Université de Versailles
Saint-Quentin-en-Yvelines
Département de Informatique

Master 1 Calcul Haute Performance, Simulation

TD/TP - Calcul Numérique

Réalisé par :
BOUCHELGA ABDELJALIL

Encadré par :
Pr.THOMAS DUFAUD

Année Universitaire :2021-2022

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE 1

INTRODUCTION

Introduction

L'objectif de TD/TP 2 est de prendre les automatismes sur la rédaction des algorithmes et leur analyse. Pour cela nous allons écrire des algorithmes numérique et évaluer leur complexité arithmétique et en terme de stockage mémoire et puis comparer leurs performances afin d'implémenter des algorithmes efficace en terme de performance.

Pour le TD/TP 3 l'objectif est de savoir différentes type d'algorithme de résolution d'un système linéaire, ainsi comprendre les performances et les limites de chaque algorithme et puis comparer les performances.

Outils utilisés

1. Scilab
2. Latex

PARTIE 2

TD/TP 2 CALCUL NUMÉRIQUE

2.1 Exercice 1 TP Prise en main de Scilab

Le but de cet exercice est de se familiariser avec le langage Scilab et savoir les notion basic qu'on aura besoin par la suite.

1. Écrivez un vecteur x à 1 ligne et 4 colonnes.

```
-->x=[1,2,3,4]
x  =

1.    2.    3.    4.
```

2. Écrivez un vecteur y à 4 lignes et 1 colonnes

```
-->y=[1;2;3;4]
y  =

1.
2.
3.
4.
```

3. les opérations

```
-->x=[1;2;3;4]
x  =

1.
2.
3.
4.
```

```
-->z=x+y

z  =

2.
4.
6.
8.


-->x=[1,2,3,4]
x  =

1.   2.   3.   4.

-->s=x*y
s  =

30.
```

4. la fonction size()

```
-->size(x)
ans  =

1.   4.

-->size(y)
ans  =

4.   1.
```

5. la norme 2 de x avec la fonction norme

```
-->norm(x)
ans  =

5.4772256
```

6. matrice A à 4 lignes et 3 colonnes

```
-->A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9;10,11,12]
A  =

1.    2.    3.
4.    5.    6.
7.    8.    9.
10.   11.   12.
```

7. la transposée de A.

```
-->A'
ans  =

1.   4.   7.   10.
2.   5.   8.   11.
3.   6.   9.   12.
```

8. les opérations de bases avec deux matrices carrées A et B

```
-->B=[1,1,1;2,2,2;3,3,3;4,4,4]
B  =

1.   1.   1.
2.   2.   2.
3.   3.   3.
4.   4.   4.

-->A
A  =

1.    2.    3.
4.    5.    6.
7.    8.    9.
10.   11.   12.

La somme:

-->c=A+B
c  =

2.    3.    4.
6.    7.    8.
10.   11.   12.
14.   15.   16.

Le produit:

-->D=A*B'
D  =

6.    12.   18.   24.
15.   30.   45.   60.
24.   48.   72.   96.
33.   66.   99.   132.
```

```
La soustraction:

-->E=A-B
E  =

0.   1.   2.
2.   3.   4.
4.   5.   6.
6.   7.   8.
```

9. le conditionnement de A avec la fonction cond().

```
-->cond(A)
ans  =

9.882D+15
```

2.2 Exercice 2 TP : Matrice random et problème "jouet"

1. Génération d'une matrice A de taille 3×3 en utilisant la fonction rand().

```
-->A=rand(3,3)
A  =

0.2113249   0.3303271   0.8497452
0.7560439   0.6653811   0.685731
0.0002211   0.6283918   0.8782165
```

2. Génération d'un vecteur $xex \in \mathbb{R}$ avec la fonction rand().

```
-->xex=rand(1:3)
xex  =

0.068374   0.5608486   0.6623569

-->xex'
ans  =

0.7263507
0.1985144
0.5442573
```

3. Calcul de $b = A * xex$

```
-->b=A*xex
b  =

0.6815507
```

```
1.0544548
0.6028812
```

4. Résolution du système $Ax = b$ avec la fonction "\".

```
-->x=A\b
x  =

0.2320748
0.2312237
0.2164633
```

Remarque : Lorsque A est carré et non singulière, $x = A\backslash b$ est équivalent à $x = inv(A)*b$ en arithmétique exacte, mais le calcul réalisé par *backslash* est plus précis et et moins coûteux en arithmétique flottante. Par conséquent, pour calculer la solution du système d'équations linéaires $Ax = b$, on devrait plutôt utiliser l'opérateur *backslash*, et éviter la fonction *inv* qui numériquement moins stable.

5. Calcul de l'erreur avant et arrière

Erreur avant :

```
-->err_avant=norm(xex-x)/norm(xex)
err_avant  =

3.999D-16
```

Erreur arrière :

```
-->r=b-A*x
r  =

0.
5.551D-17
5.551D-17

-->relres = norm(r)/norm(A)*norm(x)
relres  =

1.734D-17
```

Conditionnement :

```
-->cond(A)
ans  =

8.2596760
```

6. Test avec differentes tailles :

Pour refaire les 5 points précedentes j'ai creer le script en desous et à chaque fois je change la taille.

```
function a=jouet(n)
A=rand(n,n)    //Matrice de taille n
c=cond(A)
disp("c =", c)
xex=rand(1:n)  //Vecteur de taille n
xex=xex'
b=A*xex        //calcul de b
x=A\b          //Resolution du systeme
disp("x = ",x)
err_avant=norm(xex-x)/norm(xex)  //Erreur Avant
disp("Erreur_Avant = ",err_avant)
r=b-A*x                          //Erreur Arriere
disp("r =",r)
relres = norm(r)/(norm(A)*norm(x))
disp("Relres = ",relres)
a=1
endfunction
```

Analyse des resultats
Nous remarquons que le conditionnement augmente lorsqu'on augmente la taille de la matrice, ce qui justifier l'augmentation des erreurs arriére et avant, ainsi l'erreur avant est toujour supérieur à l'erreur arriére.

2.3 Exercice 2 TP : Produit Matrice-Matrice

le but de ce tp est de comparer la complixité de 3 trois algorithme qui font le produit de deux matrices.

L'algorithme du produit Matrice-Matrice "ijk" **matmat3b**

```
function [C]= matmat3b(A,B)
 m=size(A,1);
 p=size(B,1);
 n=size(B,2);
 C=zeros(m,n);
 for i = 1 : m
  for j = 1 : n
   for k = 1 : p
    C(i, j) = A(i, k)*B(k, j) + C(i, j);
   end
  end
 end
endfunction
```

L'algorithme du produit Matrice-Matrice "ijk" **matmat2b**

```
function [C]= matmat2b(A,B)
 m=size(A,1);
 n=size(B,2);
 C=zeros(m,n);
 for i = 1 : m
  for j = 1 : n
   C(i, j) = A(i, :)*B(:, j) + C(i, j);
  end
 end
endfunction
```

L'algorithme du produit Matrice-Matrice "ijk" **matmat1b**

```
function [C]= matmat1b(A,B)
 m=size(A,1);
 n=size(B,2);
 C=zeros(m,n);
 for i = 1 : m
  C(i, :) = A(i, :)*B + C(i, :);
 end
endfunction
```

Mesure de temps d'exuction des algorithmes

Pour les mesures de temps des algorithmes, j'ai realisé 10 iteration de mesure pour chaque algorithme, et puis j'ai calculé la moyenne.

Pour la taille n=3 :

matmat1b	**matmat2b**	**matmat3b**
0.000182	0.0002840	0.000305
0.0001690	0.000273	0.000326
0.000211	0.0002800	0.000214
0.000215	0.000255	0.000372
0.000176	0.0003340	0.000328
0.000158	0.00023	0.0002810
0.000241	0.000252	0.000297
0.000158	0.000235	0.000335
0.000235	0.000241	0.000366
0.000142	0.000271	0.000312
moy= 0,0001887	**moy**= 0,000272571	**moy**= 0,000303286

Pour la taille n=50 :

matmat1b	matmat2b	matmat3b
0.002848	0.022936	0.329394
0.002065	0.021612	0.3223
0.0047470	0.016667	0.32138
0.001994	0.014888	0.3252400
0.001691	0.015411	0.3142060
0.00231	0.0194920	0.314723
0.00241	0.017045	0.335005
0.001952	0.018042	0.32015
0.00235	0.018413	0.33100
0.00192	0.025421	0.325045
moy= 0,002515286	**moy**= 0,018293	**moy**= 0,323178286

Pour la taille n=100 :

matmat1b	matmat2b	matmat3b
0.006457	0.072851	2.639783
0.007966	0.070574	2.569376
0.007995	0.072893	2.624991
0.00642	0.0657150	2.591531
0.008452	0.073936	2.65817
0.006965	0.068855	2.71989
0.007161	0.076676	2.603488
0.006965	0.061672	2.61280
0.007961	0.071686	2.71087
0.006988	0.062636	2.71900
moy= 0,007345143	**moy**= 0,070214286	**moy**= 2,629604143

Graphe

Pour bien visualiser les resultats, j'ai relisé le graphe suivant :

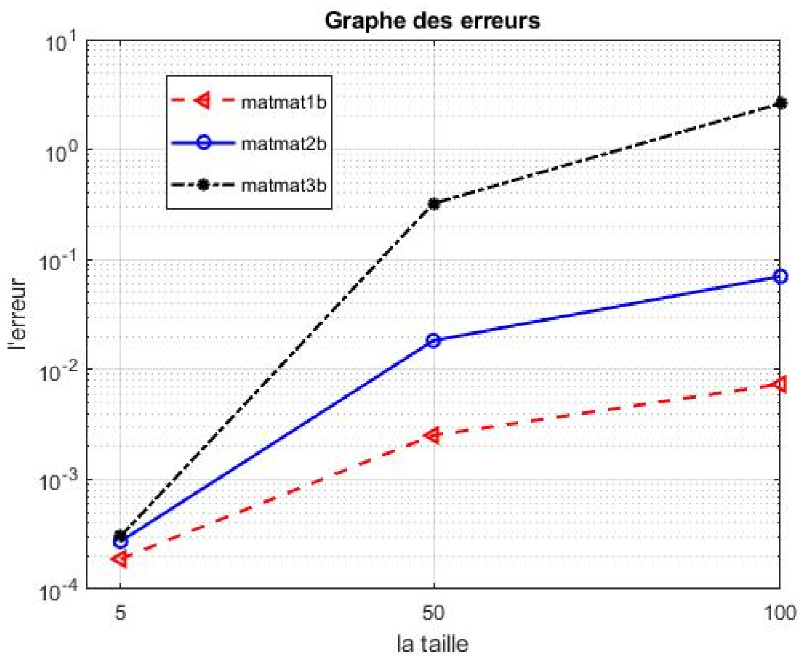
Script pour le graphe Graphe :

```
x=[5,50,100]
B1=[0.0001887,0.002515286,0.007345143];
B2=[0.000272571,0.018293,0.070214286];
B3=[0.000303286,0.323178286,2.629604143];

semilogy(x,B1,'r--<',x,B2,'b-o',x,B3,'k-.*')

hleg1 = legend( ['matmat1b';'matmat2b';'matmat13b']);
set(hleg1, 'Position', [.7,.71,.1,.2]);
xlabel('la taille');
```

```
ylabel('l''erreur');
title('Graphe des erreurs')
```



Analyse des resultats

les trois algorithmes ont une une complixité differentes, le produit matrice-matrice de l'algorithme matmat3b qui déroule 3 boucle à une complixité cubique et la l'agorithme matmat2b à une complixité quadratique.

Les mesures de temps que nous avons fait pour les 3 algorithmes et pour les differentes taille, nous montre toujour que l'algorithme matmat1b qui a une complixité lineaire est le plus rapide.

PARTIE 3

TD/TP 3 CALCUL NUMÉRIQUE RÉSOLUTION DE SYSTÈME LINÉAIRE

3.1 Exercice 1 TP Système Triangulaire

Les méthodes directes reposent sur une décomposition de la matrice A en $A = LU$ où M est facile à inverser (triangulaire ou orthonormale) et N est triangulaire. On aura donc

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Lx = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Il faut donc savoir résoudre le système Ax = b lorsque A est triangulaire inférieure (ou supérieure).

Dans cet exercice nous allons voir les deux methodes de resolution des systémes triangulaire, la methode de remontée et de descente.

1. L'algorithme de la resolution par remonte : *usolve*

```
function [x]= usolve(U,b)
 n = size(U,1);
 x = zeros(n);
 x(n) = b(n)/U(n, n);
 for i = n-1:-1:1
  x(i) = (b(i) - U(i, (i+1):n)*x((i+1):n))/U(i,i);
 end
endfunction
```

2. L'algorithme de la resolution par remonte : *lsolve*

```
function [x]= lsolve(L,b)
 n = size(L,2);
 x = zeros(n);
 x(1) = b(1)/L(1, 1);
```

```
 for i = 2:n
 x(i) = (b(i) - L(i, 1:(i - 1))*x(1:(i - 1)))/L(i, i);
 end
endfunction
```

3. Test et validation des algorithme

Nous allons utiliser les deux fonctions **tril()** et **triu()** qui permettant d'extraire une matrice triangulaire inférieur ou supérieur.

usolve :

```
 -->A
A  =

0.7560439   0.6653811   0.685731
0.0002211   0.6283918   0.8782165
0.3303271   0.8497452   0.068374

 -->U=tril(A)
U  =

0.7560439   0.          0.
0.0002211   0.6283918   0.
0.3303271   0.8497452   0.068374

-->b=A*xex
b  =

1.3377668
1.0127856
0.5407226

-->usolve(U,b)
ans  =

1.7694302
1.6117104
7.9083027
```

lsolve :

```
-->L=triu(A)
L  =

0.7560439   0.6653811   0.685731
0.          0.6283918   0.8782165
0.          0.          0.068374
```

```
-->lsolve(L,b)
ans  =

1.7694302
1.6117104
7.9083027
```

3.2 Exercice 2 TP Gauss

Le principe de la méthode de Gauss est de se ramener, par des opérations simples, à un système triangulaire équivalent, qui sera donc facile à inverse.

1. l'algorithme de résolution par élimination de Gauss sans pivotage.

```
A=rand(3,3)
b=rand(1:3)
b=b'
function [x]= gausskij3b(A,b)
 n = size(A,1);
 x = zeros(n,1);
 for k = 1 : n - 1
  for i = k + 1 : n
   mik = A(i, k)/A(k, k);
   b(i) = b(i) - mik * b(k);
   for j = k + 1 : n
    A(i, j) = A(i, j) - mik * A(k, j);
   end
  end
 end
x=usolve(A,b);
endfunction
```

2. test et validation

Nous allons resoudre le systeme $Ax = b$ en utilisant la fonction *Backslash* et la methode de gauss.

```
-->A=rand(3,3)
A  =

0.7560439   0.6653811   0.685731
0.0002211   0.6283918   0.8782165
0.3303271   0.8497452   0.068374

-->b=rand(1:3)'
```

```
b  =

0.9329616
0.2146008
0.312642

-->x=A\b
x  =

-0.7943407
0.6160788
2.3259083

-->gausskij3b(A,b)
ans  =

-0.7943407
0.6160788
2.3259083
```

Les deux methodes donnes les meme resultats.

Complexité de la méthode de Gauss On peut montrer que le nombre d'opérations nécessaires n_G pour effectuer les étapes de factorisation, descente et remontée est $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

3.3 Exercice 3 TP LU

L'idée de la factorisation de la matrice A, est l'écrire comme un produit $A = LU$, où L est triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure et on reformule alors le système $Ax = b$ sous la forme $LUx = b$ et on résout maintenant deux systèmes faciles à résoudre car triangulaires : $Ly = b$ et $Ux = y$. La factorisation LU de la matrice découle immédiatement de l'algorithme de Gauss.

1. l'algorithme de factorisation LU

```
function [L,U]=mylu3b(A)
 n = size(A,1);
 L=zeros(n,n);
 U=zeros(n,n);
 for k = 1 : n - 1
  for i = k + 1 : n
   A(i, k) = A(i, k)/A(k, k);
  end
  for i = k + 1 : n
   for j = k + 1 : n
```

```
    A(i, j) = A(i, j) - A(i, k) * A(k, j);
   end
  end
 end
 L = tril(A);
 U = triu(A);
endfunction
```

2. Test et validation

```
-->A=rand(3,3)
A  =

0.7560439   0.6653811   0.685731
0.0002211   0.6283918   0.8782165
0.3303271   0.8497452   0.068374

-->[l,u]=lu(A)
l  =

1.          0.          0.
0.0002925   1.          0.
0.4369153   0.8898959   1.
u  =

0.7560439   0.6653811   0.685731
0.          0.6281972   0.8780159
0.          0.         -1.0125751

-->l*u
ans  =

0.7560439   0.6653811   0.685731
0.0002211   0.6283918   0.8782165
0.3303271   0.8497452   0.068374
```

Calcul de l'erreur commise sur la factorisation LU : $A - LU$

```
-->Er=A-LU
Er  =

0.   0.   0.
0.   0.   0.
0.   0.   0.
```

3. Amélioration de l'algorithme de factorisation LU

```
function [L,U]=mylu3bopt(A)

n=size(A,1);

for k=1:n-1
A(k+1:n,k)=A(k+1:n,k)/A(k,k);
A(k+1:n,k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n)-A(k+1:n,k)*A(k,k+1:n);
end

U=triu(A)
L=tril(A)
for l=1:n
L(l,l)=1

endfunction
```

4. La methode de pivot partiel

```
function [P,L,U]=mylu(A)
 n=size(A,1)
 P=zeros(n,n)
 P(n,n)=1
 for k=1:n-1
  pivot_max=max(abs(A(k:n,k)))
  P(k,find(pivot_max==A(k:n,k),1))=1
  A([k find(pivot_max==A(k:n,k),1)],:)=A([find(pivot_max==A(k:n,k),1) k],: )
  for i=k+1:n
   A(i,k)=A(i,k)/A(k,k)
    for j=k+1:n
     A(i,j)=A(i,j)-(A(i,k)/A(k,k))*A(k,j)
    end
  end
 end
 U=triu(A)
 L=tril(A)
 for l=1:n
 L(l,l)=1
 endfunction
```

Comparaison avec La fonction lu() de scilab :

```
-->[P,L,U]=mylu(A)
P  =

1.   0.   0.
0.   1.   0.
0.   0.   1.
L  =

1.          0.          0.
0.4826827   1.          0.
0.4865803   0.7899184   1.
U  =

0.8415518   0.8784126   0.5618661
0.        - 0.3899886   0.2673524
0.          0.          0.9020501

-->P*A
ans  =

0.8415518   0.8784126   0.5618661
0.4062025   0.0340059   0.5385554
0.4094825   0.1998338   0.685398

-->L*U
ans  =

0.8415518   0.8784126   0.5618661
0.4062025   0.0340059   0.5385554
0.4094825   0.1998338   0.685398
```

la fonction lu() de scilab calcule aussi les trois matrices L, U et P telles que P*A = L*U avec U triangulaire supérieure, L triangulaire inférieure et P une matrice de permutation. En comparant les deux fonctions, nous remarquons que les resultats sont les memes.

PARTIE 4

CONCLUSION

Le but de ce travail est de mettre en pratique ce que nous avons vu au cours d'algèbre linéaire et à la résolution de système linéaire pas des méthodes directes. Portant savoir faire l'analyse et la comparaison des algorithmes en termes de complexité arithmétique et en stockage memoire ainsi leur precision numérique afin de faire le meilleur choix d'algorithme efficace.

Annexe

Dépot github : `https://github.com/Abdel-BHPC/Calcul_Num-rique-.git`