

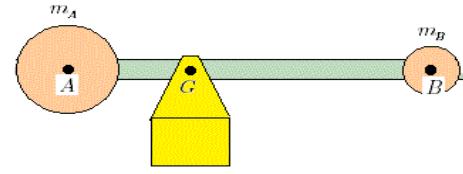
Activités

Activité 1 :

On considère un levier porte deux masses m_A et m_B

Principe du levier d'Archimède :

« Dans le cas d'équilibre on a $m_A \times GA = m_B \times GB$ »



1) Montrer que dans le cas d'équilibre on a $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2) Le point G défini par la relation vectorielle $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ s'appelle le barycentre des points pondérés (ou massifs) $(A; m_A)$, $(B; m_B)$ et on le note $G = Bar\{(A; m_A); (B; m_B)\}$

Montrer que : $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB}$

3) En déduire la position du point G tel que $G = Bar\{(A; m_A); (B; m_B)\}$ dans chacun des cas suivants :

a) $m_A = m_B = 1$; b) $m_A = 3$ et $m_A = 5$

4) Déterminer m_B sachant que $m_A = 2$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$

Activité 2 :

a et b deux réels.

Soit A et B deux points distincts du plan et G un point tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

1) Montrer que $(a+b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB}$

2) En déduire que si $a+b=0$ alors le point G n'existe pas.

3) On suppose que $a+b \neq 0$ et soit G' un point du plan tel que $\overrightarrow{AG'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $G' = G$

b) En déduire que le point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est unique et que $G \in (AB)$

→ Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A; a)$ et $(B; b)$ on note $G = bar\{(A; a); (B; b)\}$

4) Montrer que : $G = bar\{(A; 1); (B; 1)\} \Leftrightarrow G$ le milieu du segment $[AB]$

5) Montrer que : $G = bar\{(A; 1); (B; 0)\} \Leftrightarrow G = A$ et $G = bar\{(A; 0); (B; 1)\} \Leftrightarrow G = B$

Activité 3 :

Soit a et b deux réels non nuls tel que $a+b \neq 0$ on pose $G = bar\{(A; a); (B; b)\}$

1) Soit $k \in \mathbb{R}^*$ vérifier que : $\frac{a}{k} \overrightarrow{GA} + \frac{b}{k} \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{R}^*$ on a $G = bar\left\{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k})\right\}$

3) Soit M un point du plan (P) montrer que : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} - (a+b)\overrightarrow{MG} = \vec{0}$

4) En déduire que si $G = bar\{(A; a); (B; b)\}$ alors pour tout $M \in (P)$ on a $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

5) Montrer que si pour tout $M \in (P)$ on a $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ alors $G = bar\{(A; a); (B; b)\}$

6) Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan, on pose $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

a) En déduire que $\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $a\overrightarrow{OA}$ et $b\overrightarrow{OB}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, x_B et y_B

c) En déduire les coordonnées de vecteur $\frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, x_B et y_B

d) En déduire que $G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}, \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right)$

Activité 4 :

a, b et c trois réels.

Soit A et B deux points distinct du plan et G un point tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1) Montrer que $(a+b+c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que si $a+b+c=0$ alors le point G n'existe pas.

3) On suppose que $a+b+c \neq 0$ et soit G' un point du plan tel que $\overrightarrow{AG'} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

a) Montrer que $G' = G$

b) En déduire que le point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ est unique.

→ G est appelé le barycentre du systèmes pondérés $\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ on note $G = bar\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$

c) En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

4) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{R}^*) \quad G = bar\left\{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k}); (C; \frac{c}{k})\right\}$

5) Montrer que $(\forall M \in (P)) \quad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

6) Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan, on pose $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

Montrer que $G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$



Activité 5 :

a, b et c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$ et $a+b \neq 0$

Soit ABC un triangle, G et H les points du plan tels que

$G = bar\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ et $H = bar\{(A; a); (B; b)\}$

1) a) Vérifier que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = -c\overrightarrow{GC}$

b) En utilisant la propriété caractéristique du barycentre sur H montrer que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a+b)\overrightarrow{GH}$

c) En déduire que $G = bar\{(H; a+b); (C; c)\}$ et que $G \in (CH)$

Application :

2) On suppose que $a=b=c=1$

a) En déduire que $G \in (CH)$

b) Que présente le point H pour le segment $[AB]$

c) Soit I le milieu du segment $[BC]$ montrer que $G \in (AI)$

d) En déduire que G est le centre de la gravité du triangle ABC

3) Supposons que $b+c \neq 0$ et $a+c \neq 0$

On pose $H = bar\{(A; a); (B; b)\}$; $K = bar\{(B; b); (C; c)\}$ et $L = bar\{(A; a); (C; c)\}$

Montrer que les droites (CH) ; (AK) et (BL) sont concourantes en G .

Définitions et propriétés

Soit A un point du plan et a un nombre réel.

→ Le couple $(A; a)$ est appelé **point pondéré** ou point massif. Le réel a est appelé le **poids** ou la masse de A .

On dit aussi que le point A est affecté du coefficient a ou de la masse algébrique a .

→ Un **système pondéré** est une collection de points pondérés.

Barycentre de deux points pondérés

Soit $(A; a)$ et $(B; b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a + b \neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A; a)$ et $(B; b)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A; a); (B; b)\}$ on note $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$

$$1 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}}$$

2) Si $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$ alors $G \in (AB)$ tel que $\vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}$

$$2 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}}$$

→ Cette dernière relation permet de construire le point G .

→ Le point le plus proche du barycentre G est celui dont le coefficient à la plus grande valeur absolue.

→ Le barycentre G est sur le segment $[AB]$ si les poids sont de même signe.

3) Le point $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 1)\}$ est appelé isobarycentre des points A et B c'est le milieu de $[AB]$

4) Si x et y deux réels tel que $x + y = 0$ alors le système $\{(A; x); (B; y)\}$ n'admet pas de barycentre.

5) On a $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A; k \times a); (B; k \times b)\}$ et $3 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\left\{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k})\right\}}$

pour tout $k \in \mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

6) On a $4 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow a\vec{MA} + b\vec{MB} = (a+b)\vec{MG}}$ pour tout $M \in (P)$. Cette propriété s'appelle la **propriété caractéristique** du barycentre.

7) Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère.

On a $5 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right)}$

Barycentre de trois points pondérés

Soit $(A; a), (B; b)$ et $(C; c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a + b + c \neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A; a), (B; b)$ et $(C; c)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ on note $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$

$$1 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \Leftrightarrow a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}}$$

2) Si $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ alors $\vec{AG} = \frac{b}{a+b+c} \vec{AB} + \frac{c}{a+b+c} \vec{AC}$

$$2 \boxed{G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{b}{a+b+c} \vec{AB} + \frac{c}{a+b+c} \vec{AC}}$$

Cette dernière relation permet de construire le point G

3) Si x, y et z trois réels tel que $x + y + z = 0$ alors le système $\{(A; x); (B; y); (C; z)\}$ n'admet pas de barycentre.



4) $\boxed{3} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\left\{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k}); (C; \frac{c}{k})\right\}$ pour tout $k \in \mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le

barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

5) On a $\boxed{4} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$ pour tout $M \in (P)$. Cette propriété s'appelle la **propriété caractéristique** du barycentre.

6) Soit $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ trois points d'un repère.

On a $\boxed{5} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$

7) Si $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ et $H = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$ alors $G = \text{bar}\{(H; a+b); (C; c)\}$. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

$\boxed{6} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \text{ et } H = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Rightarrow G = \text{bar}\{(H; a+b); (C; c)\}$

Cette propriété s'appelle **l'associativité** du barycentre.

8) Le point $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$ est appelé **isobarycentre** des points A, B et C c'est le centre de gravité du triangle ABC .

Barycentre de quatre points pondérés

- De la même manière, on étend à quatre points les définitions et les propriétés vues pour le barycentre de trois points.
- L'associativité** du barycentre : Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.

Résumé 5 : Barycentre

<u>Barycentre de deux points</u>		<u>Barycentre de trois points</u>
	$(A; a)$ et $(B; b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b \neq 0$	$(A; a), (B; b)$ et $(C; c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c \neq 0$
Définition	$\boxed{1} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$	$\boxed{1} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Construction	$\boxed{2} \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$	$\boxed{2} \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$
Homogénéité	$\boxed{3} G = \text{bar}\left\{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k})\right\}$	$\boxed{3} G = \text{bar}\left\{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k}); (C; \frac{c}{k})\right\}$
Propriété caractéristique	$\boxed{4} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$	$\boxed{4} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$
Coordonnées	$\boxed{5} G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right)$	$\boxed{5} G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$
Associativité	$\boxed{6}$ Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des deux poids.	

Remarques :

Soit A, B et C trois points distincts du plan

1) G est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 1)\}$

2) G est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$

3) Pour montrer que $G \in (AB)$ il suffit de :

Trouver $a; b \in \mathbb{R}$ tel que $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$ (ou montrer que les points A, B et G sont alignés).



Exemples résolus

Exemple 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$ dans les cas suivants :

$$1) 2\vec{GA} + 3\vec{BA} = \vec{0}; \quad 2) \vec{GA} + \vec{GB} = 3\vec{AB}; \quad 3) \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

Solution

$$\begin{aligned} 1) 2\vec{GA} + 3\vec{BA} &= \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{GA} + 3(\vec{BG} + \vec{GA}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\vec{GA} + 3\vec{BG} + 3\vec{GA} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 5\vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A; 5); (B; -3)\} \text{ donc } a = 5 \text{ et } b = -3 \quad (5 + (-3) \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \vec{GA} + \vec{GB} &= 3\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} = 3(\vec{AG} + \vec{GB}) \\ &\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} = -3\vec{GA} + 3\vec{GB} \\ &\Leftrightarrow 4\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A; 4); (B; -2)\} \text{ donc } a = 4 \text{ et } b = -2 \quad (4 + (-2) \neq 0) \end{aligned}$$

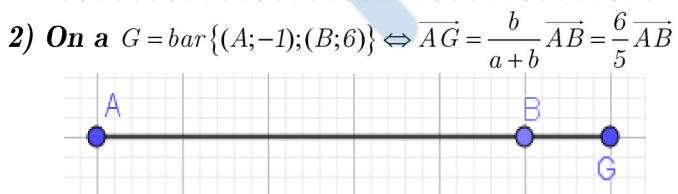
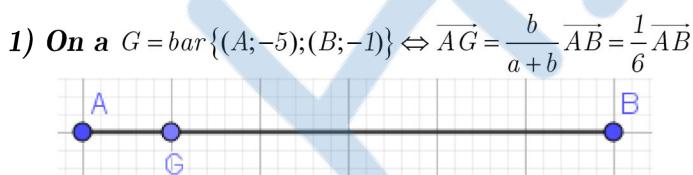
$$\begin{aligned} 3) \vec{AG} &= \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AG} + \vec{GB}) \\ &\Leftrightarrow \vec{AG} - \frac{2}{3}\vec{AG} - \frac{2}{3}\vec{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\vec{GA} - \frac{2}{3}\vec{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow G = \text{bar}\left\{(A; -\frac{1}{3}); (B; -\frac{2}{3})\right\} \text{ donc } a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{2}{3} \quad \left(-\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0\right) \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit A et B deux points du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

- | | |
|---|--|
| 1) $G = \text{bar}\{(A; -5); (B; -1)\}$ et $AB = 6$ | 2) $G = \text{bar}\{(A; -1); (B; 6)\}$ et $AB = 5$ |
| 3) $G = \text{bar}\{(A; 5); (B; -1)\}$ et $AB = 4$ | 4) $G = \text{bar}\{(A; -8); (B; 5)\}$ et $AB = 3$ |

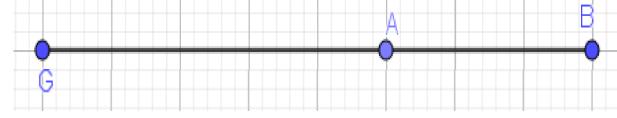
Solution



3) On a $G = \text{bar}\{(A; 5); (B; -1)\} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{5}{5+(-1)}\vec{AB} = -\frac{5}{4}\vec{AB}$



4) On a $G = \text{bar}\{(A; -8); (B; 5)\} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{-8}{-8+5}\vec{AB} = -\frac{8}{3}\vec{AB}$



Exemple 3

Soit A et B deux points distincts du plan et G un point tel que $G = \text{bar}\{(A; 200); (B; 300)\}$

1) Montrer que $G = \text{bar}\{(A; 2); (B; 3)\}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 0$ b) $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 20$ c) $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$

Solution

1) On a $G = \text{bar}\{(A;200);(B;300)\}$ donc d'après la propriété de l'homogénéité $G = \text{bar}\left\{(A;\frac{200}{100});(B;\frac{300}{100})\right\}$

C'est-à-dire $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$

2) Rappel : Les ensembles des points usuels du plan

Soit A et B deux points distincts du plan et R un réel strictement positif

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$MA = R$	Le cercle du centre A et de rayon R .
$MA = 0$	Le singleton $\{A\}$
$MA = -R$	L'ensemble vide.
$MA = MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

a) On a $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$ donc d'après la propriété caractéristique :

Pour tout $M \in (P)$ $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = (2+3)\vec{MG} = 5\vec{MG}$

Donc $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 0 \Leftrightarrow \|5\vec{MG}\| = 0 \Leftrightarrow MG = 0$, donc cet ensemble est le singleton $\{G\}$

b) On a $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 20 \Leftrightarrow \|5\vec{MG}\| = 20 \Leftrightarrow MG = 4$ donc cet ensemble est le cercle de centre G et de rayon 4

c) Soit $G' = \text{bar}\{(A;3);(B;2)\}$ donc d'après la propriété caractéristique :

Pour tout $M \in (P)$ $3\vec{MA} + 2\vec{MB} = (3+2)\vec{MG'} = 5\vec{MG'}$

Donc $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\| \Leftrightarrow \|5\vec{MG}\| = \|5\vec{MG'}\| \Leftrightarrow MG = MG'$, donc cet ensemble est la médiatrice de $[GG']$

Exemple 4

Soit ABC un triangle, on pose $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$ et $G' = \text{bar}\{(A;-2);(C;7)\}$

1) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G et G'

Montrer que : $(\forall M \in (P)) \quad 3\vec{MB} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG} + 5\vec{MG'}$

2) Soit I un point du plan tel que $I = \text{bar}\{(B;3);(C;7)\}$

a) Simplifier par deux méthodes le vecteur $3\vec{IB} + 7\vec{IC}$

b) En déduire que I est le milieu du segment $[GG']$

Solution

1) On a $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$ et $G' = \text{bar}\{(A;-2);(C;7)\}$

Donc $(\forall M \in (P)) \quad 2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG}$ et $(\forall M \in (P)) \quad -2\vec{MA} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG'}$

Donc $(\forall M \in (P)) \quad (2\vec{MA} + 3\vec{MB}) + (-2\vec{MA} + 7\vec{MC}) = 5\vec{MG} + 5\vec{MG'}$

C'est-à-dire $(\forall M \in (P)) \quad 3\vec{MB} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG} + 5\vec{MG'}$

2) a) On a $I = \text{bar}\{(B;3);(C;7)\}$ donc par définition $3\vec{IB} + 7\vec{IC} = \vec{0}$

D'autre part on a $(\forall M \in (P)) \quad 3\vec{MB} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG} + 5\vec{MG'}$ en particulier $3\vec{IB} + 7\vec{IC} = 5\vec{IG} + 5\vec{IG}'$

b) D'après la question précédente en déduit que $5\vec{IG} + 5\vec{IG}' = \vec{0}$

Donc $\vec{IG} + \vec{IG}' = \vec{0}$

C'est-à-dire $I = \text{bar}\{(G;1);(G';1)\}$

Ainsi I est le milieu du segment $[GG']$



Exemple 5

1) Déterminer les réels a, b et c tel que $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ sachant que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2) Placer les points $A(0; 3)$, $B(1; 0)$ et $C(-2; 1)$ dans un repère puis placer les points H et D sachant que :

$$H = \text{bar}\{(A; 6); (B; -3); (C; -6)\} \text{ et } D = \text{bar}\{(A; 1); (B; -1); (C; -1)\}$$

3) Montrer que $H = \text{bar}\{(A; 2); (B; -1); (C; -2)\}$

4) Montrer vectoriellement que le quadrilatère $ADHC$ est un parallélogramme.

5) Déterminer les coordonnées de H et D

6) Montrer en utilisant les coordonnées que le quadrilatère $ADHC$ est un parallélogramme.

7) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$

Solution

1) On a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = -3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

On pose $a = 3$; $b = -2$ et $c = -2$ puisque $a+b+c \neq 0$ alors $G = \text{bar}\{(A; 3); (B; -2); (C; -2)\}$

2) On a $H = \text{bar}\{(A; 6); (B; -3); (C; -6)\}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AH} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} = \frac{-3}{6+(-3)+(-6)} \overrightarrow{AB} + \frac{-6}{6+(-3)+(-6)} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

On a $D = \text{bar}\{(A; 1); (B; -1); (C; -1)\}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AD} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} = \frac{-1}{1+(-1)+(-1)} \overrightarrow{AB} + \frac{-1}{1+(-1)+(-1)} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

3) On a $H = \text{bar}\{(A; 6); (B; -3); (C; -6)\}$

$$\text{Donc } H = \text{bar}\left\{(A; \frac{6}{3}); (B; \frac{-3}{3}); (C; \frac{-6}{3})\right\}$$

C'est-à-dire $H = \text{bar}\{(A; 2); (B; -1); (C; -2)\}$

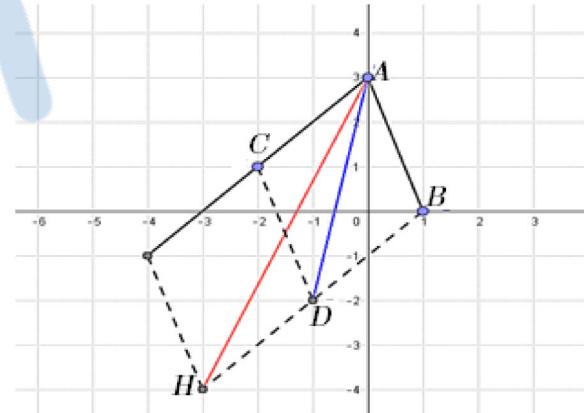
4) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ vectoriellement.

$$\text{On a } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Donc il suffit montrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\text{On a } \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{C.Q.F.D}$$



5) On a $H = \text{bar}\{(A; 2); (B; -1); (C; -2)\}$ donc $H\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$

$$\text{C'est-à-dire } H\left(\frac{2 \times 0 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-2)}{2 + (-1) + (-2)}; \frac{2 \times 3 + (-1) \times 0 + (-2) \times 1}{2 + (-1) + (-2)}\right) \text{ d'où } H(-3; -4)$$

$$\text{On a } D = \text{bar}\{(A; 1); (B; -1); (C; -1)\} \text{ donc } D\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$$

$$\text{C'est-à-dire } D\left(\frac{1 \times 0 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-2)}{1 + (-1) + (-1)}; \frac{1 \times 3 + (-1) \times 0 + (-1) \times 1}{1 + (-1) + (-1)}\right) \text{ d'où } D(-1; -2)$$

6) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ par des coordonnées.

$$\text{On a } \overrightarrow{AD}(x_D - x_A; y_D - y_A) = \overrightarrow{AD}(-1 - 0; -2 - 3) = \overrightarrow{AD}(-1; -5)$$



$$\text{Et } \overrightarrow{CH}(x_H - x_C; y_H - y_C) = \overrightarrow{CH}(-3 + 2; -4 - 1) = \overrightarrow{CH}(-1; -5)$$

Ainsi les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{CH} ont de mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ C.Q.F.D

$$7) \text{ On a } G = \text{bar}\{(A; 3); (B; -2); (C; -2)\} \text{ donc } (\forall M \in (P)) 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (3 + (-2) + (-2))\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MG}$$

$$\text{Et } H = \text{Bar}\{(A; 2); (B; -1); (C; -2)\} \text{ donc } (\forall M \in (P)) 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (2 + (-1) + (-2))\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{MH}$$

$$\text{On a donc } \|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{-MG}\| = \|\overrightarrow{-MH}\|$$

$$\Leftrightarrow MG = MH$$

Ainsi cet ensemble est la médiatrice du segment $[GH]$

Exemple 6

ABC un triangle.

$$1) \text{ Placer les points } D \text{ et } G \text{ tel que } D = \text{bar}\{(A; 2); (B; -3)\} \text{ et } G = \text{bar}\{(A; 2); (B; -3); (C; -1)\}$$

2) En utilisant l'associativité du barycentre vérifier que G est le milieu du segment $[CD]$

$$3) \text{ On pose } H = \text{bar}\{(A; -4); (B; 1)\}; E = \text{bar}\{(B; 1); (C; 5)\} \text{ et } F = \text{bar}\{(A; -4); (C; 5)\}$$

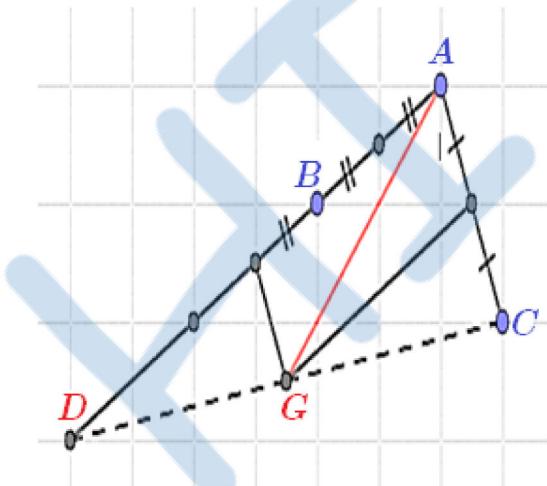
Montrer que les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en un point à préciser.

Solution

$$1) \text{ On a } D = \text{bar}\{(A; 2); (B; -3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} = \frac{-3}{2+(-3)} \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Et } G = \text{bar}\{(A; 2); (B; -3); (C; -1)\}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overrightarrow{AG} &= \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} = \frac{-3}{2+(-3)+(-1)} \overrightarrow{AB} + \frac{-1}{2+(-3)+(-1)} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$



2) On a $G = \text{bar}\{(A; 2); (B; -3); (C; -1)\}$ et $D = \text{bar}\{(A; 2); (B; -3)\}$ donc par l'associativité du barycentre on obtient $G = \text{bar}\{(D; 2+(-3)); ((C; -1))\}$ par suite $G = \text{bar}\{(D; -1); ((C; -1))\}$ donc G est le milieu du segment $[CD]$

3) On a les points H , E et F sont des barycentres partiels du barycentre $G' = \text{bar}\{(A; -4); (B; 1); (C; 5)\}$

(Le points G' existe est unique car $-4+1+5 \neq 0$)

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' et H , on obtient $G' = \text{bar}\{(H; -3); (C; 5)\}$ donc $G' \in (HC)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' et E , on obtient $G' = \text{bar}\{(A; -4); (E; 6)\}$ donc $G' \in (AE)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' et F , on obtient $G' = \text{bar}\{(F; 1); (B; 1)\}$ donc $G' \in (FB)$

Ainsi les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en G' .

Exercice 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $2\vec{AG} - 3\vec{GB} = \vec{0}$; 2) $2\vec{GA} + 3\vec{BA} = \vec{0}$
- 3) $\vec{GA} + \vec{GB} = 3\vec{AB}$; 4) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

Exercice 2

Soit A et B deux points du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

- 1) $G = \text{bar}\{(A; -5); (B; -1)\}$ et $AB = 6$
- 2) $G = \text{bar}\{(A; -1); (B; 6)\}$ et $AB = 5$
- 3) $G = \text{bar}\{(A; 5); (B; -1)\}$ et $AB = 4$
- 4) $G = \text{bar}\{(A; -8); (B; 5)\}$ et $AB = 3$
- 5) $G = \text{bar}\{(A; -2); (B; 3)\}$ et $AB = 2$
- 6) $G = \text{bar}\{(A; 6); (B; -5)\}$ et $AB = 1$

Exercice 3

On considère un triangle ABC et les points G , K et I tels que : $G = \text{bar}\{(A; -1); (B; -4); (C; 3)\}$

$$K = \text{bar}\{(A; -1); (B; -4)\} \quad I = \text{bar}\{(B; -4); (C; 3)\}$$

- 1) Construire les points G , K et I
- 2) En utilisant l'associativité du barycentre montrer que G est le milieu de $[AI]$.
- 3) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre montrer que :

$$\vec{CG} = \frac{1}{2}\vec{CA} + 2\vec{CB} \quad \text{et} \quad \vec{CK} = \frac{1}{5}\vec{CA} + \frac{4}{5}\vec{CB}$$

b) En déduire que les points C , K et G sont alignés.

- 4) On considère le point $F = \text{bar}\{(A; -1); (C; 3)\}$

montrer que $G \in (BF)$

5) En déduire que les droites (AI) , (CK) et (BF) sont concourantes en un point à déterminer.

6) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|-\vec{MA} - 4\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 32$

Exercice 4

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points $A(2; 0)$; $B(5; 6)$; $C(-4; 2)$; $D(-1; 5)$

On pose $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 2)\}$ et $G' = \text{bar}\{(C; 1); (D; 2)\}$

- 1) Déterminer les coordonnées de G et de G'
- 2) Soient I , J et K les milieux des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[GG']$ respectivement.

- a) Déterminer les coordonnées des points I , J et K
- b) Montrer que les points I , J et K sont alignés.

Exercice 5

On considère un triangle ABC et les points G , H et D tels que : $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$;

$H = \text{bar}\{(A; 5); (B; 2); (C; -3)\}$; D est le milieu de $[AC]$

- 1) a) Montrer que $\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{-3}{4}\vec{AC}$
- b) Construire les points H et D
- 2) a) Exprimer D sous forme du barycentre de deux points
- b) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre déduire que G est le milieu de $[DB]$
- c) Placer le point G dans la figure.

3) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G montrer que $\vec{CG} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$

$$b) \text{En déduire que } \vec{CG} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$$

c) En déduire que le quadrilatère $CGHA$ est un parallélogramme.

- 4) Soit E le milieu de $[AB]$, montrer que les points H , E et G sont alignés.

5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|5\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

Exercice 6

On considère un triangle ABC et les points G , I et K tels que $G = \text{bar}\{(A; 3); (B; 2); (C; -1)\}$; I est le milieu de $[AC]$

$$\text{et } \vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AB}$$

$$1) \text{Montrer que } \vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} \text{ et } \vec{BI} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

2) En déduire que $(BI) \parallel (AG)$

- 3) a) Montrer que $K = \text{bar}\{(A; 3); (B; 2)\}$

b) Montrer que les points C , K et G sont alignés.

- 4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 10$$

Exercice 7

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 4)$ et $(C; -3)$.

- 1) Construire le barycentre I de $(B; 4)$ et $(C; -3)$.

- 2) Montrer que $G = \text{bar}\{(A; 1); (I; 1)\}$
- 3) En déduire la position de G sur (AI) .
- Exercice 8**
- 1) Placer dans un repère les points :
- $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(2; 5)$.
- 2) Soit G le barycentre des points pondérés :
- $(A; 3)$, $(B; 2)$ et $(C; 4)$.
- a) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G .
- b) La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ?
- 44

Exercice 9

Soit ABC un triangle.

- 1) a) Construire le point I tel que $\overline{BI} = 3\overline{BC}$
- b) Montrer que $I = \text{bar}\{(B;-2);(C;3)\}$
- c) Montrer que $\overline{AI} = -2\overline{AB} + 3\overline{AC}$

2) Soit $G = \text{bar}\{(A;-3);(B;-2);(C;3)\}$.

Montrer que $\overline{AG} = \overline{AB} - \frac{3}{2}\overline{AC}$

3) a) En déduire que les points A , I et G sont alignés.

b) Construire le point G .

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\|-\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MC}\| = \|-\overline{2AB} + 3\overline{AC}\|$

b) $\|-2\overline{MB} + 3\overline{MC}\| = 3$

Exercice 10

$ABCD$ un quadrilatère dans le plan, on considère les points H , I et J tels que :

$$\overline{CH} = 2\overline{AC} + 2\overline{BC} + \overline{AD}$$

$$I = \text{bar}\{(A;3);(C;-5)\}$$

$$J = \text{bar}\{(D;-1);(B;2)\}$$

1) Montrer que $H = \text{bar}\{(A;3);(B;2);(C;-5);(D;-1)\}$

2) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre montrer que $H = \text{bar}\{(I;-2);(J;1)\}$

2) En déduire que I est le milieu de $[JH]$

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1;2)$, $B(-3;2)$ et $C(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point G barycentre du système pondéré $\{(A;4);(B;-3);(C;3)\}$

2) Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère le point G_m barycentre du système pondéré

$$\{(A;3m+1);(B;-2m-3);(C;3-m)\}$$

a) Etablir l'existence du point G_m

b) Trouver les coordonnées de G_m

c) Quel est l'ensemble des points G_m lorsque m varie sur \mathbb{R}

Exercice 12

Soit $ABCD$ un parallélogramme et $\alpha \in]0; +\infty[$

On considère les points K et L définis par

$$\overline{DK} = (\alpha+2)\overline{DB} \text{ et } \overline{CL} = \alpha\overline{BC}$$

Soit M le point d'intersection de (CK) et (DL)

Montrer que $\overline{DM} = \frac{\alpha+2}{\alpha^2+2\alpha+2}\overline{DL}$

Exercice 13

Soit ABC un triangle. Y est le milieu de $[BC]$.

1) Placer, en justifiant, le barycentre U de $(A;4)$ et $(C;1)$ puis placer le barycentre E de $(A;4)$ et $(B;1)$

2) Soit $G = \text{bar}\{(A;4);(B;1);(C;1)\}$. Montrer que G est aussi barycentre de $(E;5)$ et $(C;1)$.

3) Démontrer que les droites (EC) , (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 14

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ et $ABCD$ un trapèze tel que

$$\overline{AB} = a\overline{CD}$$

1) Déterminer les réels b et c pour que le point D soit le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;b);(C;c)\}$

2) On suppose dans cette équation que $a = -1$

Soit E et F les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BE]$

Déterminer le nombre x pour que F soit le barycentre du système $\{(A;1);(B;-1);(C;1);(E;x)\}$

Exercice 15

Étant donné un triangle ABC et k un réel non nul donné, on définit les points D et E par les relations :

$$\overline{AD} = k\overline{AB} \text{ et } \overline{CE} = k\overline{CA}$$

1) Faire une figure illustrant ces données lorsque $k = \frac{1}{3}$, puis lorsque $k = -1$.

2) Montrer que $D = \text{bar}\{(A;1-k);(B;k)\}$

3) Montrer que $E = \text{bar}\{(C;1-k);(A;k)\}$

4) En déduire que pour tout point M du plan, on a :

$$\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{MA} + \overline{MC} + k\overline{CB} = 2(\overline{MB} + k\overline{BC}) \text{ où}$$

B' et C' sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

5) Soit I le milieu de $[DE]$. Déduire de la question précédente que I , B' et C' sont alignés.

Exercice 16

ABC est un triangle de centre de gravité G . On note I , J , M , N , R et S les points définis par :

$$\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AB} ; \quad \overline{AJ} = \frac{2}{3}\overline{AB} ; \quad \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AC}$$

$$\overline{AN} = \frac{2}{3}\overline{AC} ; \quad \overline{BR} = \frac{1}{3}\overline{BC} ; \quad \overline{BS} = \frac{2}{3}\overline{BC}$$

Démontrer que les droites :

(IS) , (MR) et (NJ) sont concourantes en G .

