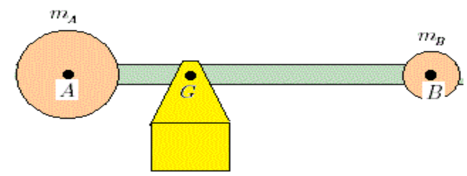
Activités

Activité 1 :

On considère un levier porte deux masses m_A *et* m_B

Principe du levier d'Archimède :

« Dans le cas d'équilibre on a $m_A \times GA = m_B \times GB$ **»**



1) Montrer que dans le cas d'équilibre on a $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

2) Le point G **défini par la relation vectorielle** $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ **s'appelle le barycentre des points pondérés (ou massifs)** $(A;m_A)$, $(B;m_B)$ **et on le note** $G=Bar\{(A;m_A);(B;m_B)\}$

Montrer que : $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{m_B}{m_A+m_B}\overrightarrow{AB}$

3) En déduire la position du point G **tel que** $G=Bar\{(A;m_A);(B;m_B)\}$ **dans chacun des cas suivants :**

a) $m_A=m_B=1$ **; b)** $m_A=3$ **et** $m_A=5$

4) Déterminer m_B **sachant que** $m_A=2$ **et** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

Activité 2 :

a **et** b **deux réels.**

Soit *A* et *B* deux points distinct du plan et *G* un point tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) Montrer que $(a+b)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}$

2) En déduire que si $a+b=0$ **alors le point** G **n'existe pas.**

3) On suppose que $a+b\neq 0$ **et soit** G' **un point du plan tel que** $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $G'=G$

b) En déduire que le point *G* vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ **est unique et que** $G\in(AB)$

$\rightarrow$ **Le point *G* est appelé le barycentre des points pondérés** $(A;a)$ **et** $(B;b)$ **on note** $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

4) Montrer que : $G=bar\{(A;1);(B;1)\} \Leftrightarrow$ ***G* le milieu du segment** $[AB]$

5) Montrer que : $G=bar\{(A;1);(B;0)\} \Leftrightarrow G=A$ **et** $G=bar\{(A;0);(B;1)\} \Leftrightarrow G=B$

Activité 3 :

Soit a **et** b **deux réels non nuls tel que** $a+b\neq 0$ **on pose** $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

1) Soit $k\in\mathbb{R}^*$ **vérifier que :** $\dfrac{a}{k}\overrightarrow{GA}+\dfrac{b}{k}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

2) En déduire que pour tout $k\in\mathbb{R}^*$ **on a** $G=bar\left\{(A;\dfrac{a}{k});(B;\dfrac{b}{k})\right\}$

3) Soit M **un point du plan** (P) **montrer que :** $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}-(a+b)\overrightarrow{MG}=\vec{0}$

4) En déduire que si $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ **alors pour tout** $M\in(P)$ **on a** $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

5) Montrer que si pour tout $M\in(P)$ **on a** $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ **alors** $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

6) Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ **un repère du plan, on pose** $A(x_A;y_A)$ **et** $B(x_B;y_B)$

a) En déduire que $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b}$

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $a\overrightarrow{OA}$ et $b\overrightarrow{OB}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, x_B et y_B

c) En déduire les coordonnées de vecteur $\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, x_B et y_B

d) En déduire que $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b};\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$

Activité 4 :

a, b et c trois réels.

Soit A et B deux points distinct du plan et G un point tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

1) Montrer que $(a+b+c)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que si $a+b+c=0$ alors le point G n'existe pas.

3) On suppose que $a+b+c\neq 0$ et soit G' un point du plan tel que $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

a) Montrer que $G'=G$

b) En déduire que le point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ est unique.

→ G est appelé le barycentre du systèmes pondérés $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

c) En déduire que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

4) Montrer que $(\forall k\in\mathbb{R}^*)\quad G=bar\left\{(A;\dfrac{a}{k});(B;\dfrac{b}{k});;(C;\dfrac{c}{k})\right\}$

5) Montrer que $(\forall M\in(P))\quad a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

6) Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan, on pose $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

Montrer que $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

Activité 5 :

a, b et c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$ et $a+b\neq 0$

Soit ABC un triangle, G et H les points du plan tels que

$G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ et $H=bar\{(A;a);(B;b)\}$

1) a) Vérifier que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=-c\overrightarrow{GC}$

b) En utilisant la propriété caractéristique du barycentre sur H montrer que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=(a+b)\overrightarrow{GH}$

c) En déduire que $G=bar\{(H;a+b);(C;c)\}$ et que $G\in(CH)$

Application :

2) On suppose que $a=b=c=1$

a) En déduire que $G\in(CH)$

b) Que présent le point H pour le segment $[AB]$

c) Soit I le milieu du segment $[BC]$ montrer que $G\in(AI)$

d) En déduire que G est le centre de la gravité du triangle ABC

3) Supposons que $b+c\neq 0$ et $a+c\neq 0$

On pose $H=bar\{(A;a);(B;b)\}$; $K=bar\{(B;b);(C;c)\}$ et $L=bar\{(A;a);(C;c)\}$

Montrer que les droites (CH) ; (AK) et (BL) sont concourantes en G.

Définitions et propriétés

Soit A un point du plan et a un nombre réel.

→ Le couple $(A;a)$ est appelé point pondéré ou point massif. Le réel a est appelé le poids ou la masse de A.

On dit aussi que le point A est affecté du coefficient a ou de la masse algébrique a.

→ Un système pondéré est une collection de points pondérés.

Barycentre de deux points pondérés

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b\neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

$$\boxed{1}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

2) Si $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors $G\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{2}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$$

→ Cette dernière relation permet de construire le point G.

→ Le point le plus proche du barycentre G est celui dont le coefficient à la plus grande valeur absolue.

→ Le barycentre G est sur le segment $[AB]$ si les poids sont de même signe.

3) Le point $G=bar\{(A;1);(B;1)\}$ est appelé isobarycentre des points A et B c'est le milieu de $[AB]$

4) Si x et y deux réels tel que $x+y=0$ alors le système $\{(A;x);(B;y)\}$ n'admet pas du barycentre.

5) On a $G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G=bar\{(A;k\times a);(B;k\times b)\}$ et $\boxed{3}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G=bar\left\{(A;\dfrac{a}{k});(B;\dfrac{b}{k})\right\}}$

pour tout $k\in\mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle homogénéité du barycentre.

6) On a $\boxed{4}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}}$ **pour tout $M\in(P)$. Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.**

7) Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'un repère.

On a $\boxed{5}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b};\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)}$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Barycentre de trois points pondérés

Soit $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c\neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

$$\boxed{1}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

2) Si $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{2}\ \boxed{G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}}$$

Cette dernière relation permet de construire le point G

3) Si x, y et z trois réels tel que $x+y+z=0$ alors le système $\{(A;x);(B;y);(C;z)\}$ n'admet pas du barycentre.

4) $\boxed{3}$ $\boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}}$ **pour tout** $k \in \mathbb{R}^*$**. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle homogénéité du barycentre.**

5) On a $\boxed{4}$ $\boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}}$ **pour tout** $M \in (P)$**.Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.**

6) Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ **et** $C(x_C;y_C)$ **trois points d'un repère.**

On a $\boxed{5}$ $\boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)}$

7) Si $G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ **et** $H = bar\{(A;a);(B;b)\}$ **alors** $G = bar\{(H;a+b);(C;c)\}$**.En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.**

$\boxed{6}$ $\boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \quad et \quad H = bar\{(A;a);(B;b)\} \Rightarrow G = bar\{(H;a+b);(C;c)\}}$

Cette propriété s'appelle l'associativité du barycentre.

8) Le point $G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ **est appelé isobarycentre des points *A*, *B* et *C* c'est le centre de gravité du triangle** ABC**.**

Barycentre de quatre points pondérés

- **De la même manière, on étend à quatre points les définitions et les propriétés vues pour le barycentre de trois points.**
- **L'associativité du barycentre : Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.**

Résumé 5 : Barycentre

	Barycentre de deux points	Barycentre de trois points
	$(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b \neq 0$	$(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c \neq 0$
Définition	$\boxed{1}$ $\boxed{G = bar\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$	$\boxed{1}$ $\boxed{G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$
Construction	$\boxed{2}$ $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$	$\boxed{2}$ $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}}$
Homogénéité	$\boxed{3}$ $\boxed{G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}}$	$\boxed{3}$ $\boxed{G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}}$
Propriété caractéristique	$\boxed{4}$ $\boxed{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}}$	$\boxed{4}$ $\boxed{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}}$
Coordonnées	$\boxed{5}$ $G\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$	$\boxed{5}$ $G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$
Associativité	$\boxed{6}$ Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des deux poids.	

Remarques :

Soit *A*, *B* et *C* trois points distincts du plan

1) G est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow G = bar\{(A;1);(B;1)\}$

2) G est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

3) Pour montrer que $G \in (AB)$ **il suffit de :**

Trouver $a;b \in \mathbb{R}$ **tel que** $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ **(ou montrer que les points *A*, *B* et *G* sont alignés).**

Exemples résolus

Exemple 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ dans les cas suivants :

1) $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ **;** **2)** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB}$ **;** **3)** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Solution

1) $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{GA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow G=bar\{(A;5);(B;-3)\}$ **donc** $a=5$ **et** $b=-3$ $\quad (5+(-3)\neq 0)$

2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow G=bar\{(A;4);(B;-2)\}$ **donc** $a=4$ **et** $b=-2$ $\quad (4+(-2)\neq 0)$

3) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GA}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow G=bar\left\{(A;-\dfrac{1}{3});(B;-\dfrac{2}{3})\right\}$ **donc** $a=-\dfrac{1}{3}$ **et** $b=-\dfrac{2}{3}$ $\quad (-\dfrac{1}{3}+(-\dfrac{2}{3})\neq 0)$

Exemple 2

Soit A et B deux point du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

1) $G=bar\{(A;-5);(B;-1)\}$ **et** $AB=6$ **2)** $G=bar\{(A;-1);(B;6)\}$ **et** $AB=5$

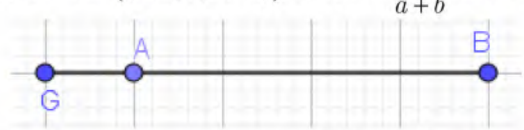
3) $G=bar\{(A;5);(B;-1)\}$ **et** $AB=4$ **4)** $G=bar\{(A;-8);(B;5)\}$ **et** $AB=3$

Solution

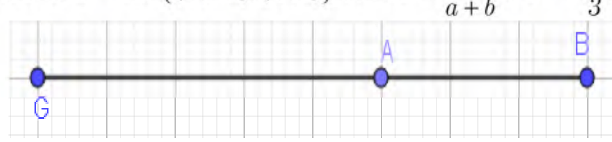
1) On a $G=bar\{(A;-5);(B;-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

2) On a $G=bar\{(A;-1);(B;6)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

3) On a $G=bar\{(A;5);(B;-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$



4) On a $G=bar\{(A;-8);(B;5)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$



Exemple 3

Soit A et B deux points distinct du plan et G un point tel que $G=bar\{(A;200);(B;300)\}$

1) Montrer que $G=bar\{(A;2);(B;3)\}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=0$ **b)** $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=20$ **c)** $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

Solution

1) On a $G = bar\{(A;200);(B;300)\}$ **donc d'après la propriété de l'homogénéité** $G = bar\left\{(A;\frac{200}{100});(B;\frac{300}{100})\right\}$

C'est-à-dire $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$

2) Rappel : *Les ensembles des points usuels du plan*

Soit A et B deux points distinct du plan et R un réel strictement positif

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$MA = R$	Le cercle du centre A et de rayon R.
$MA = 0$	Le singleton $\{A\}$
$MA = -R$	L'ensemble vide.
$MA = MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

a) On a $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$ **donc d'après la propriété caractéristique :**

Pour tout $M \in (P)$ $\quad 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (2+3)\overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{MG}$

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 0 \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 0 \Leftrightarrow MG = 0$, **donc cet ensemble est le singleton** $\{G\}$

b) On a $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 20 \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 20 \Leftrightarrow MG = 4$ **donc cet ensemble est le cercle de centre G et de rayon 4**

c) Soit $G' = bar\{(A;3);(B;2)\}$ **donc d'après la propriété caractéristique :**

Pour tout $M \in (P)$ $\quad 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (3+2)\overrightarrow{MG'} = 5\overrightarrow{MG'}$

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|5\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG = MG'$, **donc cet ensemble est la médiatrice de** $[GG']$

Exemple 4

Soit ABC **un triangle, on pose** $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$ **et** $G' = bar\{(A;-2);(C;7)\}$

1) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G **et** G'

Montrer que : $(\forall M \in (P)) \quad 3\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$

2) Soit I un point du plan tel que $I = bar\{(B;3);(C;7)\}$

a) Simplifier par deux méthodes le vecteur $3\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC}$

b) En déduire que I est le milieu du segment $[GG']$

Solution

1) On a $G = bar\{(A;2);(B;3)\}$ **et** $G' = bar\{(A;-2);(C;7)\}$

Donc $(\forall M \in (P)) \quad 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ **et** $(\forall M \in (P)) \quad -2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG'}$

Donc $(\forall M \in (P)) \quad \left(\cancel{2\overrightarrow{MA}} + 3\overrightarrow{MB}\right) + \left(\cancel{-2\overrightarrow{MA}} + 7\overrightarrow{MC}\right) = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$

C'est-à-dire $(\forall M \in (P)) \quad 3\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$

2) a) On a $I = bar\{(B;3);(C;7)\}$ **donc par définition** $3\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

D'autre part on a $(\forall M \in (P)) \quad 3\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$ **en particulier** $3\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{IG'}$

b) D'après la question précédente en déduit que $5\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{IG'} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'} = \vec{0}$

C'est-à-dire $I = bar\{(G;1);(G';1)\}$

Ainsi I est le milieu du segment $[GG']$

Exemple 5

1) Déterminer les réels a **,** b **et** c **tel que** $G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ **sachant que** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

2) Placer les points $A(0;3)$ **,** $B(1;0)$ **et** $C(-2;1)$ **dans un repère puis placer les points H et D sachant que :**

$H = bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$ **et** $D = bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$

3) Montrer que $H = bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$

4) Montrer vectoriellement que le quadrilatère $ADHC$ **est un parallélogramme.**

5) Déterminer les coordonnées de H et D

6) Montrer en utilisant les coordonnées que le quadrilatère $ADHC$ **est un parallélogramme.**

7) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution

1) On a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

On pose $a=3$ **;** $b=-2$ **et** $c=-2$ **puisque** $a+b+c\neq 0$ **alors** $G = bar\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$

2) On a $H = bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

Donc $\overrightarrow{AH}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-3}{6+(-3)+(-6)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-6}{6+(-3)+(-6)}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

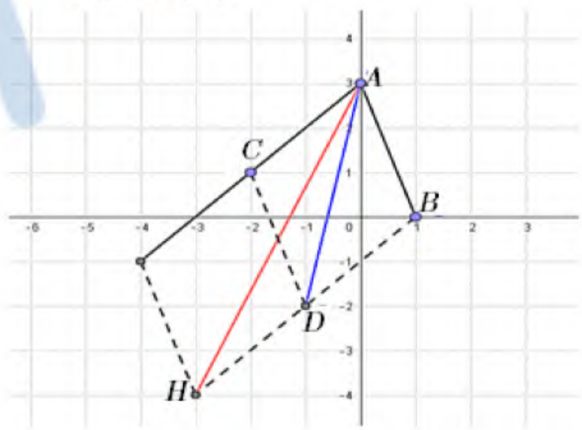
On a $D = Bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$

Donc $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-1}{1+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{1+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

3) On a $H = bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

Donc $H = bar\left\{(A;\dfrac{6}{3});(B;\dfrac{-3}{3});(C;\dfrac{-6}{3})\right\}$

C'est-à-dire $H = bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$



4) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **vectoriellement.**

On a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc il suffit montrer que $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **C.Q.F.D**

5) On a $H = bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$ **donc** $H\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

C'est-à-dire $H\left(\dfrac{2\times 0+(-1)\times 1+(-2)\times(-2)}{2+(-1)+(-2)};\dfrac{2\times 3+(-1)\times 0+(-2)\times 1}{2+(-1)+(-2)}\right)$ **d'où** $H(-3;-4)$

On a $D = bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$ **donc** $D\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

C'est-à-dire $D\left(\dfrac{1\times 0+(-1)\times 1+(-1)\times(-2)}{1+(-1)+(-1)};\dfrac{1\times 3+(-1)\times 0+(-1)\times 1}{1+(-1)+(-1)}\right)$ **d'où** $D(-1;-2)$

6) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **par des coordonnées.**

On a $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A;y_D-y_A)=\overrightarrow{AD}(-1-0;-2-3)=\overrightarrow{AD}(-1;-5)$

Et $\overrightarrow{CH}\left(x_H-x_C;y_H-y_C\right)=\overrightarrow{CH}\left(-3+2;-4-1\right)=\overrightarrow{CH}\left(-1;-5\right)$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ **et** $\overrightarrow{CH}$ **ont de mêmes coordonnées donc** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **C.Q.F.D**

7) On a $G=bar\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$ **donc** $(\forall M\in(P))\;\; 3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(3+(-2)+(-2))\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MG}$

Et $H=Bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$ **donc** $(\forall M\in(P))\;\; 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(2+(-1)+(-2))\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}$

On a donc $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|\Leftrightarrow\left\|-\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|$

$\Leftrightarrow MG=MH$

Ainsi cet ensemble est la médiatrice du segment $[GH]$

Exemple 6

ABC un triangle.

1) Placer les points D et G tel que $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}$ **et** $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

2) En utilisant l'associativité du barycentre vérifier que G est le milieu du segment $[CD]$

3) On pose $H=bar\{(A;-4);(B;1)\}$ **;** $E=bar\{(B;1);(C;5)\}$ **et** $F=bar\{(A;-4);(C;5)\}$

Montrer que les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en un point à préciser.

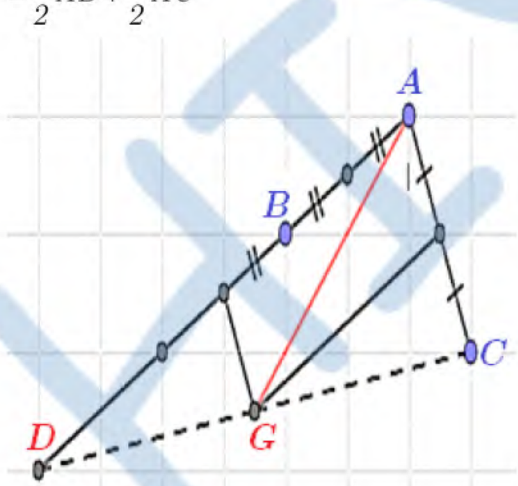
Solution

1) On a $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-3}{2+(-3)}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

Et $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-3}{2+(-3)+(-1)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{2+(-3)+(-1)}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2) On a $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$ **et** $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}$ **donc par l'associativité du barycentre on obtient** $G=bar\{(D;2+(-3));((C;-1)\}$ **par suite** $G=bar\{(D;-1);((C;-1)\}$ **donc G est le milieu du segment** $[CD]$

3) On a les points H, E et F sont des barycentres partiels du barycentre $G'=bar\{(A;-4);(B;1);(C;5)\}$

(Le points G' existe est unique car $-4+1+5\neq 0$ **)**

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' **et H, on obtient** $G'=bar\{(H;-3);(C;5)\}$ **donc** $G'\in(HC)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' **et E, on obtient** $G'=bar\{(A;-4);(E;6)\}$ **donc** $G'\in(AE)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' **et F, on obtient** $G'=bar\{(F;1);(B;1)\}$ **donc** $G'\in(FB)$

Ainsi les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en G'**.**

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSMF	**Série 5** **Barycentre**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ *dans chacun des cas suivants :*

1) $2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; 2) $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Soit A et B deux points du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

1) $G = bar\{(A;-5);(B;-1)\}$ et $AB = 6$

2) $G = bar\{(A;-1);(B;6)\}$ et $AB = 5$

3) $G = bar\{(A;5);(B;-1)\}$ et $AB = 4$

4) $G = bar\{(A;-8);(B;5)\}$ et $AB = 3$

5) $G = bar\{(A;-2);(B;3)\}$ et $AB = 2$

6) $G = bar\{(A;6);(B;-5)\}$ et $AB = 1$

Exercice 3

On considère un triangle ABC et les points G, K et I tels que : $G = bar\{(A;-1);(B;-4);(C;3)\}$

$K = bar\{(A;-1);(B;-4)\}$ $I = bar\{(B;-4);(C;3)\}$

1) *Construire les points G, K et I*

2) *En utilisant l'associativité du barycentre montrer que G est le milieu de* $[AI]$.

3) a) *En appliquons la propriété caractéristique du barycentre montrer que :*

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$

b) *En déduire que les points C, K et G sont alignés.*

4) *On considère le point* $F = bar\{(A;-1);(C;3)\}$ *montrer que* $G \in (BF)$

5) *En déduire que les droites* (AI), (CK) *et* (BF) *sont concourantes en un point à déterminer.*

6) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :* $\left\|-\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 32$

Exercice 4

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *du plan, on considère les points* $A(2;0)$; $B(5;6)$; $C(-4;2)$; $D(-1;5)$

On pose $G = bar\{(A;1);(B;2)\}$ *et* $G' = bar\{(C;1);(D;2)\}$

1) *Déterminer les coordonnées de G et de G'*

2) *Soient I, J et K les milieux des segments* $[AC]$, $[BD]$ *et* $[GG']$ *respectivement.*

a) *Déterminer les coordonnées des points I, J et K*

b) *Montrer que les points I, J et K sont alignés.*

Exercice 5

On considère un triangle ABC et les points G, H et D tels que : $G = bar\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$;

$H = bar\{(A;5);(B;2);(C;-3)\}$; *D est le milieu de* $[AC]$

1) a) *Montrer que* $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{-3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) *Construire les points H et D*

2) a) *Exprimer D sous forme du barycentre de deux points*

b) *En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre déduire que G est le milieu de* $[DB]$

c) *Placer le point G dans la figure.*

3) a) *En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G montrer que* $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) *En déduire que* $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

c) *En déduire que le quadrilatère CGHA est un parallélogramme.*

4) *Soit E le milieu de* $[AB]$, *montrer que les points H, E et G sont alignés.*

5) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :*
$\left\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

Exercice 6

On considère un triangle ABC et les points G, I et K tels que $G = bar\{(A;3);(B;2);(C;-1)\}$; *I est le milieu de* $[AC]$ *et* $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

1) *Montrer que* $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) *En déduire que* $(BI) \parallel (AG)$

3) a) *Montrer que* $K = bar\{(A;3);(B;2)\}$

b) *Montrer que les points C, K et G sont alignés.*

4) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :* $\left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 10$

Exercice 7

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A;1)$, $(B;4)$ *et* $(C;-3)$.

1) *Construire le barycentre I de* $(B;4)$ *et* $(C;-3)$.

2) *Montrer que* $G = bar\{(A;1);(I;1)\}$

3) *En déduire la position de G sur* (AI).

Exercice 8

1) *Placer dans un repère les points :* $A(1;2)$, $B(3;4)$ *et* $C(2;5)$.

2) *Soit G le barycentre des points pondérés :* $(A;3)$, $(B;2)$ *et* $(C;4)$.

a) *Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.*

b) *La droite* (BG) *passe-t-elle par l'origine du repère ?*

Prof : Aissa HIYAB	**Série 5**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : 1BSMF	**Barycentre**	Matière : Mathématique

Exercice 9

Soit ABC un triangle.

1) a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BC}$

b) Montrer que $I = Bar\{(B;-2);(C;3)\}$

c) Montrer que $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2) Soit $G = bar\{(A;-3);(B;-2);(C;3)\}$.

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3) a) En déduire que les points A, I et G sont alignés.

b) Construire le point G.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\left\|-3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\right\|$

b) $\left\|-2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 3$

Exercice 10

ABCD un quadrilatère dans le plan, on considère les points H, I et J tels que :

$\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

$I = bar\{(A;3);(C;-5)\}$

$J = bar\{(D;-1);(B;2)\}$

1) Montrer que $H = bar\{(A;3);(B;2);(C;-5);(D;-1)\}$

2) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre montrer que $H = bar\{(I;-2);(J;1)\}$

2) En déduire que I est le milieu de $[JH]$

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(1;2)$, $B(-3;2)$ et $C(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point G barycentre du système pondéré $\{(A;4);(B;-3);(C;3)\}$

2) Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère le point G_m barycentre du système pondéré

$\{(A;3m+1);(B;-2m-3);(C;3-m)\}$

a) Etablir l'existence du point G_m

b) Trouver les coordonnées de G_m

c) Quel est l'ensemble des points G_m lorsque m varie sur $\mathbb{R}$

Exercice 12

Soit ABCD un parallélogramme et $\alpha \in]0;+\infty[$

On considère les points K et L définis par

$\overrightarrow{DK} = (\alpha+2)\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CL} = \alpha\overrightarrow{BC}$

Soit M le point d'intersection de (CK) et (DL)

Montrer que $\overrightarrow{DM} = \frac{\alpha+2}{\alpha^2+2\alpha+2}\overrightarrow{DL}$

Exercice 13

Soit ABC un triangle. Y est le milieu de $[BC]$.

1) Placer, en justifiant, le barycentre U de $(A;4)$ et $(C;1)$ puis placer le barycentre E de $(A;4)$ et $(B;1)$

2) Soit $G = bar\{(A;4);(B;1);(C;1)\}$. Montrer que G est aussi barycentre de $(E;5)$ et $(C;1)$.

3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 14

Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ et ABCD un trapèze tel que

$\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD}$

1) Déterminer les réels b et c pour que le point D soit le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;b);(C;c)\}$

2) On suppose dans cette équation que $a = -1$

Soit E et F les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BE]$

Déterminer le nombre x pour que F soit le barycentre du système $\{(A;1);(B;-1);(C;1);(E;x)\}$

Exercice 15

Étant donné un triangle ABC et k un réel non nul donné, on définit les points D et E par les relations :

$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$

1) Faire une figure illustrant ces données lorsque $k = \frac{1}{3}$, puis lorsque $k = -1$.

2) Montrer que $D = bar\{(A;1-k);(B;k)\}$

3) Montrer que $E = bar\{(C;1-k);(A;k)\}$

4) En déduire que pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{CB} = 2\left(\overrightarrow{MB'} + k\overrightarrow{B'C'}\right)$ *où*

B' et C' sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

5) Soit I le milieu de $[DE]$. Déduire de la question précédente que I, B' et C' sont alignés.

Exercice 16

ABC est un triangle de centre de gravité G. On note I, J, M, N, R et S les points définis par :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que les droites :

(IS), (MR) et (NJ) sont concourantes en G.