1. Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que relaciona una variable independiente con una función de dicha variable y sus derivadas, es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

El orden de una ecuación diferencial ordinaria es el de la derivada de orden mayor en la ecuación. Si Φ es una función que satisface la ecuación diferencial, se llama *solución de la ecuación diferencial*, es decir, Φ es una solución si satisface

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Ejemplo 1.1. *Sea k un número real. La ecuación*

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + k\varphi = 0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 en la variable φ.

Una ecuación diferencial se llama lineal si es una expresión de la forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_k(x)\,\frac{\mathrm{d}^{(k)}y}{\mathrm{d}x^k} = g(x),$$

donde, para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, a_k es una función. Si $g(x) = 0$, decimos que la ecuación está en su forma homogénea.

2. Ecuaciones de orden 1

2.1. Isoclinas

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ se puede interpretar como la familia de lugares geométricos donde la solución a la ecuación tiene la misma inclinación. Por un lado, para cada $c \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = c$ es una curva de nivel asociada a c. Por otro lado, en esas curvas de nivel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c$.

2.2. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación de orden 1 en la que los coeficientes se descomponen en productos de funciones independientes de x y y se llama de variables separables. Estas ecuaciones son de la forma

$$a_1(x)b_1(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)b_0(y) = 0. \tag{1}$$

Asumiendo que $a_1(x)b_0(y) \neq 0$, reescribimos la ecuación como

$$\frac{b_1(y)}{b_0(y)}\mathrm{d}\, y + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\mathrm{d}\, x = 0.$$

Así, la solución general de esta ecuación es

$$\int \frac{b_1(y)}{b_0(y)}\,\mathrm{d}y + \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,\mathrm{d}x = C.$$

Ejemplo 2.1. *Hallar la solución general a la ecuación*

$$(1+\mathrm{e}^x)y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x\,.$$

Haciendo $a_1(x) = 1+\mathrm{e}^x$, $b_1(y) = y$, $a_0(x) = -\mathrm{e}^x$ y $b_1(y) = 1$, logramos escribir la ecuación de la forma (1). Por lo tanto, es de variables separables. Obtenemos la solución general integrando:

$$\int \frac{b_1(y)}{b_0(y)}\,\mathrm{d}y + \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{y^2}{2} - \ln(1+e^x).$$

Luego,

$$y = \sqrt{\ln(1+\mathrm{e}^x)+C}.$$

2.3. Ecuaciones homogéneas

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama homogénea de grado k si para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(tx) = t^k f(x). \tag{2}$$

Ejemplo 2.2. *Las siguientes funciones son homogéneas:*

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \ln(x) - \ln(y) + \frac{x+y}{x-y}$.

Una ecuación diferencial de orden 1 se llama homogénea si es de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{3}$$

donde, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función homogénea de grado 0.

De manera equivalente, la ecuación es homogénea si se escribe de la forma

$$P(x,y)\,\mathrm{d}y + Q(x,y)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Las ecuaciones homogéneas pueden ser transformadas en ecuaciones de variables separables utilizando el cambio de variable $y = xv$: Si tenemos la ecuación en la forma (3), para cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $y \in \mathbb{R}$, por (2),

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x,y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{x}{y}\right).$$

Haciendo $v \coloneqq \frac{x}{y}$ y $g(v) \coloneqq f(1,v)$, la ecuación (3) se escribe como

$$v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = g(v).$$

De esta última expresión se obtiene una ecuación de variables separables:

$$\frac{\mathrm{d}v}{g(v) - v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Si una ecuación diferencial no es homogénea, en ocasiones se puede convertir en homogénea realizando el cambio de variable $y = z^\alpha$. En este caso, se deberá buscar el valor adecuado de α para que las funciones P y Q sean homogéneas del mismo grado.

Ejemplo 2.3. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$(x^2y^2 - 1)\,\mathrm{d}y + 2xy^3\,\mathrm{d}x = 0.$$

La ecuación no es homogénea, pues $P(x,y) = x^2y^2 - 1$ no es una función homogénea. Hacemos el cambio de variable $y = z^\alpha$, $\mathrm{d}y = \alpha z^{\alpha-1}\,\mathrm{d}z$:

$$(\alpha x^2 z^{3\alpha-1} - \alpha z^{\alpha-1})\,\mathrm{d}z + 2xz^{3\alpha}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Para que sea una ecuación homogénea se debe satisfacer $\alpha - 1 = 3\alpha + 1$, es decir, $\alpha = -1$. Sustituyendo el valor de α en la ecuación, y multiplicando por z^4, obtenemos

$$(z^2 - x^2)\,\mathrm{d}z + 2xz\,\mathrm{d}x = 0.$$

Esta última expresión es una ecuación homogénea. Para hallar la solución, hacemos el cambio de variable $z = vx$, $\mathrm{d}z = v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v$.

$$x(v^2 - 1)\,\mathrm{d}v + v(v^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Separando las variables, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{v^2-1}{v^3+v}\,\mathrm{d}v.$$

Integrando,

$$\ln x + C = \ln(v) - \ln(v^2+1).$$

Por lo tanto, la solución implícita es

$$C = \frac{x(v^2+1)}{v}.$$

Sustituyendo $v = \frac{1}{xy}$,

$$C = \frac{1+x^2y^2}{y}.$$

2.4. Ecuaciones exactas y factor integrante

Sean $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones y consideramos la ecuación

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Esta ecuación se llama exacta si las funciones satisfacen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En este caso, la solución es una función $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{d}\Psi(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Para hallar la solución $\Psi(x,y)$ debemos escoger M o N para integrar en la variable x o en la variable y, respectivamente y agregar una función de la otra variable. Supongamos que se ha escogido la función M, entonces

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y).$$

Luego, derivamos respecto a y e igualamos a N. Para hallar g cancelamos términos semejantes e integramos.

Ejemplo 2.4. *Resolver la ecuación*

$$(y\cos x + 2x\,\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + (\sin x + x^2\,\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Primero, identificamos las finciones M Y N:

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &= y\cos x + 2x\,\mathrm{e}^{y},\\
N(x,y) &= \sin x + x^2\,\mathrm{e}^{y} - 1.
\end{aligned}
$$

Notamos que la ecuación es exacta:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \cos x + 2x\,\mathrm{e}^{y},\\
\frac{\partial N}{\partial x} &= \cos x + 2x\,\mathrm{e}^{y}.
\end{aligned}
$$

Ahora, integramos M respecto a x

$$
\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (y\cos x + 2x\,\mathrm{e}^{y})\,\mathrm{d}x = y\sin x + x^2\,\mathrm{e}^{y} + g(y).
$$

Para hallar la función g, derivamos respecto a y e igualamos con N:

$$
\sin x + x^2\,\mathrm{e}^{y} + g'(y) = \sin x + x^2\,\mathrm{e}^{y} - 1
$$

Por lo tanto, $g'(y) = -1$. Integrando g y sustituyendo en Ψ, tenemos

$$
\Psi(x,y) = y\sin x + x^2\,\mathrm{e}^{y} - y + C.
$$

Puede ocurrir que una ecuación no exacta se transforme en una ecuación exacta utilizando un factor integrante. El factor integrante es una función tal que al multiplicar la ecuación por ella, la ecuación se hace exacta. Es decir, si $\mu(x,y)$ es el factor integrante, entonces la ecuación siguiente es exacta:

$$
\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.
$$

Por lo tanto, si $\widehat{M}(x,y) \coloneqq \mu(x,y)M(x,y)$ y $\widehat{N}(x,y) = \mu(x,y)N(x,y)$, se satisface

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} &= \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x},\\
\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu &= \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu.
\end{aligned}
$$

Asociando términos semejantes,

$$
\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x}N - \frac{\partial \mu}{\partial y}M. \tag{5}
$$

Para hallar μ debemos resolver la ecuación anterior, lo cual no es tarea fácil. Sin embargo, podemos establecer restricciones sobre μ para facilitar un poco las cosas.

Supongamos que μ solo depende de x. Entonces, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Luego, podemos encontrar el factor itegrante reescribiendo 5:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

El lado izquierdo de la igualdad es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\mu(x))$, por lo que,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,\mathrm{d}x\right).$$

Si el factor integrante depende de x y y, el problema se aborda según sea el caso.

Ejemplo 2.5. *Encontrar el factor integrante, suponiendo que $\mu(x,y) = m(xy)$.*

Demostración. Suponemos que $\mu(x,y) = m(xy)$ es factori integrante de la ecuación

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Entonces, al multiplicar por $\mu(x,y)$ tendremos una ecuación exacta. Es decir, si $\widehat{M}(x,y) \coloneqq \mu(x,y)M(x,y)$ y $\widehat{N}(x,y) = \mu(x,y)N(x,y)$, se satisface

$$\frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu.$$

Calculamos las derivadas parciales de μ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = m'(x,y)x, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = m'(x,y)y.$$

Por lo tanto,

$$m'(xy)x\,M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = m'(xy)y\,N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu.$$

Asociando términos tenemos

$$m'(x,y)(xM - yN) = m\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{m'(x,y)}{m(x,y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}.$$

Haciendo $f(\xi) = \frac{m'(\xi)}{m(\xi)}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \ln(m(\xi)) = f(\xi).$$

Si $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces

$$\mu(\xi) = \mathrm{e}^{F(\xi)}.$$

Por lo tanto, $\mu(x, y) = \mathrm{e}^{F(x,y)}$. $\square$

Ejemplo 2.6. *Hallar el factor integrante de la ecuación*

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + x(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 0.$$

Suponga que el factor integrante es de la forma $\mu(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Demostración. Reescribimos la ecuación como

$$(x - xy)\,\mathrm{d}x + (y + x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Entonces, $M(x, y) = x - xy$ y $N(x, y) = y + x^2$. La ecuación no es exacta. Si μ es factor integrante, entonces la siguiente ecuación es exacta:

$$\mu(x, y)M(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu(x, y)N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Hacemos $\widehat{M} \coloneqq \mu(x, y)M(x, y)$ y $\widehat{N} \coloneqq \mu(x, y)N(x, y)$. Entonces,

$$\frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu.$$

Calculamos las derivadas parciales de μ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = f'(x^2 + y^2)2y, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = f'(x^2 + y^2)2x.$$

Por lo tanto,

$$2yf'(x^2 + y^2)\,M + \frac{\partial M}{\partial y} f(x^2 + y^2) = 2xf'(x^2 + y^2)\,N + \frac{\partial N}{\partial x} f(x^2 + y^2).$$

Asociando términos tenemos

$$f'(x^2+y^2)(2yM-2xN) = f(x^2+y^2)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{2yM-2xN}.$$

Sustituyendo M y N,

$$\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} = \frac{-2x+x}{2y(x-xy)-2x(y+x^2)}$$

$$\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} = \frac{-x}{2yx-2xy^2-2xy-2x^3}$$

$$\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

Haciendo $\xi := x^2+y^2$,

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ln(f(\xi)) = \frac{1}{2\xi}$$

$$\ln(f(\xi)) = \frac{1}{2}\ln(\xi)$$

$$f(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto, $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. $\square$

2.5. Ecuación de Bernoulli

Sean $n \in \mathbb{R}$ y $P(x)$, $Q(x)$ funciones. Las ecuaciones de Bernoulli son ecuaciones de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Esta ecuación se puede convertir en una ecuación lineal a través del cambio de variable $u = y^{1-n}$.

En ocasiones, para encontrar la solución de estas ecuaciones, resulta cómodo hacer el cambio de variable $y = u(x)v(x)$.

Ejemplo 2.7. *Resolver la ecuación*

$$xy' + y = x^2y^2.$$

Demostración. Proponemos la solución $y = u(x)v(x)$. Entonces, $y' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Sustituyendo en la ecuación, y organizando los términos:

$$x(uv' + u'v) + uv = x^2u^2v^2$$
$$u(xv' + v) + xu'v = x^2u^2v^2$$

Resolvemos para $v(x)$, suponiendo que $xv' + v = 0$. Note que se tratra de una ecuación de variables separables.

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Entonces, $\ln v = \frac{1}{x}$. Por lo que $v = \frac{1}{x}$. Susituyendo en la ecuación original, tenemos

$$u' = u^2.$$

Esta ecuación también es de variables separables. Resolviendo, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \mathrm{d}x \implies u = \frac{1}{-x + C}.$$

Sustituyendo u y v en y, tenemos

$$y = -\frac{1}{x(x + C)}.$$ □

2.6. Ecuación de Bernoulli

Sean $n \in \mathbb{R}$ y $P(x)$, $Q(x)$ funciones. Las ecuaciones de Bernoulli son ecuaciones de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Esta ecuación se puede convertir en una ecuación lineal a través del cambio de variable $u = y^{1-n}$.

En ocasiones, para encontrar la solución de estas ecuaciones, resulta cómodo hacer el cambio de variable $y = u(x)v(x)$.

Ejemplo 2.8. *Resolver la ecuación*

$$xy' + y = x^2y^2.$$

Demostración. Proponemos la solución $y = u(x)v(x)$. Entonces, $y' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Sustituyendo en la ecuación, y organizando los términos:

$$\begin{aligned} x(uv' + u'v) + uv &= x^2u^2v^2 \\ u(xv' + v) + xu'v &= x^2u^2v^2 \end{aligned}$$

Resolvemos para $v(x)$, suponiendo que $xv' + v = 0$. Note que se tratra de una ecuación de variables separables.

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Entonces, $\ln v = \frac{1}{x}$. Por lo que $v = \frac{1}{x}$. Susituyendo en la ecuación original, tenemos

$$u' = u^2.$$

Esta ecuación también es de variables separables. Resolviendo, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \mathrm{d}x \implies u = \frac{1}{-x + C}.$$

Sustituyendo u y v en y, tenemos

$$y = -\frac{1}{x(x + C)}.$$ □