

Algorithme de Kalman

abdelhamied OMAR YOUSIF

1. Préparation du TP

Modèle dynamique discret

Équation d'état : $x_{n+1} = A_n x_n + b_n$

- x_n : État du système à l'instant n,
- A_n : Matrice d'évolution (M×M),
- b_n : Bruit de processus gaussien (M-dimensionnel, covariance Q_b).

Équation de mesure : $y_n = C_n x_n + v_n$

- y_n : Mesures observées (N-dimensionnel),
- C_n : Matrice d'observation (N×M),
- v_n : Bruit de mesure gaussien (N-dimensionnel, covariance Q_v).

Les bruits v_n et b_n sont blancs, avec :

- $y_n E[b_n b_k^T] = E[v_n v_k^T] = 0, \forall k \neq n.$

Initialisation et mise à jour du filtre de Kalman

Initialisation :

- Prédiction initiale de l'état : \hat{x}_1 .
- Covariance initiale de l'erreur : P_1^- .

Mise à jour (à chaque pas n) :

Prédiction :

- $\hat{x}_{n+1} = A_n \hat{x}_n + b_n$
- $P_{n+1} = A_n P_n A_n^T + Q_b$

Innovation : $\alpha_n = C_n \hat{x}_n - y_n$.

Gain de Kalman : $G_n = -P_n C_n (C_n^T P_{n+1} C_n + Q_v)^{-1}$

Mise à jour de l'état : $\hat{x}_{n+1} = A_n (\hat{x}_n - G_n \alpha_n)$

Mise à jour de la covariance de l'erreur : $P_{n+1} = A_n P_n A_n^T + Q_b$

2 Applications

2.1 Estimation du niveau de l'eau dans un réservoir

Modèle discret pour un niveau d'eau constant

Équation d'état : $x_{n+1} = x_n$ ($A = 1$)

Équation de mesure : $y_n = x_n + v_n$

- y_n représente la position verticale observée du flotteur.
- v_n est le bruit de mesure.

1. Équation d'état

L'équation d'état est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n$$

- **Explication :**

- Le niveau de l'eau dans le réservoir est supposé **constant**, ce qui signifie qu'il n'évolue pas au cours du temps (ni de manière déterministe, ni stochastique).
- Dans ce cas, la matrice de transition A est une **constante égale à 1**.
- Le bruit du processus b_n est nul, car il n'y a pas de dynamique ni d'incertitude associée à l'évolution du niveau de l'eau. Cela implique que $Q_b = 0$

2. Équation de mesure

L'équation de mesure est donnée par :

$$y_n = x_n + v_n$$

- **Explication :**

- L'observation y_n correspond à la **position verticale du flotteur**, qui est une approximation directe du niveau de l'eau x_n .
- Le flotteur est perturbé par les **vagues à la surface de l'eau**. Ces perturbations sont modélisées par un bruit de mesure v_n .
- La matrice d'observation C est **constante et égale à 1**, car la position observée est directement liée au niveau de l'eau sans transformation.

2.1.1

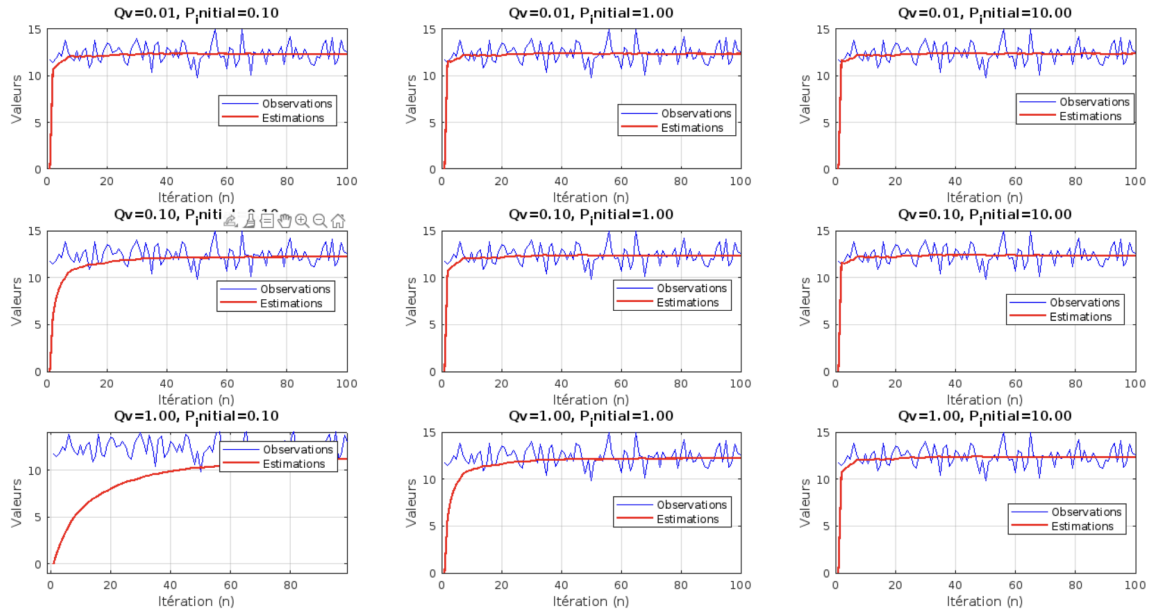


figure 1 : prédiction de la position pour différentes valeurs Q_v et $P_{initial}^-$

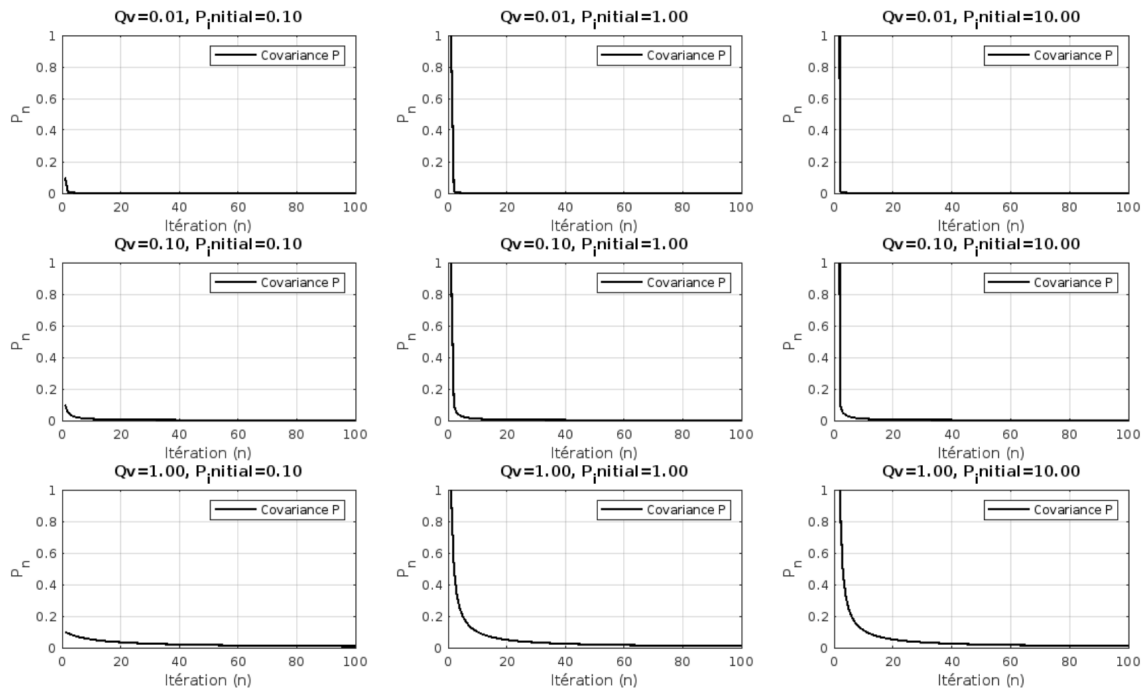


figure 2 : Evolution de P pour différentes valeurs Q_v et $P_{initial}^-$

Résultats :

Sur la courbe de l'évolution de P, on peut voir que :

- **Pour un Q_v fixé**, la valeur initiale de P_{initial} n'a pas d'influence significative sur la vitesse de convergence de P. Cela s'explique par le fait que le filtre de Kalman "oublie" rapidement les conditions initiales après quelques itérations, notamment lorsque le modèle est correctement paramétré. Ce comportement est attendu et reflète la robustesse du filtre.
- **Pour P_{initial} fixé**, plus Q_v est grand, plus la vitesse de convergence est lente. Cela s'explique par le fait qu'un bruit de mesure important réduit la fiabilité des observations. Par conséquent, le filtre de Kalman prend plus de temps pour ajuster ses estimations, rendant la convergence vers une solution stable plus difficile.

2.1.2

Dans ce cas, notre modèle est un niveau d'eau à vitesse constante (inconnue), la variable d'état $x_n = (s_n \ v_n)$ où s_n est la position verticale (niveau de l'eau) et v_n (la vitesse du niveau d'eau). Ainsi, A est telle que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{n+1} = AS_n + v_n dt$$

$$v_{n+1} = v_n \text{ (car } v \text{ constante)}$$

$$y_{n+1} = y_n + v_n dt \text{ avec } C = (1 \ 0) \text{ car on a pas accès à la vitesse}$$

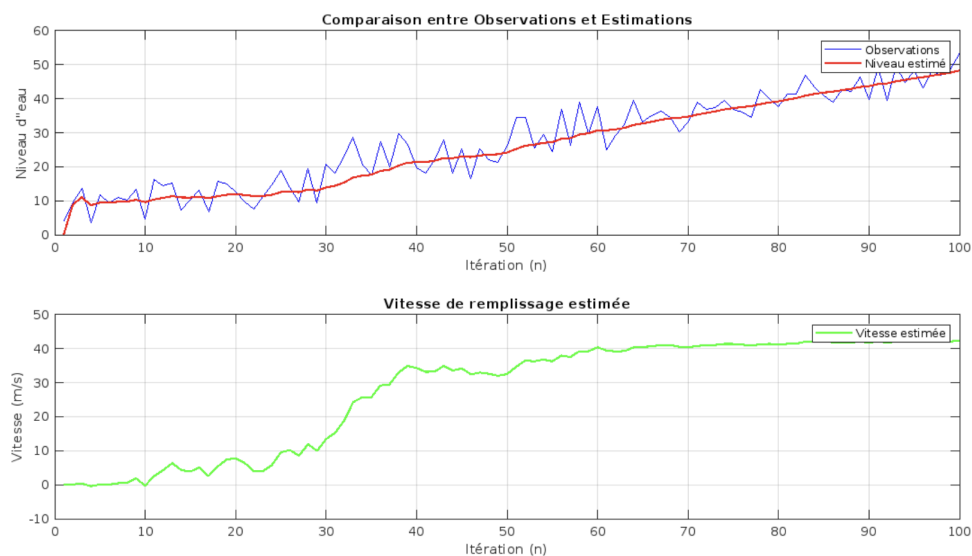


figure 3 : vitesse de remplissage estimé

En supposant que le niveau de l'eau augmente à une vitesse constante mais inconnue, le modèle est modifié pour inclure à la fois le niveau de l'eau et la vitesse de remplissage. En appliquant le filtre de Kalman, les estimations montrent que le filtre converge après 60 itérations, fournissant des prédictions stables pour le niveau de l'eau et la vitesse de remplissage. Quant à la valeur elle atteint une de 40 m/s.

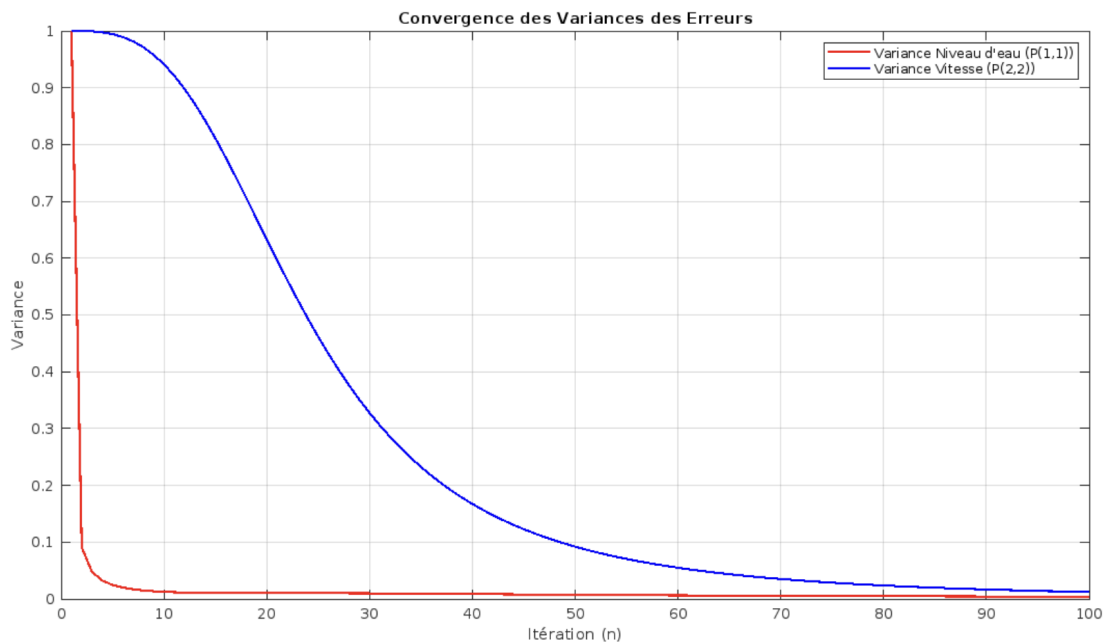


figure 4 : Evolution de P (pour la position et la vitesse)

Pour la courbe de P associée au niveau de l'eau, le comportement est similaire, ce qui est attendu puisque les calculs et les données utilisées sont identiques. Cependant, pour la matrice de covariance relative à la vitesse, la convergence est plus lente. Cela s'explique par le fait que la position est plus facile à prédire et à mettre à jour, car les données disponibles proviennent directement des observations de la position du flotteur. En revanche, la vitesse n'étant pas mesurée directement, elle doit être estimée à partir des variations successives de la position sur plusieurs itérations, ce qui ralentit le processus d'ajustement.

2.2 Suivi d'une cible mobile

Le modèle pour le suivi de cible est le suivant :

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)^2, \\ v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t, \end{cases}$$

On considère alors l'état bidimensionnel $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} s_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On a alors $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\Delta t)^2 a_n \\ \Delta t a_n \end{bmatrix}$$

Sachant que a_n est modélisée par un bruit blanc gaussien de variance σ_a^2 , On peut trouver Q_b avec $E[\mathbf{b}_n \mathbf{b}_n^\top]$

D'où $Q_b = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (\Delta t)^4 & \frac{1}{2} (\Delta t)^3 \\ \frac{1}{2} (\Delta t)^3 & \frac{1}{4} (\Delta t)^2 \end{bmatrix}$

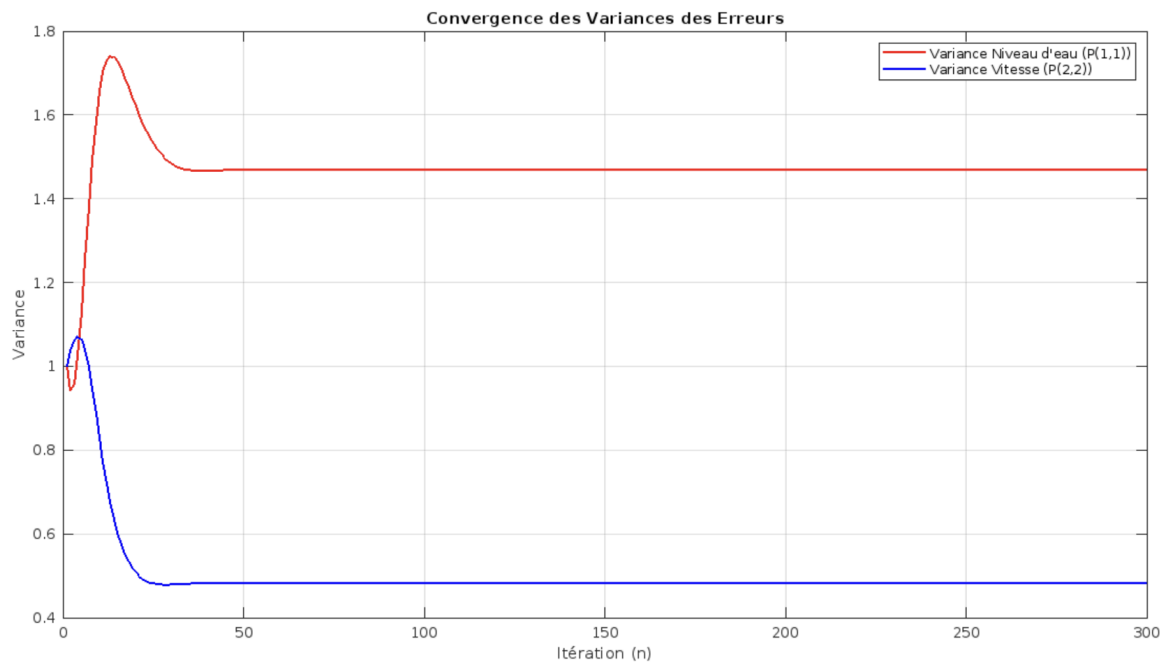


Figure 4 : Evolution de $P(1,1)$ covariance erreur position et $P(2,2)$ covariance erreur vitesse

- $P(1,1)$ et $P(2,2)$ converge vers une valeur limite de 1,4 pour la position et 0,4 pour la vitesse. Cela signifie qu'on a atteint une stabilité à l'état stationnaire sur l'estimation malgré le fait qu'il y ait du bruit de mesure Q_v et Q_b , d'où la valeur non nulle.

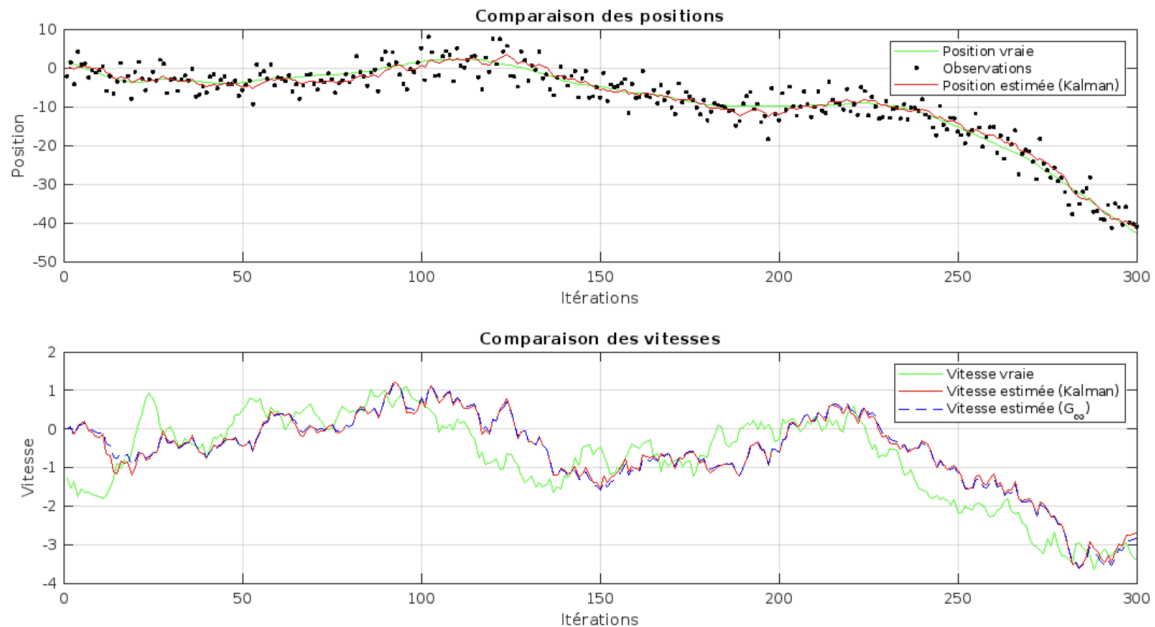


Figure 5 : Evolution de la position et la vitesse (estimée, vraie, observée et avec G_{∞})

La courbe rouge montre que le filtre de Kalman parvient à suivre correctement la position réelle x , tout en “lissant” les observations bruitées représentées par les points noirs. Cela reflète bien la capacité du filtre à réduire l’impact du bruit de mesure sur la position estimée.

En ce qui concerne la vitesse, on observe un léger décalage entre la courbe verte (vitesse vraie) et la courbe rouge (vitesse estimée). Ce comportement est attendu, car contrairement à la position, la vitesse n’est pas mesurée directement. Elle est estimée indirectement à partir des variations de la position, et sa correction repose sur l’itération du filtre.

La vitesse estimée (courbe rouge) est calculée de manière itérative via la mise à jour du filtre, avec le gain de Kalman G_n qui évolue à chaque étape. À l’inverse, avec G_{∞} , le calcul repose sur la limite atteinte par P lorsque le filtre converge. En utilisant G_{∞} , il devient possible de réaliser uniquement des prédictions sans passer par la mise à jour dynamique de G_n . Pour ce faire, il suffit de connaître les paramètres du modèle (A , C , Q_b , Q_v) pour calculer P_{∞} numériquement, puis G_{∞} . Une fois G_{∞} connu, les prédictions peuvent être réalisées directement.

Les résultats montrent que cette approche alternative donne des résultats similaires : les courbes obtenues avec G_n et G_{∞} sont presque superposées, ce qui valide l’équivalence entre les deux méthodes dans ce cas. Donc, on cela nous facilite les calculs car on a plus à faire la mise à jour. On pourrait donc estimer P_{∞} sur suffisamment d’itérations puis calculer G_{∞} . Ensuite,

sur le reste de nos mesures observées on peut utiliser la méthode avec G_{inf} , on gagne en temps de calcul.