

## Activité

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un ensemble  $I$  par  $f(x) = 8x + \frac{1}{2}$

1) On suppose que  $I = [0; +\infty[$

Calculer si possible  $f(1)$ ,  $f(\frac{1}{2})$ ,  $f(\frac{1}{4})$ ,  $f(-1)$  et  $f(\sqrt{2})$

2) On suppose que  $I = \mathbb{N}$

Calculer si possible  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(\frac{1}{8})$  et  $f(n)$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ )

## Définition 1

- On appelle suite numérique  $u$  toute fonction définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ .
- L'image d'un entier naturel  $n$  par la suite numérique  $u$  est notée  $u_n$ .
- La notation  $u_n$  se lit \*  $u$  indice  $n$  \*
- Le nombre  $u_n$  s'appelle le terme général de la suite numérique  $u$ .

## Remarque 1

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $u$  une suite numérique définie sur  $I$

- La suite  $u$  est parfois notée  $(u_n)_{n \in I}$
- Le nombre  $u_n$  s'appelle aussi le terme du rang  $n$
- Il ne faut pas confondre entre  $u_{n+1}$  et  $u_n + 1$  car :  
 $u_{n+1}$  est le terme du rang  $n$   
 $u_n + 1$  est la somme du terme du rang  $n$  avec 1.
- Si  $I = \mathbb{N}$  la suite  $u$  est parfois notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou tout simplement  $(u_n)$
- Si  $I = \mathbb{N}^*$  la suite  $u$  est parfois notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ou  $(u_n)_{n \geq 1}$

## Exemple 1

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{2n+3}{5n+1}$

1) Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$

2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 3$

## Exemple 2

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$

1) En remarquant que  $u_1 = u_{0+1}$  et  $u_2 = u_{1+1}$ , calculer  $u_1$  et  $u_2$

2) Calculer  $u_3$  et  $u_4$

3) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq \frac{3}{2}$

## Remarque 2

Une suite  $(u_n)_{n \in I}$  peut être définie :

- À partir d'une fonction  $f$  de la variable  $n$  :  $u_n = f(n)$ .



de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

## Définition 2

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que  $(\forall n \in I) \quad u_n \leq M$
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que  $(\forall n \in I) \quad u_n \geq m$
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

## Exemple 3

- 1) La suite de l'exemple 1 est majorée par 3 car on a montré que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 3$
- 2) La suite de l'exemple 2 est minorée par  $\frac{3}{2}$  car on a montré que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq \frac{3}{2}$

## 2) Monotonie d'une suite numérique

### Définition 3

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique

- $(u_n)_{n \in I}$  est croissante si  $\forall n, m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \geq u_m$
- $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante si  $\forall n, m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \leq u_m$
- $(u_n)_{n \in I}$  est constante si  $\forall n, m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n = u_m$

### Remarque 3

- Si  $(u_n)_{n \geq p}$  est une suite croissante alors  $\forall n \geq p \quad u_n \geq u_p$  (C'est-à-dire est  $(u_n)_{n \geq p}$  minorée par son premier terme)
- Si  $(u_n)_{n \geq p}$  est une suite décroissante alors  $\forall n \geq p \quad u_n \leq u_p$  (C'est-à-dire est  $(u_n)_{n \geq p}$  majorée par son premier terme)

### Propriété 1

- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite croissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite décroissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite constante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$

### Exemple 4

- 1) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 3n + 2$
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par  $v_n = \frac{2n-3}{n}$

### Exemple 5

Soit  $(v_n)$  la suite définie par 
$$\begin{cases} v_0 = \frac{1}{5} \\ v_{n+1} = v_n^2 + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

- 1) Calculer  $v_1$  et  $v_2$
- 2) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < v_n < \frac{1}{4}$
- 3) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} - v_n = v_n \left( v_n - \frac{1}{4} \right)$
- 4) En déduire la monotonie de la suite  $(v_n)$



## 5) Suite arithmétique

### Définition 4

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique définie sur  $I$  ( $I \subset \mathbb{N}$ )

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est arithmétique s'il existe un nombre réel  $r$  tel que  $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$ .

Le nombre  $r$  est appelé raison de la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .

### Exemple 6

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = -5n + 4$ . Montrer que  $(u_n)$  est une suite arithmétique.

### Le terme général d'une suite arithmétique

#### Propriété 2

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tout  $n, p \in I$  on a  $u_n = u_p + (n - p)r$

#### Cas particulier

- Si  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = u_0 + nr$
- Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

### Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

#### Propriété 3

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique et  $p \in I$  alors pour tout  $n \geq p$  on a :  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)}{2} \times (u_p + u_n)$

#### Cas particulier

- Si  $(u_n)$  est une suite arithmétique alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)}{2} \times (u_0 + u_n)$
- Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite arithmétique alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} \times (u_1 + u_n)$

### Exemple 7

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = -5n + 4$  (la suite numérique de l'exemple 6).

Calculer la somme  $u_0 + u_1 + \dots + u_8$

### Exemple 8

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2) On pose  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ 
  - a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique et déterminer sa raison.
  - b) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $v_n$  puis déduire  $u_n$  en fonction de  $n$
  - d) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$



### La propriété caractéristique d'une suite arithmétique

#### Propriété 4

$(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ .

### Exemple 9

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique

- 1) Vérifier que  $u_1 + u_3 = 2u_2$  ;
- 2) On suppose que  $u_1 + u_2 + u_3 = 15$  calculer  $u_2$

## 4) Suite géométrique

### Définition 5

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique définie sur  $I$  ( $I \subset \mathbb{N}$ )

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est géométrique s'il existe un nombre réel  $q$  tel que  $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = qu_n$ .

Le nombre  $q$  est appelé raison de la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .

### Exemple 10

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2^n$ .

Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique.

### Le terme général d'une suite géométrique

#### Propriété 5

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors pour tout  $n, p \in I$  on a  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

#### Cas particulier

- Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = u_0 \times q^n$
- Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

### Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

#### Propriété 6

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et  $p \in I$  alors pour tout  $n \geq p$  on a :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

#### Cas particulier

- Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

### Exemple 11

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - 1 \end{cases}$  et  $v_n = u_n + 5$

1) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_0$  et  $v_1$

2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = \frac{4}{5}(u_n + 5)$  puis déduire que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{4}{5}$

3) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$

4) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

5) Montrer que  $v_0 + v_1 + \dots + v_{12} = 30 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

6) Montrer que  $u_0 + u_1 + \dots + u_{12} = -5 \left(7 + 6 \left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

### La propriété caractéristique d'une suite géométrique

#### Propriété 7

$(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$ .

### Exemple 12

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que  $a + b + c = 7$  et  $abc = 8$

Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$



- Une suite numérique est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ .
- Une suite numérique  $(u_n)_{n \in I}$  peut être définie :
  - À partir d'une fonction  $f$  de la variable  $n$  :  $u_n = f(n)$ .
  - À partir d'une relation de récurrence :  $(u_n)_{n \in I}$  est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée par  $M \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \leq M$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée par  $m \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \geq m$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite croissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite décroissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite constante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$ .

	Arithmétique	Géométrique
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_{n+1} - v_n = r$	$v_{n+1} = qv_n$
Comment déterminer $v_n$ en fonction de $n$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_n = v_p + (n - p)r$ ( $p = 0$ ou $p = 1$ ou.....)	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ ( $p = 0$ ou $p = 1$ ou.....)
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n \in I}$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = \frac{(n - p + 1)}{2} \times (v_p + v_n)$	$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Si $a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite	alors $b = \frac{a + c}{2}$	alors $b^2 = a \times c$

## 5) Exercices de synthèse

### Exercice de synthèse 1

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

2) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 3}$ .

b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .



d) En déduire la somme  $T_n = \frac{3}{u_0+2} + \frac{3}{u_1+2} + \dots + \frac{3}{u_{n-1}+2}$

## Exercice de synthèse 2

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Calculer la somme  $T_n = \frac{1}{u_1-2} + \frac{1}{u_2-2} + \dots + \frac{1}{u_{10}-2}$

## Exercice de synthèse 3

On considère les suites numériques  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $a_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$  et  $b_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.

2) Montrer que la suite  $(b_n)$  est décroissante.

3) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n < b_n$ .

4) En déduire que  $(a_n)$  est majorée et que  $(b_n)$  est minorée.

## Exercice de synthèse 4

On considère les suites numériques  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies par :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$  et  $v_n = \frac{u_n}{n}$

1) Vérifier que  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$  et déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

2) Vérifier que  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \frac{1}{(n+1)^2+k} - \frac{1}{n^2+k} < 0$  et déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

## Exercice de synthèse 5

On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1, u_2 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1) Calculer  $u_3, u_4$  et  $v_1$

2) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_{n+1} = 6 - \frac{8}{v_n}$

3) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

4) Soit  $(t_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad t_n = \frac{v_n-4}{v_n-2}$

a) Montrer que  $(t_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

5) On pose  $k = 2^{n-2}(1+2^{n-1})$ . Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad k = u_n$



Exercice 1

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et pour

tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ .

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$
- 3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$ .  
 b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .  
 c) En déduire que  $(u_n)$  est majorée par 2.
- 4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ .  
 a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$ .  
 b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.  
 c) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 d) Montrer que :  $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{(n+8)(n+1)}{8}$ .

Exercice 2

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et pour

tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$ .

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 3$ .
- 3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n + 1}$ .

b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

- 4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$ .

- a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Montrer que :  $\sum_{k=2}^n v_k = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$

Exercice 3

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 0$  et pour

tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ .

- 1) Montrer que  $u_1 = -\frac{1}{3}$  et  $u_2 = -\frac{1}{2}$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > -1$ .
- 3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3}$ .

b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ .

- a) Calculer  $v_0$  puis montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$ .
- b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Montrer que :  $\sum_{k=4}^n v_k = \frac{(n+8)(n-3)}{4}$ .

Exercice 4

Soit  $(u_n)$  la suite tel que :  $u_0 = -\frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$

- 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 0$
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$

a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$

Exercice 5

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- 1) Supposons que  $u_0 = -6$  et  $r = 4$

Calculer  $u_6$  et  $u_{12}$

- 2) Supposons que  $u_1 = 5$  et  $u_{13} = 7$  Calculer  $r$

- 3) Supposons que  $u_{20} = 11$  et  $r = 6$

Calculer  $u_0$  puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Exercice 6

Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- 1) Supposons que  $v_0 = 32$  et  $q = \frac{1}{2}$  Calculer  $v_4$  et  $v_6$

- 2) Supposons que  $v_7 = \frac{1}{18}$  et  $v_5 = 3$  Calculer  $q$

- 3) Supposons que  $v_2 = -\frac{1}{81}$  et  $q = 3$

Calculer  $v_0$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Exercice 7

Soit  $a, b$  et  $c$  trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que  $a + b + c = 7$  et  $abc = 8$

Déterminer  $a, b$  et  $c$

Exercice 8

Soit  $a, b$  et  $c$  trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$  telle que :

$a + b + c = 21$  et  $2a + b - c = 29$

Déterminer  $a, b, c$  et  $r$

## Exercice 9

Soit  $(u_n)_{n \geq 2}$  une suite arithmétique de raison  $r = -2$  tel que  $u_0 = 2$  et  $u_p = -18$

1) Déterminer l'entier  $p$

2) Calculer en fonction de  $n$  la somme  $\sum_{k=2}^n u_k$

## Exercice 10

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  tels que  $u_2 = 23$  et  $u_p = 5$

Déterminer l'entier  $p$  puis calculer la somme  $\sum_{k=10}^{20} u_k$

## Exercice 11

Montrer sans utiliser la récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

## Exercice 12

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 15 + 21 + 27 + \dots + 603$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \dots + \frac{19}{3} + 7$$

## Exercice 13

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 0$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$

2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

4) Trouver un entier  $n$  tel que pour tout  $n > N$  :  $u_n > 0,99$

## Exercice 14

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$

2) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est majorée par 1.

3) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est minorée par  $\frac{1}{2}$ .

## Exercice 15 (Complément de cours)

1) Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite arithmétique.

Montrer que  $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ .

2) Soit  $(v_n)_{n \in I}$  une suite géométrique.

Montrer que  $(\forall n \in I) \quad v_{n+1}^2 = v_n \times v_{n+2}$ .

## Exercice 16 : Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci noté  $(F_n)_{n \geq 1}$  débute de la manière suivante :

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610.....

" On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de

deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun

Lapin ne meurt.

La suite de Fibonacci donne le nombre  $F_n$  de lapins vivant au bout de  $n$  mois.

Elle vérifie la relation  $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

1) Calculer  $F_{16}$ .

2) Montrer que l'équation :  $x^2 - x - 1 = 0$  possède une unique solution positive que nous noterons  $\varphi$ . Le nombre  $\varphi$  est appelé le nombre d'or.

3) Montrer les égalités :  $\varphi + 1 = \varphi^2$ ,  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ ,

$$1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

4) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_n = \alpha \times \varphi^n + \beta \times \left( \frac{-1}{\varphi} \right)^n.$$

a) Vérifier que la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  satisfait à la relation :

$$V_{n+1} + V_n = V_{n+2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que  $v_1 = v_2 = 1$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n = F_n$  désigne le nombre de lapins au bout de  $n$  mois.

c) Vérifier que  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$  et en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad F_n = \frac{\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}.$$

d) A l'aide d'une calculatrice retrouver  $F_{16}$ .

5) On considère la suite  $(W_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $W_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{a) Vérifier que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad W_n = \frac{(-1)^{n+1} \times \left( \frac{1}{\varphi} \right)^{2n+1} - \varphi}{(-1)^n \times \left( \frac{1}{\varphi} \right)^{2n} - 1}.$$

$$\text{b) En déduire : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad W_n = \frac{(-1)^n \varphi + \left( \frac{1}{\varphi} \right)^{2n+1}}{(-1)^n + \left( \frac{1}{\varphi} \right)^{2n}}.$$

8

# Trigonométrie

