Rappel

1- Repère dans le plan :

1) Tous trois points O, I et J distincts non alignés déterminent un repère du plan notée $(O;I;J)$ ou $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

2) Si on pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé une base du plan

Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthogonale et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthogonal.

Si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base normée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère normé.

Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

2- Coordonnées du milieu - coordonnées d'un vecteur

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

1) Pour tout point A du plan, il existe un unique couple (x_A,y_A) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

(x_A,y_A) est appelé couple de coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $A(x_A,y_A)$

On a donc : $A(x_A,y_A)\in(O;\vec{i};\vec{j})\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

2) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x;y)$ de nombres réels tel que : $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

$(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $\vec{u}(x;y)$

On a donc : $\vec{u}(x;y)\in(\vec{i};\vec{j})\Leftrightarrow\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

3) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan alors les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ est $I(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2})$

4) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

3-Formule trigonométrique du produit scalaire :

- **Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :**

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ **ou α est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$**

Autrement dit quel que soit les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Cette formule est appelée la formule trigonométrique du produit scalaire.

- **Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$ donc $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}$**
- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$; $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

Produit scalaire et orthogonalité :

$\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(AB)\perp(CD)$

4- Déterminant de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le nombre $ab'-a'b$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, on le note par $det(\vec{u};\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}$ et on écrit : $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

Déterminant et colinéarité :

$det(\vec{u};\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

5- Vecteur directeur - équation cartésienne d'une droite

- **Soit (D) une droite du plan. Toute vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé vecteur directeur de la droite (D).**
- **Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ vérifient l'équation $ax+by+c=0$ tel que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \neq (0,0)$.**

  L'équation $(D):\ ax+by+c=0$ est appelé une équation cartésienne de la droite (D).

  Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $(D):\ ax+by+c=0$

6- Représentation paramétrique d'une droite

Soit $B(x_B, y_B)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- **La droite (D) passant par le point $B(x_B, y_B)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifient le système** $\begin{cases} x = x_B + a' \times t \\ y = y_B + b' \times t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$
- **Le système** $(D):\ \begin{cases} x = x_B + a' \times t \\ y = y_B + b' \times t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$ **est appelé une représentation paramétrique de la droite (D).**

7- Résolution graphique d'une inéquation de premier degré de deux inconnus

Soit (D) une droite d'équation $(D):\ ax+by+c=0$ dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- **La droite (D) partage le plan en deux demi-plans (D^+) et (D^-) tel que :**

  (D^+) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c>0$

  (D^-) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c<0$

- **Pour déterminer (D^+) ou (D^-) graphiquement, on procède de la façon suivante :**

  On trace la droite (D) ;

  On choisit un point du plan en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non. Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit $O(0,0)$ qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point.

8- Mesures principal usuelles :

Soit $\theta \in \left]-\pi;\pi\right]$ la mesure principale d'un angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Activités

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Activité 1 :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan.

1) Développer et simplifier le produit scalaire suivant $(x\vec{i}+y\vec{j}).(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

2) En déduire que $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ puis montrer que $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

> $\vec{u}(x;y) \Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$
> $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}.\vec{u}$

3) Vérifier que $cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

4) On considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

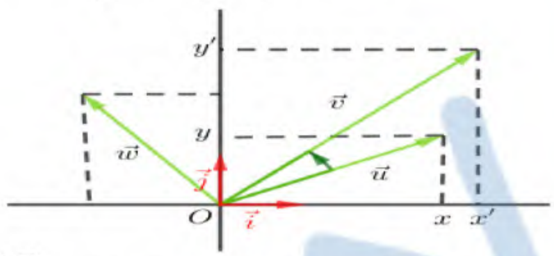
b) En déduire que $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

> $AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

5) Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan tel que $\overline{(\vec{u};\vec{w})}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ (Voir la figure ci-contre)

a) Montrer que $\overline{(\vec{v};\vec{w})}\equiv\dfrac{\pi}{2}-\overline{(\vec{u};\vec{v})}[2\pi]$ et $\vec{w}(-y;x)$

> $\overline{(\vec{v};\vec{u})}\equiv-\overline{(\vec{u};\vec{v})}[2\pi]$
> $\overline{(\vec{v};\vec{w})}\equiv\overline{(\vec{v};\vec{u})}+\overline{(\vec{u};\vec{w})}[2\pi]$
> $cos(\dfrac{\pi}{2}-x)=sin(x)$



b) Calculer $cos(\vec{v};\vec{w})$ par deux méthodes et en déduire que $sin(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Activité 2 :

Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ tels que $a;b;c\in\mathbb{R}$ et $(a;b)\neq(0;0)$

1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (Δ)

2) Montrer que le vecteur $\vec{n}(a;b)$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

On dit que $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à la droite (Δ)

3) Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

a) Montrer que pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

b) En déduire que $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

Activité 3 :

Soient (D) et (D') les droites définies respectivement par les équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$

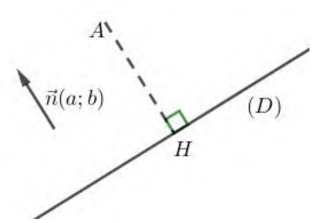
1) Déterminer un vecteur normal à chacun de (D) et (D')

2) En déduire que $(D)\perp(D')\Leftrightarrow aa'+bb'=0$

Activité 4 :

Soit (D) la droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

On considère le point H le projeté orthogonal de $A(x_A;y_A)$ sur la droite (D)



1) Vérifier que $ax_H+by_H=-c$ et $\left|cos(\overrightarrow{AH};\vec{n})\right|=1$

2) En déduire que $\overrightarrow{AH}.\vec{n}=-(ax_A+by_A+c)$ et $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right|=AH\times\|\vec{n}\|$

La distance AH est appelé la distance du point A à la droite (D) et on la note $d(A;(D))$

3) En déduire que $d(A;(D)) = AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Activité 5 :

A-Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2

1) a) Calculer les distances $\Omega A, \Omega B$ et ΩC tels que $A(3;1)$, $B(2;2)$ et $C(\sqrt{3}+1;2)$

b) En déduire les points appartenant à (C) parmi les points **A**, **B** et **C**

2) Soit $M(x;y)$ un point du plan

a) Calculer la distance ΩM en fonction de x et y

b) En déduire que $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

L'équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ est appelé l'équation cartésienne de cercle (C)

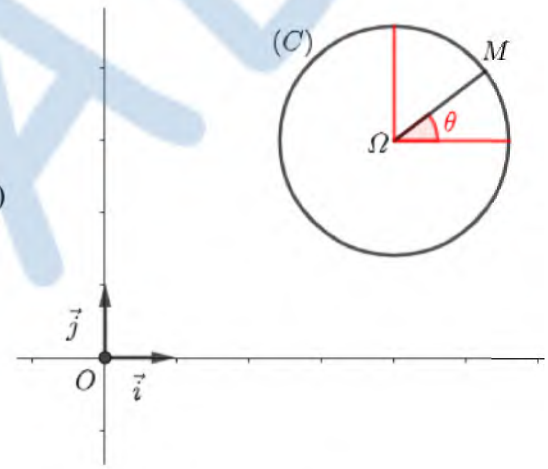
B- Soit (C) le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R (avec $a;b;R \in \mathbb{R}$ et $R \geq 0$)

1) Montrer que l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est l'équation cartésienne de cercle (C)

2) Montrer que l'équation précédente peut s'écrire sous la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - R^2$

Activité 6 :

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon **R**,



Partie 1 : **M** un point de (C) tel que $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta[2\pi]$ $(\theta \in \mathbb{R})$

1) Montrer que $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M} = Rcos(\theta)$

2) Vérifier que $(\overrightarrow{j};\overrightarrow{\Omega M}) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$ et en déduire que $\vec{j}.\overrightarrow{\Omega M} = Rsin(\theta)$

3) Soit $(x;y)$ le couple des coordonnées du point M

a) Déterminer les coordonnes du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ et en déduire que :
$\overrightarrow{\Omega M} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}$

b) En déduire que $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M} = x - a$ et $\vec{j}.\overrightarrow{\Omega M} = x - b$

c) En déduire que $M(x;y) \in (C) \Rightarrow \begin{cases} x = a + Rcos(\theta) \\ y = b + Rsin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$

Partie 2 : Soit $M(x;y)$ un point du plan. Montrer que $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x = a + Rcos(\theta) \\ y = b + Rsin(\theta) \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x = a + Rcos(\theta) \\ y = b + Rsin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique du cercle (C)

Activité 7 :

Soient $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

1) Montrer que $M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

2) On pose $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$ en déduire que $M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$

3) En déduire la nature de (Γ) dans chacun des cas suivants $a^2 + b^2 - 4c > 0$, $a^2 + b^2 - 4c = 0$ et $a^2 + b^2 - 4c < 0$

Activité 8 :

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon **R**, $A(x_A;y_A)$ un point du cercle (C) et (T) la tangente au cercle (C) au point **A**

1) Déterminer un vecteur normal à la droite (T)

2) En déduire que $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0$

3) En déduire que $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow (a - x_A)(x - x_A) + (b - y_A)(y - y_A) = 0$

Résumé 6 : Analytique du produit scalaire dans le plan

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan, alors :

$\boxed{1}$ $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{3}$ $\boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$

$\boxed{4}$ $\boxed{cos(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}}$ et $\boxed{5}$ $\boxed{sin(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}}$

- L'aire du triangle ABC est : $\boxed{6}$ $\boxed{S = \dfrac{1}{2}|det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|}$
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\boxed{20}$ $\boxed{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \geq |\vec{u}.\vec{v}|}$
- L'inégalité triangulaire $\boxed{21}$ $\boxed{\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| \geq \|\vec{u}+\vec{v}\|}$

- $\overrightarrow{AB}(\underbrace{x_B-x_A}_{x_{\overrightarrow{AB}}},\underbrace{y_B-y_A}_{y_{\overrightarrow{AB}}})$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AC}}$
- $AB = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2}$
- $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix}$
- $cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$
- $sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}$
- $S = \dfrac{1}{2}|det(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})|$
- $S = \dfrac{1}{2}|det(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})|$

$\boxed{7}$ Le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est normal à la droite $(D): ax+by+c=0$

- L'équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ est $\boxed{8}$ $\boxed{a(x-x_A)+b(y-y_A)=0}$
- Si $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$ alors $\boxed{9}$ $\boxed{(D)\perp(D') \Leftrightarrow aa'+bb'=0}$
- Soit (D) la droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ et $A(x_A;y_A)$ un point du plan : $\boxed{10}$ $\boxed{d(A;(D)) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$
- L'équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est $\boxed{11}$ $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

Que l'on peut écrire $\boxed{12}$ $\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$ où $c=a^2+b^2-R^2$

- Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
- L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est

$\boxed{13}$ $\boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$

$\boxed{14}$ Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

Si $a^2+b^2-4c>0$ alors (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2})$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Si $a^2+b^2-4c=0$ alors (Γ) est $\Omega(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2})$

Si $a^2+b^2-4c<0$ alors (Γ) est l'ensemble vide.

$\boxed{15}$ Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R et M un point du plan :

$\rightarrow$ M est sur le cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$\rightarrow$ M est à l'intérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M < R$

$\rightarrow$ M est à l'extérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M > R$

$\boxed{16}$ Si $(C): x^2+y^2+ax+by+c=0$ est une équation cartésienne du cercle (C) alors :

$\rightarrow$ $M(x_M;y_M)$ est sur le cercle (C) $\Leftrightarrow x_M{}^2+y_M{}^2+ax_M+by_M+c=0$

$\rightarrow$ $M(x_M;y_M)$ est à l'intérieur du cercle (C) $\Leftrightarrow x_M{}^2+y_M{}^2+ax_M+by_M+c<0$

$\rightarrow$ $M(x_M;y_M)$ est à l'extérieur du cercle (C) $\Leftrightarrow x_M{}^2+y_M{}^2+ax_M+by_M+c>0$

- Le cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système $\boxed{17}$ $\boxed{\begin{cases} x = a+Rcos(\theta) \\ y = b+Rsin(\theta) \end{cases} /\theta\in\mathbb{R}}$

$\boxed{18}$ Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R et (D) une droite dans le plan et soit $d = d(\Omega;(D))$ la distance du point Ω à la droite (D)

$\rightarrow$ Si $d>R$ alors $(D)\cap(C)=\varnothing$

$\rightarrow$ Si $d=R$ alors $(D)\cap(C)=\{H\}$

$\rightarrow$ Si $d<R$ alors $(D)\cap(C)=\{A;B\}$

- La tangente au cercle (C) au point $A\in(C)$ est l'ensemble des points M du plan tel que $\boxed{19}$ $\boxed{\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0}$

Exemples résolus

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exemple 1

On considère les vecteurs suivants $\vec{u}(5;-1)$, $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$ **et** $\vec{w}=(5m+2)\vec{i}-\vec{j}$ $\quad (m\in\mathbb{R})$

1) **Calculer** $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ **et** $\|\vec{v}\|$

2) **Calculer** $cos(\vec{u};\vec{v})$, $sin(\vec{u};\vec{v})$ **et déduire** $(\overline{\vec{u};\vec{v}})$.

3) **Calculer** $\vec{u}.\vec{w}$ **en fonction de** m .

4) **En déduire la valeur de** m **pour que** $\vec{u}$ **et** $\vec{w}$ **soient orthogonaux.**

5) **On considère les points** $A(1;4)$ **et** $B(-5;1)$, **calculer la distance** AB.

Solution

1) **On a** $\vec{u}(5;-1)$ **et** $\vec{v}(2;-3)$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=x\times x'+y\times y'=5\times 2+(-1)\times(-3)=13$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$; $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

2) $cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{13}{13\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $sin(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{-13}{13\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et par conséquent $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

3) **On a** $\vec{u}(5;-1)$ **et** $\vec{w}(5m+2;-1)$, **donc** $\vec{u}.\vec{w}=5\times(5m+2)+(-1)\times(-1)=25m+11$

4) **On a** $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{w}=0$ **donc** $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow 25m+11=0$, **d'où** $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{25}$

5) $AB=\sqrt{(-5-1)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{5}$

Exemple 2

Calculer l'aire du triangle ABC **sachant que** $A(2;-4)$, $B(1;3)$ **et** $C(-2;7)$

Solution

On a $\overrightarrow{AB}(-1;7)$ **et** $\overrightarrow{AC}(-4;11)$ **donc** $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 7 & 11\end{vmatrix}=17$.

Par suite l'aire du triangle ABC **est :** $S=\dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|=\dfrac{17}{2}=4.5$

Exemple 3

1) **Déterminer un vecteur normal à la droite** (D) **dans les cas suivants :**

a) $(D):x-4y+1=0$

b) $(D):\dfrac{2}{3}x+3=0$

c) $(D):y=2$

2) **Déterminer une équation cartésienne de la droite** (D) **passant par le point A et de vecteur normal** $\vec{n}$ **dans les cas suivants :**

a) $A(4;-1)$ **et** $\vec{n}(1;-3)$

b) $A(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ **et** $\vec{n}(2\sqrt{2};3\sqrt{2})$

3) **Déterminer une équation cartésienne de la droite** (D) **passant par le point** $A(4;2)$ **et de vecteur directeur** $\vec{u}(-1;3)$

Solution

1) a) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $1x+(-4)y+1=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;-4)$ est un vecteur normal à la droite (D)

b) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $\frac{2}{3}x+0y+3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(\frac{2}{3};0)$ est un vecteur normal à la droite (D)

c) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $0x+1y-2=0$ donc le vecteur $\vec{n}(0;1)$ est un vecteur normal à la droite (D)

2) a)

Méthode 1

L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

C'est-à-dire : $(D): 1(x-4)+(-3)(y-(-1))=0$

Ainsi $(D): x-3y-7=0$

Méthode 2

L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): ax+by+c=0$

C'est-à-dire : $(D): 1x-3y+c=0$

Puisque $A\in(D)$ alors $1x_A-3y_A+c=0$

C'est-à-dire : $1\times 4-3\times(-1)+c=0$, d'où $c=7$

Ainsi $(D): x-3y-7=0$.

b) L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

C'est-à-dire : $(D): 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(y-(-\sqrt{2}))=0$ on obtient $(D): 2\sqrt{2}x-4+3\sqrt{2}y+6=0$

Ainsi $(D): 2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+2=0$

3) Rappel : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) passant par A, alors :

$M\in(D) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$$

On a : $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & -1 \\ y-y_A & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-4)+(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 3x+y-14=0$. **Ainsi l'équation cartésienne de (D) est $(D): 3x+y-14=0$**

Exemple 4

Etudier la perpendicularité des droites (Δ) et (Δ') dans chacun des cas suivants :

1) $(\Delta): x-6y+2=0$ **et** $(\Delta'): 6x+y+1=0$

2) $(\Delta): 2x-y+3=0$ **et** $(\Delta'): x+y+2=0$

3) $(\Delta): x-y+4=0$ **et** $(\Delta'): \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \end{cases} /(t\in\mathbb{R})$

Solution

1) Puisque $1\times 6+(-6)\times 1=0$ alors : $(\Delta)\perp(\Delta')$

2) Puisque $2\times 1+(-1)\times 1=1\neq 0$ alors : (Δ) et (Δ') ne sont pas perpendiculaires.

3) On a le vecteur $\vec{n}(1;-1)$ est normal à (Δ) et $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de (Δ').

Or $det(\vec{n};\vec{u})=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5\neq 0$ **alors (Δ) et (Δ') ne sont pas perpendiculaires.**

Exemple 5

Calculer la distance du point $A(5;-3)$ à la droite (D) d'équation $3x+2y+4=0$

Solution

La distance du point A à la droite (D) est : $d(A;(D))=\dfrac{|3x_A+2y_A+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|3\times 5+2\times(-3)+4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

Exemple 6

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1) (C) **est de centre** $\Omega(2;-1)$ **et de rayon** $R=2\sqrt{2}$.
2) (C) **est de centre** $\Omega(1;3)$ **et passant par** $A(-1;2)$.
3) (C) **est de diamètre** $[AB]$ **tels que** $A(-4;3)$ **et** $B(2;-1)$.
4) (C) **est de centre** $\Omega(2;-1)$ **et la droite** (Δ) **d'équation** $(\Delta): x-3y+5=0$ **tangente à** (C).

Solution

1) On a : $a=2$, $b=-1$ **et** $R=2\sqrt{2}$

Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-2)^2+(y-(-1))^2=(2\sqrt{2})^2$

C'est-à-dire $x^2-4x+4+y^2+2y+1=8$ **ce qui donne :** $x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Méthode 2

L'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 2x-2\times(-1)y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=2^2+(-1)^2-(2\sqrt{2})^2=-3$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) (C) est**

$x^2+y^2-4x-2y-3=0$

2) On a : $a=1$, $b=3$ **et le rayon de (C) est** $R=A\Omega=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 1x-2\times 3y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=1^2+3^2-(\sqrt{5})^2=5$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est** $x^2+y^2-2x-6y+5=0$

3) Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

C'est-à-dire $(x-(-4))(x-2)+(y-3)(y-(-1))=0$ **ce qui donne :** $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

Méthode 2

Le centre du cercle (C) est le milieu Ω de $[AB]$

On sait que : $a=x_\Omega=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-4+2}{2}=-1$ **et** $b=y_\Omega=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$

Le rayon du cercle (C) est $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(2+4)^2+((-1-3)^2}}{2}=\sqrt{13}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times(-1)x-2\times 1y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=(-1)^2+1^2-(\sqrt{13})^2=-11$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est** $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

4) On a : $a=2$, $b=-1$ **et puisque (Δ) est tangente à (C) alors le rayon de (C) est :**

$R=d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{|x_\Omega-3y_\Omega+5|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2-3\times(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 2x-2\times(-1)y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=2^2+(-1)^2-(\sqrt{10})^2=-5$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est** $x^2+y^2-4x+2y-5=0$

Exemple 7

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ du plan dans chacun des cas suivants :

1) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ **2)** $x^2+y^2+6x-4y+16=0$ **3)** $x^2+y^2+4x+10y+29=0$

Solution

1) On a : $a=4$ **,** $b=-6$ **et** $c=9$ **donc** $a^2+b^2-4c=4^2+(-6)^2-4\times 9=16>0$ **par conséquent** (Γ) **est le cercle de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ **c'est-à-dire** $\Omega(-2;3)$ **et de rayon** $R=2$

2) On a : $a=6$ **,** $b=-4$ **et** $c=16$ **donc** $a^2+b^2-4c=6^2+(-4)^2-4\times 16=-12<0$ **par conséquent** (Γ) **est l'ensemble vide.**

3) On a : $a=4$ **,** $b=10$ **et** $c=29$ **donc** $a^2+b^2-4c=4^2+10^2-4\times 29=0$**, d'où** (Γ) **est le singleton** $\Omega(-2;-5)$

Exemple 8

1) Déterminer la position du point M par rapport au cercle (C) dans chacun des cas suivants :

a) $C(\Omega(2;3);1)$ **et** $M(-1;2)$ **;** **b)** $(C):x^2+y^2-2x+4y=0$ **et** $M(0;0)$

2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2+y^2-2x+2y-7<0$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x-y>0$

d) Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y>0 \end{cases}$

Solution

1) a) On a : le rayon de (C) **est** $R=1$ **et**
$\Omega M=\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}>1$
Donc M est à l'extérieur du cercle (C)

b) On sait que : (C) **est de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Or $a=-2, b=4$ **et** $c=0$ **alors** $\Omega(1;-2)$ **et** $R=\sqrt{5}$

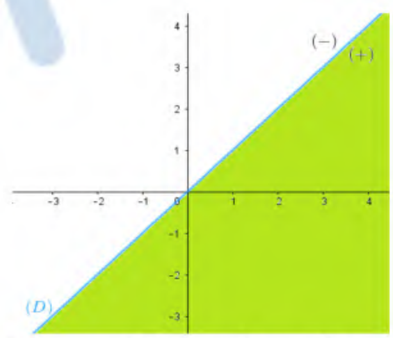
On a $\Omega M=\sqrt{(0-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}=R$

Donc M est sur le cercle (C).

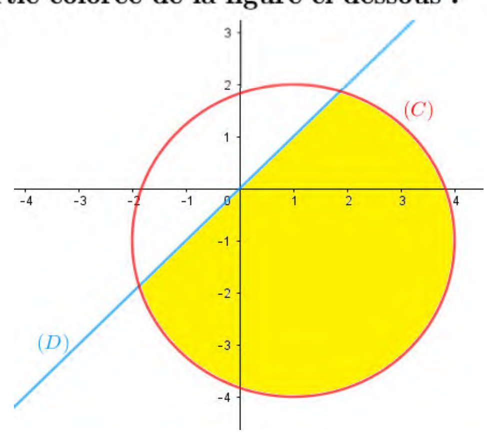
2) a) On a : $a=-2$ **;** $b=2$ **et** $c=-7$ **.**
Donc $a^2+b^2-4c=(-2)^2+2^2-4\times(-7)=36>0$**.**
Par conséquent (C) **est le cercle de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})=\Omega(1;-1)$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=3$

b) Les solutions graphiques de l'inéquation $x^2+y^2-2x+2y-7<0$ **sont les couples** $(x;y)$ **de coordonnées des points situés à l'intérieur du cercle** (C) **précédente.**

c) Les solutions graphiques de l'inéquation $x-y>0$ **sont les couples** $(x;y)$ **de coordonnées des points situés dans** (D^+) **tel que** (D) **est la droite d'équation :** $x-y=0$ **:**



d) Les solutions graphiques du système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y>0 \end{cases}$ **sont les couples** $(x;y)$ **de coordonnées des points situés à l'intersection de l'intérieur du cercle** (C) **avec** (D^+)
C'est-à-dire les couples $(x;y)$ **des points appartenant à la partie colorée de la figure ci-dessous :**



Exemple 9

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

a) (C) **est de centre** $\Omega(2;3)$ **et de rayon** $R=5$; **b)** $(C): x^2+y^2-2x+6y-6=0$

2) Déterminer l'ensemble (C) **des points** $M(x;y)$ **du plan tel que :** $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}cos(\theta) \\ y=-3+\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

3) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) **de représentation paramétrique :** $\begin{cases} x=1+3cos(t) \\ y=-1+3sin(t) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Solution

1) a) une représentation paramétrique du cercle (C) **est donnée par** $\begin{cases} x=2+5cos(\theta) \\ y=3+5sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

b) Déterminons le centre et le rayon de (C)

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+6y-6=0\Leftrightarrow(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9-6=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+3)=16=4^2$ **. D'où** (C) **est de centre** $\Omega(1;-3)$ **et de rayon** $R=4$

Donc une représentation paramétrique du cercle (C) **est le système :** $\begin{cases} x=1+4cos(\theta) \\ y=-3+4sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

2) On a $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases} x=1+\sqrt{2}cos(\theta) \\ y=-3+\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=\sqrt{2}cos(\theta) \\ y+3=\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

Donc $M(x;y)\in(C)\Rightarrow(x-1)^2+(y+3)^2=2cos^2(\theta)+2sin^2(\theta)=2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))=2=\sqrt{2}^2$

C'est-à-dire que (C) **est le cercle de centre** $\Omega(1;-3)$ **et de rayon** $R=\sqrt{2}$

3) On a $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases} x=1+3cos(t) \\ y=-1+3sin(t) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=3cos(t) \\ y+1=3sin(t) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Donc $(x-1)^2+(y+1)^2=9cos^2(t)+9sin^2(t)=9(cos^2(t)+sin^2(t))=9$

C'est-à-dire $(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)=9$ **d'où finalement** $x^2+y^2-2x+2y-7=0$

Exemple 10

Etudier l'intersection de la droite (D) **et du cercle** (C) **dans chacun des cas suivants :**

1) $(C): x^2+y^2-x-6y=0$ **et** $(D): x-y-1=0$

2) $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=5$ **et** $(D): 2x+y+4=0$

3) $(C): x^2+y^2=9$ **et** $(D): y=4$

Solution

1) On sait que (C) **est de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Or $a=-1$ **;** $b=-6$ **et** $c=0$ **alors** (C) **est de centre** $\Omega(\frac{1}{2};3)$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{37}}{2}$

On a $d(\Omega;(D))=\frac{|x_\Omega-y_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{1}{2}-3-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$ **donc** $d(\Omega;(D))<R$

Par conséquent, la droite (D) **coupe le cercle** (C) **en deux points** A **et** B

Déterminons le couple des coordonnées de A **et de** B

$M(x;y)\in(D)\cap(C)\Leftrightarrow\begin{cases} M(x;y)\in(D) \\ M(x;y)\in(C) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2-x-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2-(y+1)-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y+1 \\ 2y^2-5y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y(2y-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y=0 \quad ou \quad y=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+1=1 \\ y=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi les points d'intersection de (D) et (C) sont : $A(1;0)$ et $B(\frac{7}{2};\frac{5}{2})$

2) On a (C) est de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$

On a $d(\Omega;(D))=\dfrac{|2x_\Omega+y_\Omega+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|2\times1-1+4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ donc $d(\Omega;(D)))=R$ par conséquent, la droite (D) coupe le cercle (C) en un point H. ((D) est tangente au cercle (C))

Déterminons le couple des coordonnées du point H :

$$M(x;y)\in(D)\cap(C) \Leftrightarrow \begin{cases} M(x;y)\in(D) \\ M(x;y)\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-4+1)^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ x^2-2x+1+4x^2+12x+9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ 5x^2+10x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y=-2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ **, ainsi le point d'intersection de (D) et (C) est $H(-1;-2)$.**

3) On a (C) est de centre $\Omega(0;0)$ et de rayon $R=3$ et $(D): 0x+1y-4=0$

On a $d(\Omega;(D))=\dfrac{|0x_\Omega+y_\Omega-4|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{|0\times0+0-4|}{1}=4$, donc $d(\Omega;(D))>R$, par conséquent $(D)\cap(C)=\varnothing$

Exemple 11

Vérifier que le point A appartient au cercle (C) puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point A dans chacun des cas suivants :

1) $(C): x^2+y^2+x-2y=0$ **et** $A(0;0)$ **; 2)** $(C): (x-2)^2+(y-4)^2=4$ **et** $A(2;2)$ **; 3)** $(C): x^2+y^2=1$ **et** $A(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

Solution

1) On a : $x_A{}^2+y_A{}^2+x_A-2y_A=0+0=0$, donc $A\in(C)$

On a $(C): x^2+y^2+x-2y=0$, donc (C) est de centre $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})=\Omega(-\frac{1}{2};-\frac{-2}{2})=\Omega(-\frac{1}{2};1)$

Donc : $M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{2}-x_A\right)(x-x_A)+(1-y_A)(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow (-\dfrac{1}{2}-0)(x-0)+(1-0)(y-0)=0$, **ainsi** $(T): \dfrac{1}{2}x-y=0$

2) On a : $(x_A-2)^2+(y_A-4)^2=(2-2)^2+(2-4)^2=4$, donc $A\in(C)$

On a $(C): (x-2)^2+(y-4)^2=4$, donc (C) est de centre $\Omega(2;4)$

Donc : $M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow (2-x_A)(x-x_A)+(4-y_A)(y-y_A)=0 \Leftrightarrow (2-2)(x-2)+(4-2)(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 2y-4=0$, **d'où finalement** $(T): y-2=0$

3) On a : $x_A{}^2+y_A{}^2=(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ donc $A\in(C)$

On a $(C): x^2+y^2=1$, donc (C) est de centre $\Omega(0;0)$

$M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow (0-x_A)(x-x_A)+(0-y_A)(y-y_A)=0 \Leftrightarrow (0+\dfrac{1}{2})(x+\dfrac{1}{2})+(0-\dfrac{\sqrt{3}}{2})(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+1=0$, **ainsi** $(T): x-\sqrt{3}y+2=0$

Exemple 12

Trouver les tangentes au cercle (C) d'équation $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ qui sont parallèles à $(D): 3x-4y=0$

Solution

On a le cercle (C) est de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R=3$

Soit (T) une droite parallèle à $(D): 3x-4y=0$ donc une équation cartésienne de (T) s'écrit : $(T): 3x-4y+c=0$

On a : (T) est tangente au cercle $(C) \Leftrightarrow d(\Omega;(T))=R$

Donc (T) est tangente au cercle $(C) \Leftrightarrow \dfrac{|3\times 3 - 4\times 1+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5 \Leftrightarrow |5+c|=25 \Leftrightarrow 5+c=25 \quad ou \quad -(5+c)=25$

D'où $c=20 \quad ou \quad c=-30$ par suite les tangentes au cercle (C) qui sont parallèles à $(D): 3x-4y=0$ sont :

$(T_1): 3x-4y+20=0$ et $(T_2): 3x-4y-25=0$

Exemple 13

Vérifier que le point $A(4;-2)$ est à l'extérieur du cercle (C) d'équation : $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) issues de A

Solution

On a : $(x_A-3)^2+(y_A-1)^2=(4-3)^2+(-2-1)^2=1+9=10>5$ donc $A(4;-2)$ est à l'extérieur du cercle (C)

Méthode 1 :

- → **L'équation cartésienne d'une droite (T) tangente au cercle (C) issue de A s'écrit $ax+by+c=0$ ou $a;b;c\in\mathbb{R}$ et $(a;b)\neq(0;0)$**
- → **Puisque $A\in(T)$ alors $4a-2b+c=0$ ce qui donne $c=2b-4a$ par conséquent l'équation de (T) devient $(T): ax+by+2b-4a=0$**
- → **Puisque (T) est tangente au cercle (C) alors $d(\Omega;(T))=R=\sqrt{5}$**
- → **On a $d(\Omega;(T))=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|a\times 3+b\times 1+2b-4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|3b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |3b-a|=\sqrt{5(a^2+b^2)}$**
- → **Puisqu'une droite admet une infinité d'équations cartésiennes et $(a;b)\neq(0;0)$ alors on peut se ramène au cas où $(a=1$ ou $b=1)$**
- → **Posons par exemple $a=1$ on a**
  $d(\Omega;(T))=\sqrt{5} \Leftrightarrow |3b-1|=\sqrt{5(1+b^2)} \Leftrightarrow (3b-1)^2=5(1+b^2) \Leftrightarrow 4b^2-6b-4=0 \Leftrightarrow 2b^2-3b-2=0$

L'équation $2b^2-3b-2=0$ admet deux solutions : $b=2$ ou $b=-\dfrac{1}{2}$

- → **Si $b=-\frac{1}{2}$ alors $(T): 1x-\frac{1}{2}y+2\times\frac{-1}{2}-4\times 1=0 \Leftrightarrow (T): x-\frac{1}{2}y-5=0 \Leftrightarrow (T): 2x+y-10=0$**
- → **Si $b=2$ alors $(T): 1x+2y+2\times 2-4\times 1=0 \Leftrightarrow (T): x+2y=0$**

D'où finalement les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) issues de A est $\begin{cases}(T_1): 2x-y-10=0\\(T_2): x+2y=0\end{cases}$

Méthode 2 :

- → **Les points de contact entre le cercle (C) et ces tangentes issues de A sont les points d'intersection entre le cercle (C) et le cercle (C') de diamètre $[\Omega A]$ ou Ω est le centre de (C)**
- → **Déterminons l'équation cartésienne de (C') le cercle de diamètre $[\Omega A]$**

On a l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[\Omega A]$ est de la forme :

$(C'): (x-x_\Omega)(x-x_A)+(y-y_\Omega)(y-y_A)=0$ et $\Omega(3;1)$ est le centre de (C)

Donc $(C'): (x-3)(x-4)+(y-1)(y+2)=0$ ce qui donne $(C'): x^2+y^2-7x+y+10=0$

- → **Déterminons les points d'intersection entre les cercles (C) et (C') :**

On a $M(x;y)\in(C)\cap(C') \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ x^2+y^2-7x+y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ x^2+y^2-7x+y+15=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ x^2+y^2-7x+y+15=(x-3)^2+(y-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ -x+3y+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3y+5-3)^2+(y-1)^2=5\\ x=3y+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10y^2+10y=0\\ x=3y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y(y+1)=0\\ x=3y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0 \quad ou \quad y=-1\\ x=3y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=5\end{cases} \; ou \; \begin{cases}y=-1\\ x=2\end{cases}$

Ainsi les points d'intersection entre les cercles (C) et (C') sont $B(5;0)$ et $C(2;-1)$

→ **Les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) issues de A sont les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) aux points B et C**

→ **On sait que les équations cartésiennes des tangentes (T_B) et (T_C) au cercle (C) aux points B et C respectivement s'écrit :** $\begin{cases}(T_B):(a-x_B)(x-x_B)+(b-y_B)(y-y_B)=0\\ (T_C):(a-x_C)(x-x_C)+(b-y_C)(y-y_C)=0\end{cases}$ **c'est-à-dire**

$\begin{cases}(T_B): (3-5)(x-5)+(1-0)(y-0)=0\\ (T_C): (3-2)(x-2)+(1+1)(y+1)=0\end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases}(T_B): 2x-y-10=0\\ (T_C): x+2y=0\end{cases}$

Exemple 14

On considère les points $A(4;-1)$, $B(1;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Construire les points A, B, C et la bissectrice de l'angle $(A\hat{B}C)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(A\hat{B}C)$

Solution

2) Rappel : un point du plan appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement s'il est équidistant des côtés de cet angle.

→ **Soit (D) la bissectrice de l'angle $(A\hat{B}C)$ on a :** $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow d(M;(BA))=d(M;(BC))$

→ **Déterminons premièrement une équation cartésienne de chacun des droites (AB) et (BC)**

On a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ est un vecteur directeur de (AB) donc :

$$M(x;y)\in(AB) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & 3\\ y+1 & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -3(y+1)=0 \Leftrightarrow y+1=0$$

On a : $\overrightarrow{BC}(-3;3)$ est un vecteur directeur de (BC) donc :

$$M(x;y)\in(BC) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & -3\\ y+1 & 3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-1)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow x+y=0$$

D'où $(AB): y+1=0$ et $(BC): x+y=0$

→ **Donc** $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ **d'ou** $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1|=|x+y|$

→ **On remarque que si $M(x;y)$ appartient à la bissectrice intérieure de l'angle $(A\hat{B}C)$ alors $x\geq x_B=1$ et $y\geq y_B=-1$ donc $x+y\geq 0$ et $y+1\geq 0$**

Par suite $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \sqrt{2}(y+1)=(x+y)$ **et** $x\geq x_B=1$

D'où finalement une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(A\hat{B}C)$ est de la forme :

$(D): \begin{cases}x+(1-\sqrt{2})y-\sqrt{2}=0\\ x\geq 1\end{cases}$