

1) Définition d'une suite numérique - suite majorée - minorée - bornée

Activité

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble I par $f(x) = 8x + \frac{1}{2}$

1) On suppose que $I = [0; +\infty[$

Calculer si possible $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$

2) On suppose que $I = \mathbb{N}$

Calculer si possible $f(0)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{8})$ et $f(n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

Définition 1

- On appelle suite numérique u toute fonction définie sur \mathbb{N} ou une partie de \mathbb{N} .
- L'image d'un entier naturel n par la suite numérique u est notée u_n .
- La notation u_n se lit " u indice n "
- Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite numérique u .

Remarque 1

Soit I une partie de \mathbb{N} et u une suite numérique définie sur I

- La suite u est parfois notée $(u_n)_{n \in I}$
- Le nombre u_n s'appelle aussi le terme du rang n
- Il ne faut pas confondre entre u_{n+1} et $u_n + 1$ car :
 - u_{n+1} est le terme du rang n
 - $u_n + 1$ est la somme du terme du rang n avec 1.
- Si $I = \mathbb{N}$ la suite u est parfois notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$ ou tout simplement (u_n)
- Si $I = \mathbb{N}^*$ la suite u est parfois notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$



Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2n+3}{5n+1}$

1) Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$

1) En remarquant que $u_1 = u_{0+1}$ et $u_2 = u_{1+1}$, calculer u_1 et u_2

2) Calculer u_3 et u_4

3) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq \frac{3}{2}$

Remarque 2

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ peut être définie :

- À partir d'une fonction f de la variable n : $u_n = f(n)$.

de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Définition 2

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \in I) u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \in I) u_n \geq m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Exemple 3

1) La suite de l'exemple 1 est majorée par 3 car on a montré que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$

2) La suite de l'exemple 2 est minorée par $\frac{3}{2}$ car on a montré que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq \frac{3}{2}$

2) Monotonie d'une suite numérique

Définition 3

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si $\forall n; m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \geq u_m$
- $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si $\forall n; m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \leq u_m$
- $(u_n)_{n \in I}$ est constante si $\forall n; m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n = u_m$

Remarque 3

- Si $(u_n)_{n \geq p}$ est une suite croissante alors $\forall n \geq p \quad u_n \geq u_p$ (C'est-à-dire est $(u_n)_{n \geq p}$ minorée par son premier terme)
- Si $(u_n)_{n \geq p}$ est une suite décroissante alors $\forall n \geq p \quad u_n \leq u_p$ (C'est-à-dire est $(u_n)_{n \geq p}$ majorée par son premier terme)

Propriété 1

- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} = u_n$.

Exemple 4

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$

2) Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{2n - 3}{n}$

Exemple 5

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{5} \\ v_{n+1} = v_n^2 + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$

1) Calculer v_1 et v_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < v_n < \frac{1}{4}$

3) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) v_{n+1} - v_n = v_n \left(v_n - \frac{1}{4} \right)$

4) En déduire la monotonie de la suite (v_n)



3) Suite arithmétique

Définition 4

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique définie sur I ($I \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que ($\forall n \in I$) $u_{n+1} - u_n = r$.

Le nombre r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n \in I}$.

Exemple 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -5n + 4$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.

Le terme général d'une suite arithmétique

Propriété 2

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n, p \in I$ on a $u_n = u_p + (n-p)r$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 + nr$
- Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 3

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique et $p \in I$ alors pour tout $n \geq p$ on a : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)}{2} \times (u_p + u_n)$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite arithmétique alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)}{2} \times (u_0 + u_n)$
- Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} \times (u_1 + u_n)$

Exemple 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -5n + 4$ (la suite numérique de l'exemple 6).

Calculer la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_8$

Exemple 8

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

b) Déterminer v_n en fonction de n

c) Déterminer u_n en fonction de v_n puis déduire u_n en fonction de n

d) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$



La propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Propriété 4

$(u_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

Exemple 9

Soit (u_n) une suite arithmétique

- 1) Vérifier que $u_1 + u_3 = 2u_2$;
- 2) On suppose que $u_1 + u_2 + u_3 = 15$ calculer u_2

4) Suite géométrique

Définition 5

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique définie sur I ($I \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que ($\forall n \in I$) $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite $(u_n)_{n \in I}$.

Exemple 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

Le terme général d'une suite géométrique

Propriété 5

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n, p \in I$ on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 \times q^n$
- Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 6

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et $p \in I$ alors pour tout $n \geq p$ on a :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Cas particulier

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Exemple 11

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - 1 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 5$

1) Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1

2) Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$) $v_{n+1} = \frac{4}{5}(u_n + 5)$ puis déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$

3) Déterminer v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) Montrer que $v_0 + v_1 + \dots + v_{12} = 30 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

6) Montrer que $u_0 + u_1 + \dots + u_{12} = -5 \left(7 + 6 \left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

La propriété caractéristique d'une suite géométrique

Propriété 7

$(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$.

Exemple 12

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que $a+b+c=7$ et $abc=8$

Déterminer a, b et c



Résumé 7 : Suites numériques

- Une suite numérique est une fonction définie sur \mathbb{N} ou une partie de \mathbb{N} .
- Une suite numérique $(u_n)_{n \in I}$ peut être définie :
 - À partir d'une fonction f de la variable n : $u_n = f(n)$.
 - À partir d'une relation de récurrence : $(u_n)_{n \in I}$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est majorée par $M \Leftrightarrow (\forall n \in I) u_n \leq M$
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est minorée par $m \Leftrightarrow (\forall n \in I) u_n \geq m$
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} = u_n$.

	Arithmétique	Géométrique
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_{n+1} - v_n = r$	$v_{n+1} = qv_n$
Comment déterminer v_n en fonction de n si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_n = v_p + (n-p)r$ $(p=0 \text{ ou } p=1 \text{ ou.....})$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ $(p=0 \text{ ou } p=1 \text{ ou.....})$
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n \in I}$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = \frac{(n-p+1)}{2} \times (v_p + v_n)$	$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Si a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite	alors $b = \frac{a+c}{2}$	alors $b^2 = a \times c$

5) Exercices de synthèse

Exercice de synthèse 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+3}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .



$$\dots -n \quad -0 \quad +1 \quad \dots +n-1$$

d) En déduire la somme $T_n = \frac{3}{u_0+2} + \frac{3}{u_1+2} + \dots + \frac{3}{u_{n-1}+2}$

Exercice de synthèse 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Calculer la somme $T_n = \frac{1}{u_1-2} + \frac{1}{u_2-2} + \dots + \frac{1}{u_{10}-2}$

Exercice de synthèse 3

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

2) Montrer que la suite (b_n) est décroissante.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n < b_n$.

4) En déduire que (a_n) est majorée et que (b_n) est minorée.

Exercice de synthèse 4

On considère les suites numériques $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$ et $v_n = \frac{u_n}{n}$

1) Vérifier que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

2) Vérifier que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \frac{1}{(n+1)^2+k} - \frac{1}{n^2+k} < 0$ et déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Exercice de synthèse 5

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1) Calculer u_3 , u_4 et v_1

2) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_{n+1} = 6 - \frac{8}{v_n}$

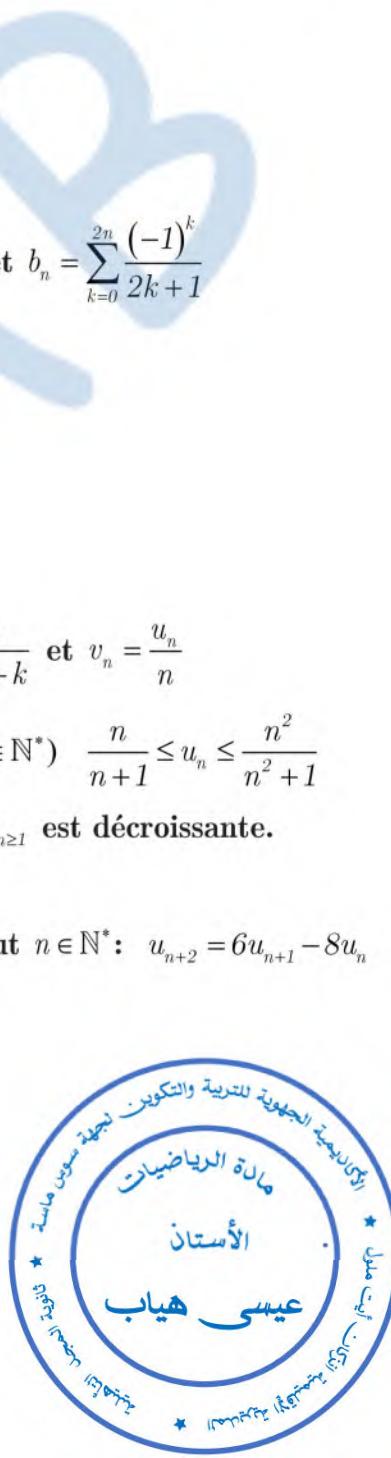
3) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

4) Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad t_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 2}$

a) Montrer que $(t_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

5) On pose $k_n = 2^{n-2}(1+2^{n-1})$. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad k_n = u_n$



Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$
- 3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$.
b) En déduire la monotonie de la suite (u_n) .
c) En déduire que (u_n) est majorée par 2.
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
 - a) Calculer v_0 et v_1 .
 - b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- d) Montrer que : $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{(n+8)(n+1)}{8}$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$.



- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 3$.
- 3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n + 1}$.
b) En déduire la monotonie de la suite (u_n) .
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

- c) Montrer que : $\sum_{k=2}^n v_k = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

- 1) Montrer que $u_1 = -\frac{1}{3}$ et $u_2 = -\frac{1}{2}$.
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > -1$.
- 3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_{n+1})^2}{u_{n+3}}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

- a) Calculer v_0 puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

- c) Montrer que : $\sum_{k=4}^n v_k = \frac{(n+8)(n-3)}{4}$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite tel que : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 0$

- 2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

- 3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$

- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

- c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- 1) Supposons que $u_0 = -6$ et $r = 4$

Calculer u_6 et u_{12}

- 2) Supposons que $u_1 = 5$ et $u_{13} = 7$ Calculer r

- 3) Supposons que $u_{20} = 11$ et $r = 6$

Calculer u_0 puis exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 6

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q .

- 1) Supposons que $v_0 = 32$ et $q = \frac{1}{2}$ Calculer v_4 et v_6

- 2) Supposons que $v_7 = \frac{1}{18}$ et $v_5 = 3$ Calculer q

- 3) Supposons que $v_2 = -\frac{1}{81}$ et $q = 3$

Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 7

Soit a , b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que $a + b + c = 7$ et $abc = 8$

Déterminer a , b et c

Exercice 8

Soit a , b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r telle que :

$$a + b + c = 21 \text{ et } 2a + b - c = 29$$

Déterminer a , b , c et r

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ tel que $u_0 = 2$ et $u_p = -18$

1) Déterminer l'entier p

2) Calculer en fonction de n la somme $\sum_{k=2}^n u_k$

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ tels que $u_2 = 23$ et $u_p = 5$

Déterminer l'entier p puis calculer la somme $\sum_{k=10}^{20} u_k$

Exercice 11

Montrer sans utiliser la récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

Exercice 12

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 15 + 21 + 27 + \dots + 603$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \dots + \frac{19}{3} + 7$$

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4) Trouver un entier n tel que pour tout $n > N$:

$$u_n > 0,99$$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 15 (Complément de cours)

1) Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite arithmétique.

Montrer que $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

2) Soit $(v_n)_{n \in I}$ une suite géométrique.

Montrer que $(\forall n \in I) \quad v_{n+1}^2 = v_n \times v_{n+2}$.

Exercice 16 : Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci noté $(F_n)_{n \geq 1}$ débute de la manière suivante :

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610....

* On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun Lapin ne meurt.

La suite de Fibonacci donne le nombre F_n de lapins vivant au bout de n mois.

Elle vérifie la relation $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

1) Calculer F_{16} .

2) Montrer que l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ possède une unique solution positive que nous noterons φ . Le nombre φ est appelé le nombre d'or.

3) Montrer les égalités : $\varphi + 1 = \varphi^2$, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, $1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$ et $\frac{\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4) Soient α et β deux réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_n = \alpha \times \varphi^n + \beta \times \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n.$$

a) Vérifier que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ satisfait à la relation :

$$V_{n+1} + V_n = V_{n+2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Déterminer α et β de sorte que $v_1 = v_2 = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = F_n$ désigne le nombre de lapins au bout de n mois.

c) Vérifier que $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$ et en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}.$$

d) A l'aide d'une calculatrice retrouver F_{16} .

5) On considère la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ définie par : $W_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad W_n = \frac{(-1)^{n+1} \times \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{2n+1} - \varphi}{(-1)^n \times \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{2n} - 1}$.

b) En déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad W_n = \frac{(-1)^n \varphi + \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{2n+1}}{(-1)^n + \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{2n}}$.

8

Trigonométrie

HAN

