I Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels)

1 Dérivabilité d'une fonction en un point

a Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$.

Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et noté $f'(x_0) = \ell$.

Exemple

❐ f est une fonction numérique définie par : $f(x) = 2x^2$.

Étudions la dérivabilité de f en $x_0 = 2$

On a :

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} 2(x+2) = 8$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 2$ et on a : $f'(2) = 8$

b Interprétation géométrique

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

Une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Exemple

❐ g est définie numérique définie par : $g(x) = x^3$.

1. Étudions la dérivabilité de g en 1. On a :

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x^2+x+1 = 3$$

Donc g est dérivable en 1, et On a : $g'(1) = 3$.

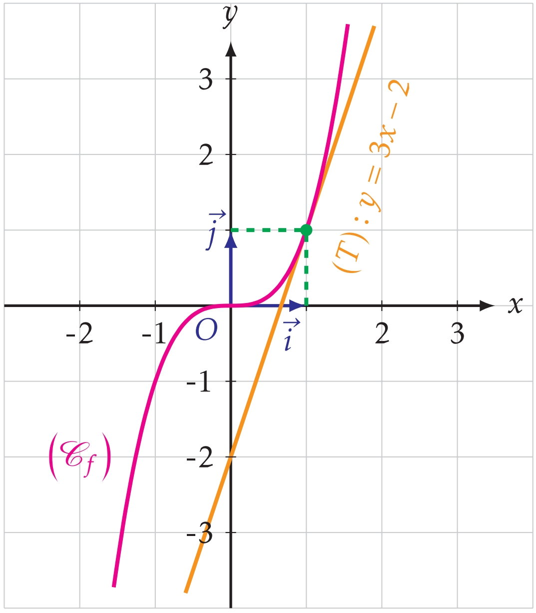
2. Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.

On a : $g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$

Donc l'équation de la tangente à (C_f) est :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$
$$y = 3(x-1) + 1$$
$$y = 3x - 2$$

D'où $(T) : y = 3x - 2$.



Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

1. Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

2 Dérivabilité à gauche - Dérivabilité à droite

a Définition et propriété

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0; \alpha[$.
  On dit que f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$.
  Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0 et noté $f'_d(x_0) = \ell$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha; x_0]$.
  On dit que f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$.
  Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0 et noté $f'_g(x_0) = \ell$.

Propriété

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a, f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple

❒ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$.

1 Étudions la dérivabilité de f à droite en 1 :

On a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left|x^2-1\right|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2.$$

D'où f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 2$.

2 Étudions la dérivabilité de f à gauche en 1 :

On a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\left|x^2-1\right|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2.$$

D'où f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -2$

3 Déduisons que f n'est pas dérivable en 1

Puisque $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ alors f n'est pas dérivable en 1.

b Interprétation géométrique

Propriété

- Soit f une fonction dérivable à droite en x_0.
  Une équation de la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 est :

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

- Soit f une fonction dérivable à gauche en x_0.
  Une équation de la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 est :

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

Exemple

D'après l'exemple précédent :

❒ On a f est dérivable à droite en 1, alors (C_f) admet une demi-tangente (T_1) au point d'abscisse 1 d'équation :

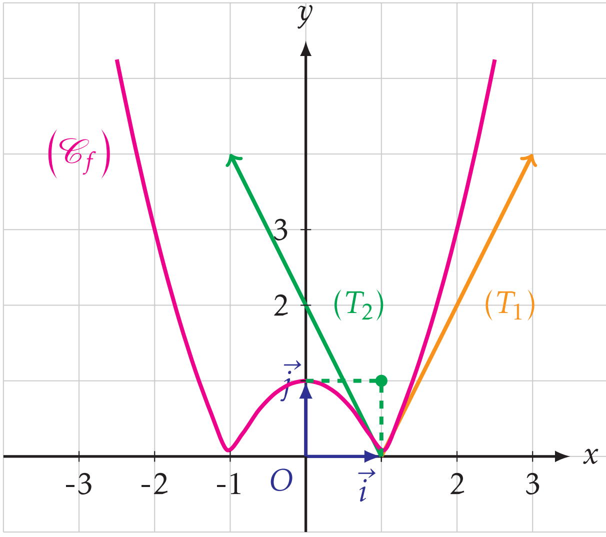
$$\begin{cases} y = f'_d(1)(x-1) + f(1) \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(x-1) + 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

❒ On a f est dérivable à gauche en 1, alors (C_f) admet une demi-tangente (T_2) au point d'abscisse 1 d'équation :

$$\begin{cases} y = f_g'(1)(x-1) + f(1) \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2(x-1) + 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$



Exercice d'application

1 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1]$ par : $f(x) = |x|\sqrt{1-x}$.

ⓐ Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

ⓑ Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

ⓒ La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

2 On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 3\sqrt[3]{x-1} & ; \quad x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

ⓐ Étudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = 1$.

ⓑ Interpréter le résultat obtenu.

C Récapitulatif

Limite	Valeur	Interprétation
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une tangente au point $(x_0; f(x_0))$ de coeffcient directeur a
	0	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une tangente horizontale au point $(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente à droite au point $(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
	0	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente horizontale à droite au point $(x_0; f(x_0))$
	$+\infty$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente verticale à droite au point $(x_0; f(x_0))$ dirigéé vers le haut
	$-\infty$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente verticale à droite au point $(x_0; f(x_0))$ dirigéé vers le le bas
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente à gauche au point $(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
	0	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente horizontale à gauche au point $(x_0; f(x_0))$
	$+\infty$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente verticale à gauche au point $(x_0; f(x_0))$ dirigéé vers le bas
	$-\infty$	$\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une demi-tangente verticale à droite au point $(x_0; f(x_0))$ dirigéé vers le haut.

3 Fonction dérivée

a Définition

• Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.
- La fonction f' définie sur I par : $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

• Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- Si la fonction dérivée f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée seconde de la fonction f et on la note f''
- De même, on définie la fonction dérivée $3^{\text{ème}}$ (f''') de la fonction f . (et ainsi de suite)

Remarque

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sut tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

4 Dérivée des fonctions usuelles

La fonction f	La fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto ax\,;\, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto ax+b\,;\, a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^n\,;\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi[\,;\, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \sin(ax+b)\,;\, a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos(ax+b)\,;\, a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$]-\infty;+\infty[$

5 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k , a et b trois nombres réels ($a \neq 0$).

La fonction f	La fonction dérivée f'	La condition
$f+g$	$f'+g'$	–
kf	kf'	–
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	–
$\dfrac{1}{g}$	$-\dfrac{g'}{g^2}$	g ne s'annule pas sur I
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	g ne s'annule pas sur I
f^n ; $(n \in \mathbb{N}^*)$	$nf'f^{n-1}$	–
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	f strictement sur I
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	$(ax+b) \in I$

Remarque

Avant de dérivée une fonction, il ne faut pas oublier de vérifier et rappeler que la fonction en question est définie et dérivable sur l'intervalle considéré.

Exercice d'application

Déterminer la dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 2x^2 - 5$
2. $f(x) = -\dfrac{8}{3}x^5 - 5x^3 - 2x + 9$
3. $f(x) = \dfrac{-2}{2x-2}$
4. $f(x) = 8\sqrt{x} - x$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$
6. $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$
7. $f(x) = \cos^3(2x-3) - \sqrt{x^2-2x}$
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-8} - x^2}{x^2-2x+6}$

II Complément sur la dérivation

1 Dérivabilité et continuité

Propriété

Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & ; \quad x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + \sqrt{1-x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$

1 Étudions la continuité de f en 0.

On a : $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + \sqrt{1-x} = 1$

Donc f est continue en 0

2 Étudions la dérivabilité de f en 0.

On a d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \dfrac{1}{2}$

D'autre part :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} x - \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} x - \frac{1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$. Ainsi la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Remarque

- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
- Une fonction continue en a n'est pas forcément dérivable en a. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice d'application

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1 Étudier la continuité de g en 0.

2 Étudier la dérivabilité de g en 0.

2 Dérivée d'une fonction composée

Activité

f et g deux fonctions définies sur $I =]2;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur I, puis calculer $f'(x)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $f(I)$.
3. a) Calculer $gof(x)$ et $(gof)'(x)$
   b) Vérifier que : $(\forall x \in I)\,;\, (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Propriété

- Si f est dérivable en un point a et g en $f(a)$, alors gof est dérivable en a ; et on a :

$$(gof)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et g sur $f(I)$, alors gof est dérivable sur I ; et on a :

$$(\forall x \in I) : (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Exemple

Soient f et g deux fonctions numériques définie par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.
Montrons que gof est dérivable sur $I =]1;+\infty[$ sans déterminer $(gof)(x)$:
f est une fonction polynôme dérivable sur I et on a $f'(x) = 2x > 0$ sur I et
$f(I) = \left]\lim_{x\to 1^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]2;+\infty[$.
D'autre part, la fonction g est rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{2\}$, en particulier, sur $f(I)$; et $g'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$.
Ainsi, la fonction gof est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$:

$$\begin{aligned}(gof)'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x)\\ &= \frac{-2}{((x^2+1)-2)^2} \times 2x\\ &= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

Exercice d'application

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Sans calculer $fog(x)$ montrer que fog est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $(fog)'(x)$.

3 Dérivée de la fonction réciproque

Activité

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 1$

1 ⓐ Montrer que f est continue et strictement croissante sur I.

ⓑ En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$.

2 ⓐ Montrer que : $(\forall x \in]1;+\infty[)\,;\, f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

ⓑ Vérifier que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

3 ⓐ Calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ sur $]1;+\infty[$.

ⓑ Vérifier que : $(\forall x \in]1;+\infty[)\,;\, \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$; et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

- Si f est dérivable en I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$; et on a :

$$(\forall x \in f(I));\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple

❒ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1 Montrons que f admet une fonction réciproque :

En effet, la fonction polynôme $x \longrightarrow x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Puisque $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;\, f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

D'autre part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$).

Par conséquent, f admet une fonction réciproque définie sur $f(\mathbb{R}^+) = [1;+\infty[$.

2 Calculons $f(\sqrt{3})$ puis montrons que f^{-1} est dérivable en 2 et calculons $\left(f^{-1}\right)'(2)$

On a : $f(\sqrt{3}) = \sqrt{1+3} = 2$

Puisque f est dérivable en $\sqrt{3}$ et $f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(f'(\sqrt{3}) \neq 0\right)$, alors f^{-1} est dérivable en $f(\sqrt{3}) = 2$ et on a : $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sue J.
3. Calculer $f(\sqrt{2})$ et $\left(f^{-1}\right)'(-\sqrt{2})$, en déduire l'équation de la tangente de $(C_{f^{-1}})$ en $-\sqrt{2}$.

4 Dérivée de la fonction racine n$^{\text{ème}}$

Propriété

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par : sur

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{1}{n}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{n}-1} = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Exemple

1. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$.
2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{8x-5}$

   La fonction $x \mapsto 8x-5$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$. Par suite la fonction f est dérivable sur $\left]\frac{5}{8};+\infty\right[$ et on a pour tout $x \in \left]\frac{5}{8};+\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(8x-5)'(8x-5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{8}{3.\sqrt[3]{(8x-5)^2}}$$

Exercice d'application

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}$ $f(x) = \sqrt[4]{3+\cos^2 x}$

$\boxed{2}$ $f(x) = x.\sqrt[7]{x^{-}x}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt[3]{(x^3-1)^4}$

$\boxed{4}$ $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)$

III Étude de fonctions numériques

1 Monotonie d'une fonction numérique

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **constante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ pour tout réel x de I.
- f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I.
- f est **décroissante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pour tout réel x de I.

Exemple

❒ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-\infty;-1[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+x}}$.

Étudions les variations de f :

La fonction $x \mapsto x^2+x$ est dérivable sur l'intervalle I car c'est une fonction polynôme. De plus, on a : pour tout $x \in x^2+x > 0$. Donc, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^2+x}$ est dérivable sur I.

Enfin, la fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de deux fonctions dérivable sur I.

On a pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+x}}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x^2+x} - x \times \frac{2x+1}{3.\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2} = \frac{\frac{3\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^3 - (2x^2+x}{3.\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2}$$

Par conséquent : $(\forall x \in I); f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{3.\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^4}$. Ainsi, le signe de $f'(x)$ est celui de x^2+x.

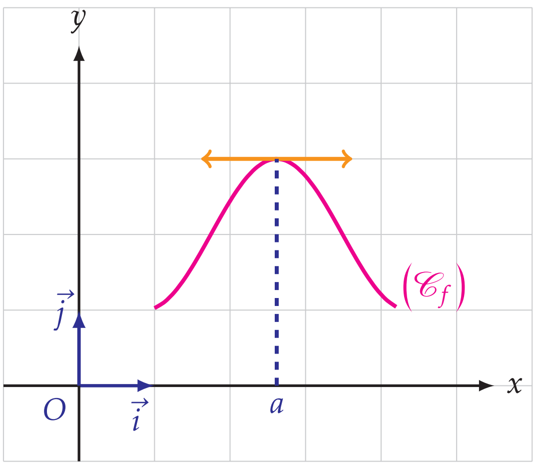
x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

2 Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle

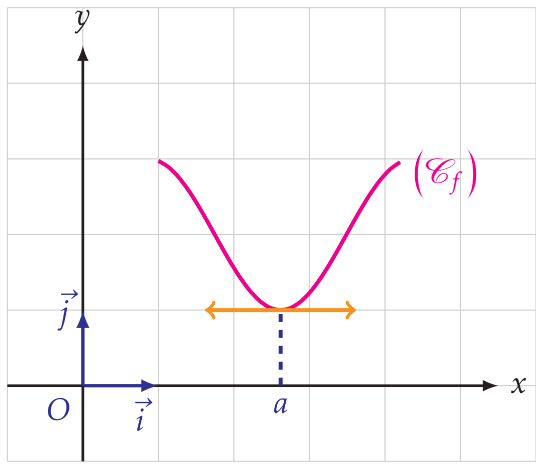
Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- Si f admet un extremum local au point a, alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et f' change de signe au voisinage de a, alors f admet un extremum local au point a.



f présente un maximum en a



f présente un minimum en a

Exemple

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$.
Le tableau de variation de f est donnée par :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

La fonction f admet deux extremums locaux sur son ensemble de définition :

- Un minimum local en 0 et qui est $f(0) = 1$.
- Un maximum local en -1 et qui est $f(-1) = -1$.

Exercice d'application

1 Soit f la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt[3]{x+1}$

ⓐ Calculer $\lim x \to +\infty f(x)$.

ⓑ Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

ⓒ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

2 Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt[3]{aw^2} - \frac{2}{3}x$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

ⓐ Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{x}} - 1\right)$.

ⓑ En déduire que pour tous réels a et x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $a^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}x$.

3 Axe de symétrie - centre de symétrie

Propriété

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) \quad ; \quad 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) \quad ; \quad f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

- Le point $I(a;b)$ est centre de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall \in D_f) \quad ; \quad 2a - x \in D_f \\ (\forall \in D_f) \quad ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Exemple

❒ La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la fonction f définie par :

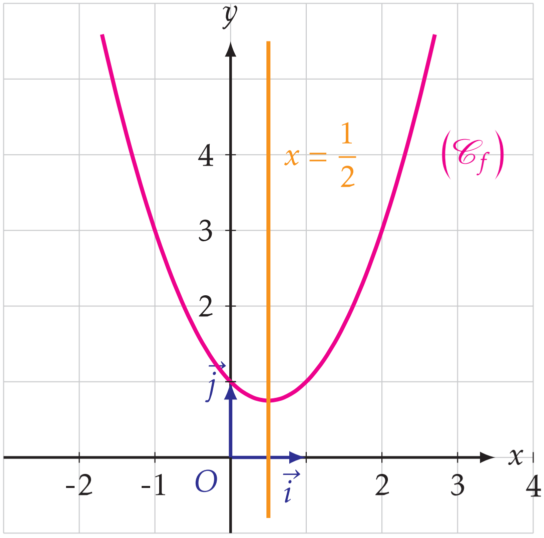
$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 \times \frac{1}{2} - x = 1 - x \in \mathbb{R}$
- On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(2 \times \frac{1}{2} - x) &= f(1 - x) \\ &= (1 - x)^2 - (1 - x) + 1 \\ &= 1 - 2x + x^2 - 1 + x + 1 \end{aligned}$$

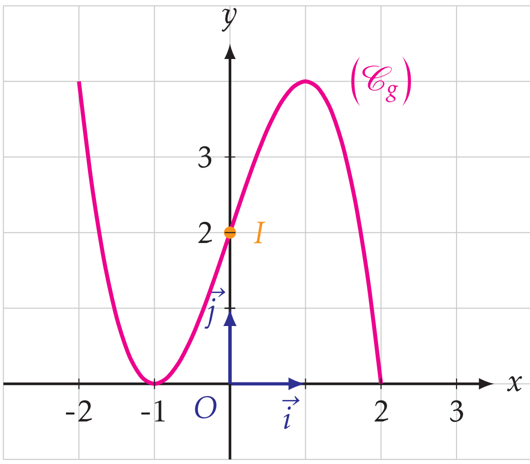
$$= x^2 - x + 1$$
$$= f(x)$$



❒ Le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de la fonction g définie par : $g(x) = -x^3 + 3x + 2$.
En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2\times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$
- On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(2\times 0 - x) &= g(-x) \\ &= -(-x)^3 + 3(-x) + 2 \\ &= x^3 - 3x + 2 \\ &= 4 - (-x^3 + 3x + 2) \\ &= 4 - g(x) \end{aligned}$$



Remarques

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire, alors sa courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet l'origine du repère comme centre

de symétrie.

- Si la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la fonction f admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées $(a; b$ comme centre de symétrie, alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{\text{étude}} = D_f \cap [a; +\infty[$.

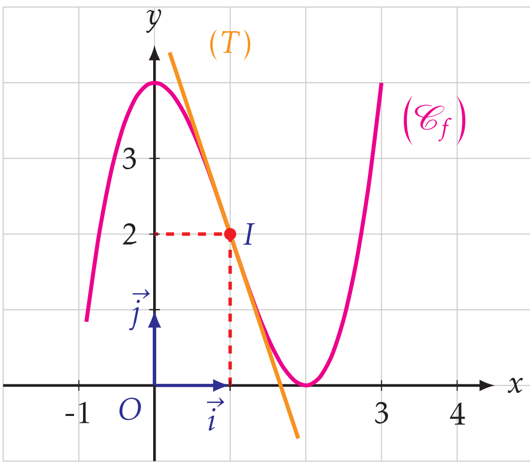
Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I.

- Si $f''(x) > 0$ sur I, alors la courbe (C_f) est convexe sur I.
- Si $f''(x) < 0$ sur I, alors la courbe (C_f) est concave sur I.
- Si $f''(x) = 0$ et f'' change de signe en a, alors $I(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

Exemple

❒ On considère la figure ci-contre qui présente le graphe d'une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est convexe sur $[3; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; 3]$.
Le point $I(1; 2)$ est un point d'inflexion de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
La tangente (T) traverse la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en $I(1; 2)$.



Exercice d'application

Pour chacun des cas suivants, étudier la concavité de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et déterminer ses points d'inflexions (sous réserve d'existence) :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

2. $x + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x-1}$

4 Étude des branches infinies

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ — La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ — La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ — La coure $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ — La coure $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$:
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$ — La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ — La coure $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique dirigée vers la droite d'équation $y = ax$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ — La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$

5 Exemples d'études de fonction

a Partie I : Étude d'un polynôme

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1 Étudier les variations de g

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 1$, et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad ou \quad x = 1 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de g est le suivant :

Omar BACHAIN

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g			-1				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-5		

2 ⓐ Montrons que $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$; et que $2<\alpha<3$.

g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $g([1;+\infty[)=[-5;+\infty[$

Comme $0\in[-5;+\infty[$, alors selon T.V.I l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[1;+\infty[$. Et $g(2)\times g(3)<0$ car $g(1)=-1$ et $g(3)=15$, donc $2<\alpha<3$.

ⓑ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

- -1 est une valeur maximale de g sur $]-\infty;1]$ donc : $g(x)<0$ sur $]-\infty;1]$.

  g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $\alpha\in[1;+\infty[$; donc :

- $1\leq x\leq\alpha \Rightarrow g(x)\leq g(\alpha)\Rightarrow g(x)\leq 0$. $(g(\alpha)=0)$
- $x\geq\alpha \Rightarrow g(x)\geq g(\alpha)\Rightarrow g(x)\geq 0$.

3 Étudier les branches infinies de (C_g)

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=+\infty$, donc (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$; de même au voisinage de $-\infty$.

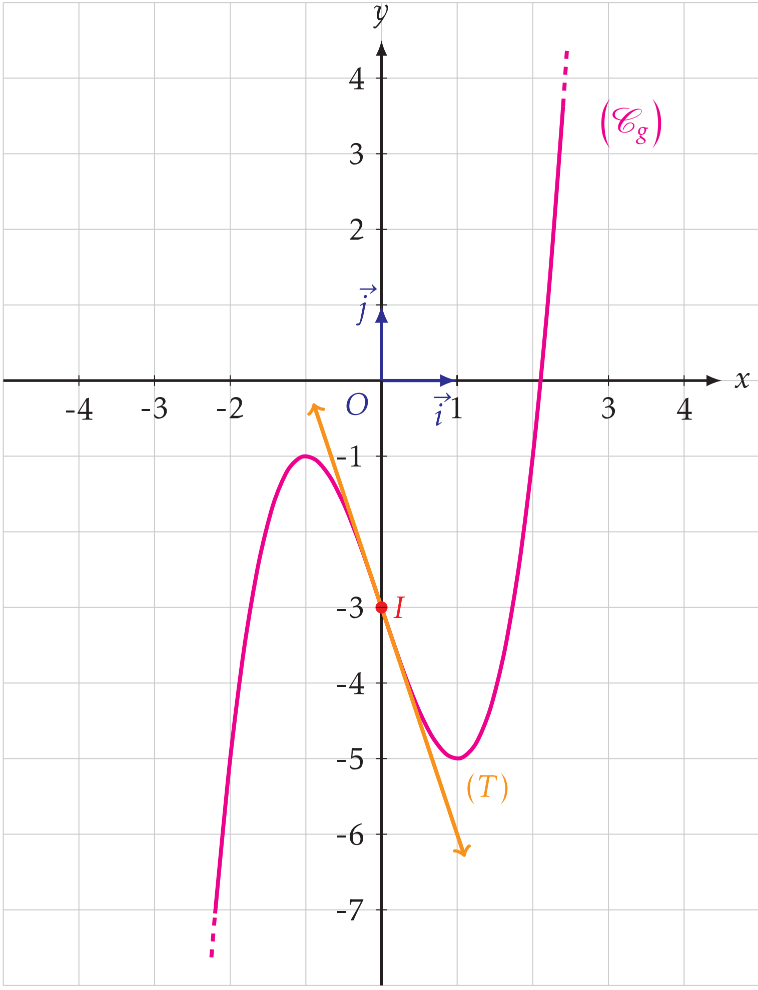
4 ⓐ Montrer que $I(0;-3)$ est un point d'inflexion de (C_g).

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g''(x)=6x$ et g'' s'annule en 0 en changeant de signe.

Et puisque $g(0)=-3$, alors $I(0;-3)$ est un point d'inflexion de (C_g).

ⓑ Déterminer la tangente de (C_g) en I. L'équation de la tangente de (C_g) en I est : $y=g'(0)(x-0)+g(0)=-3x-3$.

5 Représentation graphique de (C_g).



b Partie II : Étude d'une rationnelle

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2x^2}$.

1 Calculer les limites de f aux bornes de D_f et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2x^2} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x^3+6x+3}{2x^2} = +\infty$;

2 Déterminer les branches infinies de (C_f).

- Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de (C_f).
- On a : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = 0$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

3 a Montrer : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}\right)' \\ &= 1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 3x - 3}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

b Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire la tableau de variations de f.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\dfrac{g(x)}{x^3}$ et d'après la question 2)b de la partie 1 on a :

- Si $x < 0$ ou $x > \alpha$: $f'(x) > 0$.
- Si $0 < x \leq \alpha$: $f'(x) \leq 0$. Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

4 Étudier la position relative de (C_f) avec la droite (Δ) d'équation $y = x$.

On a : $f(x) - x = \dfrac{3(2x+1)}{2x^2}$ donc :

- $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ est le point d'intersection de (C_f) et (Δ).
- $x \in]0; -\frac{1}{2}[\Rightarrow f(x) - x < 0$ donc (C_f) est au-dessous de (Δ).
- $x \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\cup]0; +\infty[\Rightarrow f(x) - x > 0$ donc (C_f) est au-dessus de (Δ).

5 Étudier la convexité de (C_f).

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^3}\right)' \\ &= \frac{6}{x^3} + \frac{9}{x^4} \\ &= \frac{6x+9}{x^4} \\ &= \frac{3(2x+3)}{x^4} \end{aligned}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $2x + 3$; donc :

- $K\left(-\frac{3}{2};-\frac{17}{6}\right)$ est le point d'inflexion de (C_f).
- $x \in]-\infty;-\frac{3}{2}[\Rightarrow f(x)-x<0$, donc (C_f) est concave.
- $x \in]-\frac{3}{2};0[\cup]0;+\infty[\Rightarrow f(x)-x>0$ donc (C_f) est convexe.

$\boxed{6}$ Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (On donne $\alpha \simeq 2.1$ et $f(\alpha) \simeq 3.8$).