|}{2} = r_{y_l} \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $x \notin B(a, \varepsilon)$. Como x fue arbitrario, $K \subseteq B(a, \varepsilon)^c$. Luego, $B(a, \varepsilon) \subseteq K^c$.

$ii) \implies iii)$ Suponemos que K es cerrado y acotado. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de K. Como K es acotado, por el teorema 3.12 $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x^{\alpha(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Sea $a := \text{lím}_{k\to\infty} x^{\alpha(k)}$. Como K es cerrado, por el corolario 3.10, $a \in K$. Por lo tanto, K es secuencialmente compacto.

$iii) \implies i)$ Suponemos que K es secuencialmente compacto. Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de K. Por el lema 4.5 existe ε_0 tal que para cada $x \in K$ existe $\alpha \in I$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subseteq U_\alpha$. Por el lema 4.4 existen $s \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_s \in K$ tales que $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} B(x, \varepsilon_0)$. Luego, para cada $j \in \{1, \dots, s\}$ existe $\alpha_j \in I$ tal que $B(x_j, \varepsilon_0) \subseteq U_{\alpha_j}$. Por lo tanto,

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} U_{\alpha_j}. \qquad \square$$

Ejercicios

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{a\}$ es compacto.

2. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es compacto.

3. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un conjunto compacto.

4. Sean A y B conjuntos compactos. Demuestre que $A \cup B$ es compacto.

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos compactos. Demuestre que $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ es compacto.

6. Sea $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos compactos. Demuestre que $\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha$ es compacto.

7. Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y $V \subseteq K$ cerrado. Utilizando la definición 4.2, demuestre que V es compacto.

8. Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y $V \subseteq K$ cerrado. Utilizando el teorema 4.6, demuestre que V es compacto.

5. Funciones en $\mathbb{R}^n$

5.1. Generalidades de funciones

Definición 5.1. *Sean X, Y conjuntos. Una función entre X y Y, o de X a Y es una regla de asignación f tal que a cada $x \in X$ le es asignado un único $y \in Y$. En este caso, escribiremos $f\colon X \to Y$. Si $x \in X$, la asignación para x bajo f se denota por $f(x)$.*

Definición 5.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función. Sea $A \subseteq X$. La imagen de A bajo f es el conjunto*

$$f[A] \coloneqq \{y \in Y\colon\ \exists\, x \in A,\ f(x) = y\}. \tag{1}$$

Sea $B \subseteq Y$. La imagen inversa de B bajo f es el conjunto

$$f^{-1}[B] \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}. \tag{2}$$

Proposición 5.3. *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

i) $f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

ii) $f\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right] \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

Demostración. i) Sea $y \in f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Entonces, existe $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Luego, existe $\alpha \in I$ tal que $x \in U_\alpha$, por lo que $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Así, $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$. Es decir, $f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

Sea $y \in \bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$. Entonces, existe $\alpha \in I$ tal que $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Luego, existe $x \in U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Pero $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Por lo tanto, $y \in f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right] \subseteq f\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$.

ii) Sea $y \in f\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right]$. Entonces, existe $x \in \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Es decir, para todo $\alpha \in I$, $x \in U_\alpha$. Luego, para todo $\alpha \in I$, $y \in f\left[U_\alpha\right]$. Por lo tanto, $y \in \bigcap_{\alpha\in I} f\left[U_\alpha\right]$.

□

Proposición 5.4. *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

i) $f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}\left[U_\alpha\right]$.

ii) $f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha\right] = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}\left[U_\alpha\right]$.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 5.5. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Sean $A \coloneqq (-1, 2]$, $B \coloneqq [-3, 0)$ $C \coloneqq [1, 2]$. Calcular $f[A]$, $f[B]$, $f[A \cap B]$ y $f^{-1}[C]$.*

Demostración. Si $y \in f[A]$, existe $x \in A$ tal que $x^2 = y$. Es decir, $x \in (-1, 2]$. Entonces, $x^2 \in f[A]$ si y solo si $-1 < x \leq 2$. Luego, $1 < x^2 \leq 4$. Por lo tanto, $f[A] = (1, 4]$.

Si $y \in f[B]$, existe $x \in B$ tal que $x^2 = y$. Razonando como en el caso anterior, tenemos $f[B] = (0, 9]$.

$A \cap B = (-1, 0)$. Entonces, $f[A \cap B] = (0, 1)$. Por otro lado, es importante observar que $f[A] \cap f[B] = (1, 3]$. Por lo tanto, $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.

Si $x \in f^{-1}[C]$, existe $y \in C$ tal que $x^2 = y$. Es decir, $x^2 \in [1, 2]$. Luego, $1 \leq x^2 \leq 2$. Aplicando la raíz cuadrada tenemos $1 \leq |x| \leq \sqrt{2}$. Separando las desigualdades utilizando las propiedades del valor absoluto, $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ o $1 \leq x \leq \sqrt{2}$. Por lo tanto, concluimos que $x \in [-\sqrt{2}, -1] \bigcup [1, \sqrt{2}]$. □

Definición 5.6. *Sea $f\colon X \to Y$ una función.*

i) f es inyectiva si para todos $x, y \in X$, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.

ii) f es suprayectiva si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

iii) f es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

5.2. Funciones continuas en $\mathbb{R}^n$

Definición 5.7. *Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon K \to \mathbb{R}^m$, $a \in K$ y $l \in \mathbb{R}^m$. Decimos que l es el límite de f cuando x tiende a a si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.*

Si el límite de f cuando x tiende a a es $f(a)$, decimos que f es contínua en a.

Si f es continua en cada punto de K, decimos que f es continua en K.

Ejemplo 5.8. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1 x_2$. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^2$. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ estimamos la diferencia:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x_1 x_2 - a_1 a_2| \\ &\leq |x_2||x_1 - a_1| + |a_1||x_2 - a_2| \\ &\leq (\|x\| + \|a\|)\|x - a\|. \end{aligned}$$

Supongamos que $\|x-a\|<1$. Entonces, $\|x\|-\|a\| \leq \|x-a\|<1$. Por lo que, para cada $x \in B(a,1)$, $\|x\|<1+\|a\|$. Haciendo $\delta := \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2\|a\|}\right\}$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)-f(a)| &\leq (\|x\|+\|a\|)\|x-a\| \\ &\leq (1+2\|a\|)\|x-a\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.9. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $a \in X$. Entonces, f es continua en a si y solo si para cada sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\text{lím}_{k\to\infty} x^k = a$, se tiene $\text{lím}_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en a. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\text{lím}_{k\to\mathbb{N}} x^k = a$. Queremos verificar que $\text{lím}_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x-a\|<\delta$ entonces $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$. Como $\text{lím}_{k\to\mathbb{N}} x^k = a$, para δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces, $\|x^n - a\| < \delta$. Por lo tanto, si $n > N$, $\|f(x^n)-f(a)\|<\varepsilon$. Es decir, $\text{lím}_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\text{lím}_{k\to\mathbb{N}} x^k = a$, se satisface $\text{lím}_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$. Supongamos además, que f no es continua en a. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, si $\|x-a\|<\delta$ entonces $\|f(x)-f(a)\| \geq \varepsilon_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $x^k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$. Entonces, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\text{lím}_{k\to\infty} x^k = a$, por lo que $\text{lím}_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces, $\|f(x^n)-f(a)\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Por otro lado, $\varepsilon_0 \leq \|f(x^n)-f(a)\|$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f debe ser continua en a.

□

Definición 5.10. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$. Definimos las funciones:*

1. *$f+g\colon X \to \mathbb{R}^n$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x).$$

2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Hacemos $\alpha f\colon X \to \mathbb{R}^n$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x).$$

3. *Si $m=1$, hacemos $fg\colon X \to \mathbb{R}^n$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$

4. *Si $m=1$, sea $D_g := \{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}$. Hacemos $\frac{f}{g}\colon X \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in D_g$,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Proposición 5.11. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$ continuas en a. Entonces,*

1. *$f + g$ es continua en a.*

2. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, αf es continua en a.*

3. *Si $m = 1$, fg es continua en a.*

Demostración. Ejercicio $\square$

Proposición 5.12. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es continua en a si y solo si para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j es continua en a.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$, $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$|f_j(x) - f(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f_j es continua en a.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $\delta_j > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta_j$, entonces se tiene $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{m}$. Hagamos $\delta \coloneqq \min\{\delta_j\}_{j=1}^m$. Si $\|x - a\| < \delta$, entonces

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \sum_{j=1}^{m} |f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon. \quad \square$$

Proposición 5.13. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $a \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$ tales que $f[X] \subseteq Y$, f es continua en a y g es continua en $f(a)$. Entonces, $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^p$ es continua en a.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, g es continua en $f(a)$. Luego, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|y - f(a)\| < \delta_1$, entonces $\|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon$. Como f es continua en a, para δ_1 existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta_2$, entonces $\|f(x) - f(a)\| < \delta_1$. Por lo tanto, si $\|x - a\| < \delta_1$, tenemos que $\|g(f(x)) - g(f(a))\| < \varepsilon$. $\square$

Proposición 5.14. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, f es continua en X si y solo si para cada abierto $W \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f^{-1}[W] = X \bigcap U.$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en X y que $f^{-1}[W] \neq \varnothing$. Como W es abierto, para cada $x \in f^{-1}[W]$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon_x) \subseteq W$. Como f es continua, para cada ε_x existe $\delta_x > 0$ tal que si $z \in B(x, \delta_x)$ entonces, $f(z) \in B(f(x), \varepsilon_x)$. Hagamos

$$U := \bigcup_{x \in f^{-1}[W]} B(x, \delta_x).$$

Entonces, U es abierto y $f^{-1}[W] \subseteq U \bigcap X$. Sea $y \in U \bigcap X$. Existe $x \in U$ tal que $y \in B(x, \delta_x)$. Luego, $f(y) \in B(f(x), \varepsilon_x) \subseteq W$. Por lo tanto, $y \in f^{-1}[W]$. Así, tenemos la contención $U \bigcap X \subseteq f^{-1}[W]$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para cada abierto $W \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}[W] = X \bigcap U$. Sean $a \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B(f(a), \varepsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}^m$, existe U abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)] = U \bigcap X.$$

Entonces, $a \in U \bigcap X$. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq U$. □

Proposición 5.15. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f \colon K \to \mathbb{R}^m$. Entonces, $f[K]$ es compacto.*

Demostración. Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta de $f[K]$. Por la proposición 5.14, para cada $\alpha \in I$ existe $W_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$f^{-1}[U_\alpha] = W_\alpha \bigcap K.$$

Si $x \in K$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $f(x) \in U_{\alpha_0}$. Luego, $x \in f^{-1}[U_{\alpha_0}] = W_{\alpha_0} \bigcap K \subseteq W_{\alpha_0}$. Como K es compacto, existen $p \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in I$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\alpha_j}$. Sea $y \in f[K]$. Entonces, existe $x \in K$ tal que $f(x) = y$. Luego, existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $x \in W_{\alpha_j}$. Por lo que $f(x) \in U_{\alpha_j}$. Así, $f[K] \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\alpha_j}$. □

Proposición 5.16. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f \colon K \to \mathbb{R}$ continua en K. Entonces, existen $a, b \in K$ tales que*

$$f(a) = \sup_{x \in K} f(x), \qquad f(b) = \inf_{x \in K} f(x),$$

Demostración. Por la proposición 5.15, $f[K]$ es compacto. Por el teorema 4.6, $f[K]$ es cerrado y acotado. Como $f[K]$ es acotado, existen $M := \sup_{x \in K} f(x)$ y $m := \inf_{x \in K} f(x)$. Como $f[K]$ es cerrado, $M, m \in f[K]$. Luego, existen $a, b \in K$ tales que $f(a) = M$ y $f(b) = m$. □

5.3. Funciones uniformemente continuas

Definición 5.17. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in X$, si $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

Ejemplo 5.18. *Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, T es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Hagamos $M \coloneqq \text{máx}\{\|Te_1\|, \ldots, \|Te_n\|\}$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\,\|T(e_j)\| \leq n^2\|x\|M.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Hacemos $\delta = \frac{\varepsilon}{n^2 M}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, tales que $\|x - y\| < \delta$. Entonces,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq n^2 M\|x - y\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, T es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Proposición 5.19. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en X. Entonces, f es continua en X.*

Demostración. Sea $a \in X$, y $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces, $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sin embargo, esta es la definición de continuidad en a. Por lo tanto, f es continua en a. $\square$

Proposición 5.20. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ continua en K. Entonces, f es uniformemente continua.*

Ejercicios

1. Demostrar la proposición 5.4.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq 2x_1 - x_2$ y sea $B = \{0\}$. Hallar $f^{-1}[B]$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$ y sean $B \coloneqq 1$, $C = (-2, 0)$. Hallar $f^{-1}[B]$ y $f^{-1}[C]$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2$. Demostrar que f no es inyectiva ni suprayectiva.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^3$. Demostrar que f es biyectiva.

6. Escriba la definición de límite de una función en términos de bolas y en términos de imagen inversa y contención de conjuntos.

7. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$. Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un espacio vectorial.

8. Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \coloneqq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \ f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n\}$. Demuestre que $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

9. Demuestre la proposición 5.11.

10. Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demuestre que T es continua en $\mathbb{R}^n$.

11. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, f es continua si y solo si para cada cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cerrado $C \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $f^{-1}[C] = B \bigcap X$.

12. Demuestre la proposición 5.15, mostrando que $f[K]$ es secuencialmente compacto.

13. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua. Demostrar que $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n\colon \ f(x) \neq 0\}$ es abierto.

14. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$. Demuestre que f no es continua en $(0, 0)$.

6. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

6.1. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Definición 6.1 (D1)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0. \tag{3}$$

Definición 6.2 (D2)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tales que φ es continua en a, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,*

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x). \tag{4}$$

La transformación lineal T en ambas definiciones, se llama diferencial de f en a.

Estas dos definiciones son aparentemente muy distintas. Veamos que son dos formas de referirnos al mismo objeto. Es decir que equivalentes.

Proposición 6.3. *La definición 6.1 y la definición 6.2 son equivalentes.*

Demostración. Revisaremos ambas implicaciones.

6.1 $\implies$ 6.2) Hacemos $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a; \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Como se satisface (3), haciendo $h := x-a$, φ es continua en a, y $\varphi(a) = 0$. Además, para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x).$$

6.2 $\implies$ 6.1) Como se satisface (4), para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}.$$

Haciendo $h := x-a$, como φ es continua en a y $\varphi(a) = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{h\to 0} \|\varphi(a+h)\| = 0. \qquad \square$$

En la mayoría de las ocasiones será más comodo trabajar con la definición 6.2, aunque en los libros de texto es más común encontrar la definición 6.1. Notemos también, que de la definición 6.2 es inmediato ver que si f es diferenciable en a, entonces es continua en a, por la continuidad de T y de φ.

Ejemplo 6.4. *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función constante. Entonces, f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Hagamos $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = 0$, y $\varphi(x) = 0$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + \|x - a\|\varphi(x).$$

Por lo tanto, f es diferenciable. □

Ejemplo 6.5. *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Hagamos $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = f(x)$ y $\varphi(x) = 0$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(a) + T(x - a) + \|x - a\|\varphi(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$. □

Proposición 6.6. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces, la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y la función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ de la definición 6.2 son únicas.*

Demostración. Supongamos que existe otra transformación lineal $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y otra función $\psi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tales que ψ es continua en a, $\psi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + S(x - a) + \|x - a\|\psi(x).$$

Entonces, para cada $x \in X$,

$$(T - S)(x - a) = \|x - a\|(\psi(x) - \varphi(a)).$$

Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $x^k := a + \frac{1}{k}e_j$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} x^k = a$. Además, X es abierto, por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$

tal que $B(a, \varepsilon_0) \subseteq X$. Por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x^n \in B(a, \varepsilon_0)$. Así, para todo $n > N$,

$$\begin{aligned}(T-S)(x^k - a) &= \|x^k - a\|(\psi(x^k) - \varphi(x^k)) \\ (T-S)\left(\frac{e_j}{k}\right) &= \frac{1}{k}(\psi(x^k) - \varphi(x^k)) \\ (T-S)e_j &= \psi(x^k) - \varphi(x^k).\end{aligned}$$

Como T, S, φ y ψ son continuas, al pasar al límite,

$$(T-S)e_j = 0.$$

Por lo tanto, $Te_j = Se_j$. Como j fue arbitrario, la igualdad se tiene para cada elemento de la base. Luego, $T = S$ y $\varphi = \psi$. $\square$

En adelante, la derivada de f en a será denotada como $\mathrm{d}f(a)$.

Proposición 6.7. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que $f = (f_1, \ldots, f_m)$, donde para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $f_j\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable en a si y solo si, para cada $j \in \{1, \ldots, \}$, f_j es diferenciable en a.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponemos que f es diferenciable en a. Entonces existe $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que φ continua en a, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x). \tag{5}$$

Note que $\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f(a)_1, \ldots, \mathrm{d}f(a)_m)$ y $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Además, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, φ_j es continua en a, $\varphi_j(a) = 0$ y $\mathrm{d}f(a)_j$ es lineal. Por la igualdad (5), para cada $x \in X$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$f_j(x) = f_j(a) + \mathrm{d}f(a)_j(x-a) + \|x-a\|\varphi_j(a).$$

Por lo tanto, f_j es diferenciable.

$\Longleftarrow$) Ahora, suponemos que para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, f_j es diferenciable. Entonces, existe $\varphi_j\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que φ_j es continua en a, $\varphi_j(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f_j(x) = f_j(a) + \mathrm{d}f_j(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi_j(x).$$

Hacemos $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $T\colon X \to \mathbb{R}^m$, donde $\varphi(x) = (\varphi_1(a), \ldots, m\varphi_m(a))$ y $Tx \coloneqq (\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_m(a))$. Luego, para cada $x \in X$,

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{bmatrix} + \|x-a\| \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix}.$$

Esto es, $f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)$. Por lo tanto, f es diferenciable en a.

$\square$

Proposición 6.8. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in \mathbb{R}^m$ y $f, g \colon X \to \mathbb{R}^m$. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

a) *$f+g$ es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a).$$

b) *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. αf es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(\alpha f)(a) = \alpha\,\mathrm{d}f(a).$$

c) *Si $m = 1$, fg es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$

d) *Si $m = 1$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)}{g(a)^2}.$$

6.2. Derivadas direccionales

Definición 6.9. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \colon X \to \mathbb{R}^m$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Definimos la derivada direccional de f en a en la dirección u, como*

$$\mathrm{D}_u f(a) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}.$$

Ejemplo 6.10. *Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Calcular las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^2$, tal que $\|u\| = 1$. Entonces,

$$\mathrm{D}_u f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1 u_2^2}{t(t^2u_1^2 + t^4u_2^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1u_2^2}{u_1^2 + t^2u_2^4}.$$

Luego,

$$\mathrm{D}_u f(0) = \begin{cases} 0, & u_1 = 0; \\ \frac{u_2^2}{u_1}, & u_1 \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la derivada direccional en 0 existe en todas direcciones. Sin embargo, f no es diferenciable en 0, debido a que f no es continua en 0. $\square$

Proposición 6.11. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en a, entonces existe $\mathrm{D}_u f(a)$ para cada $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$.*

Demostración. Como f es diferenciable en a, existe $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que φ es continua en a, $\varphi(a) = 0$ y para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(a).$$

Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_u f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}f(a)(tu) + \|tu\|\varphi(a+tu)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\,\mathrm{d}f(a)(tu) + |t|\|u\|\varphi(a+tu)}{t} = \mathrm{d}f(a)u.\end{aligned}$$

$\square$

Definición 6.12. *Sea $(e_j)_{j=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ definimos la derivada parcial de f respecto a x_j como*

$$\mathrm{D}_j f(a) \coloneqq \mathrm{D}_{e_j} f(a).$$

Para las derivadas parciales, es común encontrar en libros de texto la notación $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Proposición 6.13. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces,*

$$\mathrm{d}f(a) = \left[\mathrm{D}_j f_k(a)\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Demostración. Para cada $x \in X$, $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Entonces,

$$\mathrm{d}f(a)x = \sum_{j=1}^n x_j\,\mathrm{d}f(a)e_j = \sum_{j=1}^n x_j\,\mathrm{D}_j f(a).$$

Notemos que $\mathrm{D}_j f(a) = (\mathrm{D}_j f_1(a), \ldots, \mathrm{D}_j f_m(a))$. Por lo tanto,

$$\mathrm{d}f(a) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(a) & \cdots & \mathrm{D}_n f_1(a) \\ \mathrm{D}_1 f_2(a) & \cdots & \mathrm{D}_n f_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(a) & \cdots & \mathrm{D}_n f_m(a) \end{bmatrix}. \qquad \square$$

La matriz asociada a la transformación $\mathrm{d}f(a)$ se llama matriz jacobiana de f en a.

Proposición 6.14 (Regla de la cadena)**.** *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en a, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $f[X] \subseteq Y$, $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(a)$. Entonces, $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en a y*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\,\mathrm{d}f(a).$$

Demostración. Como f es diferenciable en a, existe $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que para cada $x \in X$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x).$$

Por otro lado, como g es diferenciable en $f(a)$, existe $\psi\colon Y \to \mathbb{R}^p$ tal que para cada $y \in Y$,

$$g(y) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(y - f(a)) + \|y - f(a)\|\psi(y).$$

Como $g[X] \subseteq Y$, para cada $x \in X$,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\psi(f(x)).$$

Luego,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(\mathrm{d}(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)) + \|\mathrm{d}(a)(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\psi(f(x)).$$

Hacemos $\Psi\colon X \to \mathbb{R}^p$, donde para cada $x \in X$,

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{\|\mathrm{d}(a)(x-a) + \varphi(x)\|x-a\|\|\|\psi(f(x))\|}{\|x-a\|}, & x \neq a; \\ 0, & x = a. \end{cases} \tag{6}$$

Φ es continua en a y $\Phi(a) = 0$ y para cada $x \in X$. Entonces,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))\mathrm{d}(a)(x-a) + \mathrm{d}f(a)\varphi(x)\|x-a\| + \|x-a\|\Phi(x).$$

Como φ y Φ son continuas en a, y $\varphi(a) = \Phi(a) = 0$, tenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a y $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\mathrm{d}(a)$. $\square$

6.3. Derivadas de orden superior

Definición 6.15. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Si las derivadas parciales de f en a existen y son continuas, decimos que f es continuamente diefrenciable en a.*

Definición 6.16. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ tal que existen sus derivadas parciales en a. Definimos las derivadas parciales de orden 2 en a como*

$$\mathrm{D}_{k,j} f(a) \coloneqq \mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f(a)).$$

Si las derivadas parciales de orden 2 de f en a existen y son continuas, f se dice dos veces continuamente diferenciable.

De manera secuencial, si existen las derivadas parciales de orden k de f en a y todas son continuas, decimos que f es k veces continuamente diferenciable en a.

En adelante, trabajaraemos con los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
C_a^1(X,\mathbb{R}^m) &\coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es continuamente diferenciable en } a\},\\
C_a^2(X,\mathbb{R}^m) &\coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es dos veces continuamente diferenciable en } a\},\\
C_a^k(X,\mathbb{R}^m) &\coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable en } a\}
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto de funciones k veces continuamente diferenciables en X como

$$C^k(X,\mathbb{R}^m) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{R}^m\colon\ f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable}\}.$$

Si $f \in C^k(X,\mathbb{R}^m)$, decimos que f es de clase C^k.

Si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas, decimos que f es infinitamente diferenciable. Así, definimos

$$C^\infty(X,\mathbb{R}^m) \coloneqq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(X,\mathbb{R}^m).$$

Proposición 6.17. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable en a. Entonces, f es diferenciable.*

Proposición 6.18. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^2(X,\mathbb{R})$. Entonces, para cada $j,k \in \{1,\dots,n\}$,*

$$\mathrm{D}_{jk} f(a) = \mathrm{D}_{kj} f(a).$$

Demostración. Para la demostración, basta pensar en $n = 2$. Sea $\lambda \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(h, j) \coloneqq f(a_1, a_2) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1 + h, a_2 + k).$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{R}$ hagamos $\varphi_k \colon bR \to \mathbb{R}$, donde para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k(t) \coloneqq f(t, a_2 + k) - f(t, a_2).$$

Notemos que $\varphi_k(a + h) - \varphi_k(a) = \lambda(h, k)$. Además φ_k es derivable y continua. Por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (a, a + h)$ tal que

$$\lambda(h, k) = \varphi_k(a + h) - \varphi_k(a) = \varphi_k'(\xi)h = (\mathrm{D}_1 f(\xi, a_2 + k) - \mathrm{D}_1 f(\xi, a_2))h.$$

Como $f \in C^2(X, \mathbb{R})$, $\mathrm{D}_1 f(x)$ es continua y derivable. Aplicando el teorema del valor medio de nuevo, existe $\nu \in (a_2, a_2 + k)$ tal que

$$\lambda(h, k) = (\mathrm{D}_1 f(\xi, a_2 + k) - \mathrm{D}_1 f(\xi, a_2))h = \mathrm{D}_{21} f(\xi, \nu)hk.$$

Así, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $q_1 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda(t, t) = \mathrm{D}_{21} f(q_1)t^2.$$

Siguiendo el mismo procedimiento pero con $\mathrm{D}_{12} f(x)$, concluimos que existe $q_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda(t, t) = \mathrm{D}_{12} f(q_2)t^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\lambda(t, t)}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \mathrm{D}_{21} f(p_1) = \mathrm{D}_{21} f(a) \\ \lim_{t \to 0} \frac{\lambda(t, t)}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \mathrm{D}_{12} f(p_2) = \mathrm{D}_{12} f(a). \end{aligned}$$

Como el límite de una función es único, concluimos que $\mathrm{D}_{21} f(a) = \mathrm{D}_{12} f(a)$. □

Definición 6.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un multi–indice es $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*
Definimos la longitud de un multi–índice como

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Definimos el factorial del multi–índice como

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y α un milti–índice de dimensión n. Entonces,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Sea $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and α a multi–idice de dimensión k. Entonces, para cada $x \in X$

$$D^\alpha f(x) := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_k^{\alpha_k} f(x).$$

Proposición 6.20 (Fórmula de Taylor)**.** *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierno, $k \geq 1$, $f \in C^{k+1}(X, \mathbb{R})$ y $a \in X$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in B(a, \delta)$ existe $\xi \in B(a, \delta)$ tal que*

$$f(x) = f(a) + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{(k+1)!}.$$

Demostración. Como X es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq X$. Sea $x \in B(a, \delta)$. Hacemos $\sigma \colon [0,1] \to X$ y $h \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que para cada $t \in [0,1]$, $\sigma(t) = a + t(x - a)$ y $h(t) = f(\sigma(t))$. Así, $\sigma(0) = a$, $\sigma(1) = x$, $h(0) = f(a)$ y $h(1) = f(x)$.
Notamos que $h \in C^{k+1}([0,1], \mathbb{R})$. Entonces, existe $s \in (0,1)$ tal que

$$h(1) = h(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{f^{(k+1)}(s)}{(k+1!)}. \tag{7}$$

Además, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
h'(0) &= \sum_{j_1=1}^{n} D_{j_1} f(a)(x_{j_1} - a_{j_1}) = \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha (x-a)^\alpha, \\
h''(0) &= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} D_{j_2} D_{j_1} f(a)(x_{j_1} - a_{j_1})(x_{j_2} - a_{j_2}) = \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha. \\
&\vdots \\
h^{(k)}(0) &= \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha, \\
h^{(k+1)}(0) &= \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (7), tenemos

$$f(x) = f(a) + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{(k+1)!}.$$ □

Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es diferenciable en a si y solo si f es diferenciable en a.

2. Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1 x_2$. Demostrar que f es diferenciable en a.

3. Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq x_1^2 + x_2^2$. Probar que f es diferenciable y hallar $\mathrm{d}f(a)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$. ¿Es f diferenciable en 0?.

5. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Utilizando la definición 6.1, demuestre que si f es diferenciable en a entonces es continua en a.

6. Demostrar la proposición 6.8.

7. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2}$. Calcular las derivadas parciales de f y construir su matríz jacobiana.

8. Demostrar que la función (6) es continua en a.

9. Calcular la derivada de $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$, donde
$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u(x, y) = \mathrm{e}^{-x-y}, \quad v(x, y) = \mathrm{e}^{xy}.$$

10. Hacer un diagrama que explique cómo se relacionan las funciones continuas, funciones diferenciables y funciones continuamente diferenciables.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$
Calcular $\mathrm{D}_{12} f(0)$ y $\mathrm{D}_{21} f(0)$. ¿Porqué se obtienen estos valores?

12. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2.$$
Calcular las derivadas de orden 2 de f. Escribir los resultados utilizando la notación de multi–índice.

13. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$ para la función del ejercicio anterior.

14. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden al rededor de un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$ para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde para cada $x \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{x_1}\cos(x_2).$$

7. Máximos y mínimos de una función de $\mathbb{R}^n$

7.1. Formas cuadráticas

Definición 7.1. *Sea V un espacio vectorial real. Una forma bilineal en V es una función $f\colon V\times V\to\mathbb{R}$ si es lineal respecto a cada argumento. Es decir,*

$$\begin{aligned} f(\alpha u+v,w)&=\alpha f(u,w)+f(v,w) && \forall\, u,v,w\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\\ f(u,\alpha w+v)&=\alpha f(u,w)+f(v,w) && \forall\, u,v,w\in V,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2. *El producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$.*

Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos $f_A\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mediante la regla

$$f_A(x,y)\coloneqq x^\top Ay.$$

Entonces, f_A es una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$.

Definición 7.3. *Sea V un espacio vectorial real. Una función $q\colon V\times V\to\mathbb{R}$ se llama forma cuadrática si existe una forma bilineal tal que para cada $x\in V$,*

$$q(x)=f(x,x).$$

En este caso, decimos que q es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal f.

Ejemplo 7.4. *La norma 2 en $\mathbb{R}^n$ es la forma cuadrática asociada al producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.*

Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz. Entonces, la forma cuadrática asociada a la forma bilineal f_A es $q_A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$q_A(x)\coloneqq f_A(x,x)=x^\top Ax.$$

En este caso, decimos que q_A es la forma cuadrática asociada a la matriz A.

Definición 7.5. *Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A se llama matriz definida positiva si la forma cuadrática asociada a A es positiva definida:*

$$x^\top Ax>0,\qquad \forall\,x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

En este caso, escribimos $A>0$.

Definición 7.6. *Sean $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k\in\{1,\ldots,n\}$, $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$. El menor principal de A ubicado en los renglones y columnas $i_1,\ldots,i_k$ se define mendiante*

$$M_A\left(i_1\cdots i_k\right)\coloneqq\det(A_{\{i_1,\ldots,i_k\}\times\{i_1,\ldots,i_k\}}).$$

Proposición 7.7 (Criterio de Sylvester)**.** *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Entonces,*

a) $A > 0$ *si y solo si, los menores principales de* A *son positivos.*

b) $A < 0$ *si y solo si, todos los menores de esquina de orden impar son negativos y todos los menores de esquina de orden par son positivos.*

7.2. Puntos críticos de una función

Definición 7.8. *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto y* $f \colon X \to \mathbb{R}$*.*
Si existe $a \in X$ *tal que para cada* $x \in X$*, si* $f(x) \leq f(a)$*, decimos que* f *tiene un máximo absoluto en* a*.*
Si existe $a \in X$ *tal que para cada* $x \in X$*, si* $f(x) \geq f(a)$*, decimos que* f *tiene un mínimo absoluto en* a*.*
Si existe $a \in X$ *y* $\delta > 0$ *tal que* $B(a, \delta) \subseteq X$*. Si para cada* $x \in B(a, \delta)$*,* $f(x) \geq f(a)$*, decimos que* f *tiene un mínimo local en* a*.*
Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto,* $a \in X$ *y* $f \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Supongamos que* $\mathrm{d}f(a) = 0$*, es decir, que para cada* $j \in \{1, \dots, n\}$*,* $\mathrm{D}_j f(a) = 0$*. Entonces, decimos que* a *es un punto crítico de* f*.*

Proposición 7.9. *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto,* $a \in X$ *y* $f \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Supongamos que* a *es mínimo local de* f*. Entonces,* a *es punto crítico de* f*.*

Demostración. Como a es máximo local, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B(a, \delta)$

$$f(x) \leq f(a).$$

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, para cada $t > 0$,

$$\frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} \geq 0$$

Y, para cada $t > 0$,

$$\frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} \leq 0$$

Como $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, existe la derivada parcial. Es decir,

$$\mathrm{D}_j f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0. \qquad \square$$

Definición 7.10. *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto,* $a \in X$ *y* $f \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Si* a *es punto crítico de* f *pero no es máximo o mínimo local de* f*, se llama punto silla de* f*.*

Definición 7.11. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in X$ y $f \in C^2(X, \mathbb{R})$. Definimos la matriz hessiana de f en a como*

$$H_f(a) \coloneqq [D_{jk}f(a)]_{j,k=1}^n = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1^2 f(a) & \mathrm{D}_{12} f(a) & \cdots & \mathrm{D}_{1n} f(a) \\ \mathrm{D}_{21} f(a) & \mathrm{D}_2^2 f(a) & \cdots & \mathrm{D}_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_{n1} f(a) & \mathrm{D}_{n2} f(a) & \cdots & \mathrm{D}_n^2 f(a) \end{bmatrix}.$$

Proposición 7.12. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C^2(X, \mathbb{R})$. Supongamos que a es un punto crítico de f en X. Entonces:*

a) Si $H_f(a) > 0$, f tiene un mínimo local en a.

b) Si $H_f(a) < 0$, f tiene un máximo local en a.

7.3. Multiplicadores de Lagrange

En ocasiones es necesario encontrar máximos o mínimos de funciones sujetas a ciertas restricciones. En esos casos es útil la siguiente proposición.

Proposición 7.13 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Supongamos que f restringida a $g_1, \ldots, g_n$ tiene un máximo o mínimo en a. Entonces, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathrm{d}f(a)^\top = \sum_{k=1}^m \lambda_k (\mathrm{d}g(a))^\top$$

Ejemplo 7.14. *Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla $f(x) \coloneqq 2 + x_1^2 + x_2^2$, y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $g(x) \coloneqq x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 1$. Hallar los máximos y mínimos de f sujeta a $g(x) = 0$.*

Demostración. Primero calculamo $\mathrm{d}f$ y $\mathrm{d}g$ en puntos arbitrarios.

$$\mathrm{d}f(x)^\top = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}g(x)^\top = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, planteamos la igualdad:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}.$$

Y obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \lambda 2x_1, \\ 2x_2 &= \lambda \frac{1}{2} x_2. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $\lambda = 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, $x_2 = 0$. Como buscamos los máximos y mínimos de f sujeta a $g(x) = 0$, sustituimos x_2 en g:

$$0 = x_1^2 - 1.$$

Por lo tanto, $x_1 = 1$ ó $x_1 = -1$. Entonces, los puntos críticos de f sujeta a $g(x) = 0$ para $\lambda = 1$, son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

Por otro lado, utilizando la segunda ecuación del sistema de ecuaciones, $\lambda = 4$. Sustituyendo en la primer ecuación, $x_1 = 0$. Luego, utilizando $g(x) = 0$, tenemos

$$0 = \frac{1}{4} x_2^2 - 1.$$

Luego, $x_2 = 2$ ó $x_2 = -2$. Por lo tanto, los puntos críticos de f sujeta a $g(x) = 0$ para $\lambda = 4$, son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Evaluando en f, determinamos si son máximos o mínimos:

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= 3, \\ f(-1, 0) &= 3, \\ f(0, 2) &= 4, \\ f(0, -2) &= 4. \end{aligned}$$

Así, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son mínimos, mientras que $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son máximos. $\square$

7.4. Ejercicios

1. Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x, y) \coloneqq 4x_1 y_1 - 7x_2.$$

   Determinar si f es una forma bilineal.

2. Sea V un espacio vectorial y $q \colon V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Demuestre que q es homogénea de grado 2, es decir,

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \quad \forall\, x \in V,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $a \in U$ y $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Supongamos que a es punto crítico de f y además,
$$\mathrm{D}_1^2 f(a)\mathrm{D}_2^2 f(a) - (\mathrm{D}_{12} f(a))^2 < 0.$$
Demostrar que a es punto silla de f.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) \coloneqq \sin(x_1^2 + y_2^2)$. ¿Cuáles son los puntos críticos de f?

5. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son máximos, mínimos o puntos silla:

   a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x_1^2 + x_2^2$.
   b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$.
   c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$
   d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2 - 2xy + 2y^2$.

6. Sean $D \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ \|x\| \leq 1\}$ y $f\colon D \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) \coloneqq (x^2 + y^2)^4$. Hallar los máximos y mínimos de f.

7. En los siguientes ejercicios, hallar los máximos y minímos de f sujeta a $g(x) = 0$. Además, dar una interpretación geométrica de f y las restricciones.

   a Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $f(x) \coloneqq x_1 + x_3$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 1$.
   b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $f(x) \coloneqq x_1^2 - x_2^2$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g(x) \coloneqq x_1^2 + x_2^2 - 1$.
   c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $f(x) \coloneqq 3x_1^2 + x_2$, $g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g_1(x) \coloneqq 4x_1 - 3x_2 - 9$ y $g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada mediante la regla $g_2(x) \coloneqq x_1^2 - x_3^2 - 9$.

8. Consideremos la recla $Ax_1 + Bx_2 = C$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $p \in \mathbb{R}^2$. Encontrar el punto de la recta más cercano a p.