

# **Algorithme EM**

Fait par :

**Abdelhamied OMAR YOUSIF**

a) Évolution des probabilités (  $\pi_k$  )

- Les probabilités  $\pi_1$  et  $\pi_2$  représentent les pixels appartenant aux zones sombres et claires dans l'image. Dans le cas où  $\pi_1 \simeq 0.5$  et  $\pi_2 \simeq 0.5$ , cela implique que les deux zones sombres claires occupent des tailles similaires dans l'image.

b) Évolution des moyennes (  $m_k$  )

- Les moyennes  $m_1$  et  $m_2$  représentent le nombre des pixels dans chaque cluster (clair et sombre) quand la différence entre  $m_1$  et  $m_2$  montre que les deux groupes sont bien séparés.

c) Évolution des variances (  $\sigma_k^2$  )

- Les variances  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  mesurent la dispersion des intensités dans chaque cluster. Une faible variance signifie que les pixels dans un cluster ont des intensités homogènes.

d) Évolution de  $Q^\theta$

- La courbe de  $Q^\theta$  montre une convergence monotone, ce qui vaut dire que l'algorithme EM ajuste progressivement les paramètres pour maximiser la vraisemblance des données.

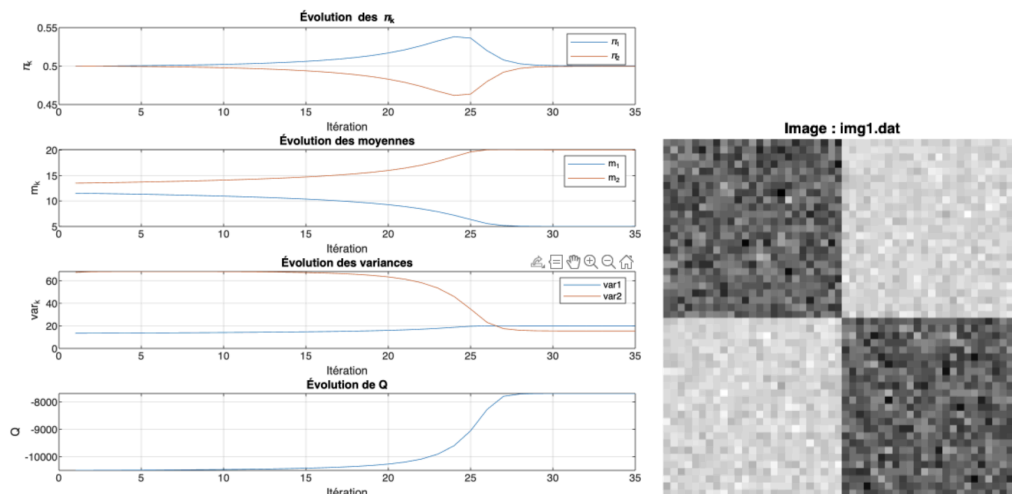


Image 1

a) Les probabilités (  $\pi_k$  ) : les valeurs  $\pi_k$  pour chaque cluster convergent vers des valeurs distinctes. Cela s'explique par la présence de deux couleurs dominantes dans l'image (blanc et noir), bien que les clusters soient bruités, c'est-à-dire que des pixels blancs se retrouvent dans le cluster noir et inversement.

b) Évolution des moyennes (  $m_k$  ) : Comme nous l'avons vu précédemment, les deux clusters sont bruités et tendent vers des teintes proches du gris. C'est pour cette raison que les moyennes des clusters, situées autour de 4 et 20, se rapprochent de zone grise.

c) Évolution des variances (  $\sigma_k^2$  ) : les valeurs des deux variances sont proches, cela indique que les deux clusters présentent une dispersion similaire dans leurs intensités. Autrement dit, les pixels au sein des deux clusters ont une homogénéité comparable en termes de valeurs d'intensité.

d) Évolution de ( $Q^\theta$ ) : La courbe part de 0 et évolue jusqu'à saturation sur une valeur finale, illustre le processus d'optimisation de l'algorithme EM. Au début, les paramètres initiaux sont peu adaptés. À chaque itération, l'algorithme ajuste progressivement les paramètres via les étapes d'Expectation et de Maximization, ce qui entraîne une augmentation monotone de  $Q^\theta$ . La saturation sur une valeur stable indique que l'algorithme a convergé vers un ensemble de paramètres qui maximise la vraisemblance des données.

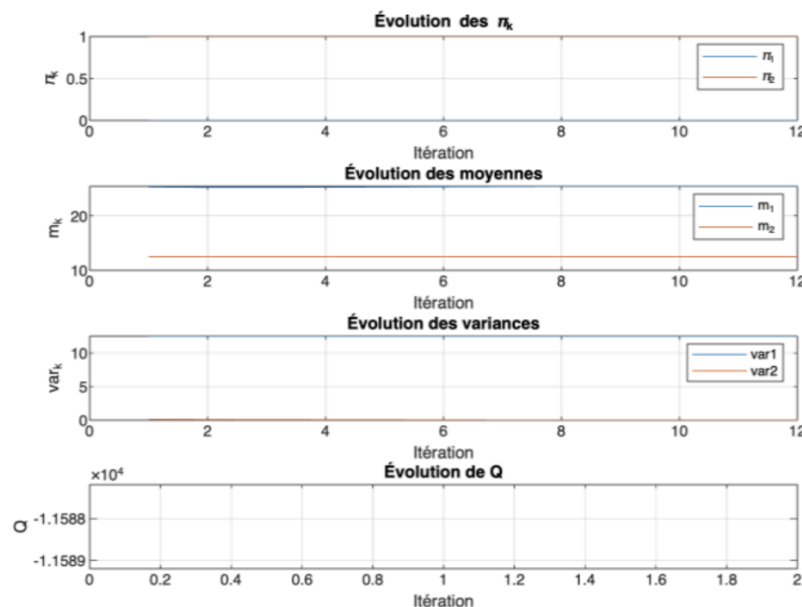
### Effet des paramètres initiaux sur la convergence :

a) Paramètres cohérents : Lorsque les paramètres initiaux sont proches des vraies valeurs des clusters (moyennes et variances), l'algorithme EM converge rapidement, car EM affine ces valeurs au lieu de chercher à s'adapter à des paramètres très éloignés.

b)  $\pi_k$  : Si un des  $\pi_k$  est initialisé à 0, cela signifie que l'algorithme considère ce cluster comme inexistant dès le départ. Cela bloque la mise à jour de  $\pi_k$  et des autres paramètres associés (moyenne et variance de ce cluster).

Conclusion : Il est crucial que  $\pi_k$  soit initialisé avec des valeurs strictement positives.

c) Moyennes irréalistes : Si les moyennes initiales  $m_k$  sont très éloignées des intensités présentes dans l'image (par exemple,  $m_1 = 500$  pour une image avec des pixels entre 0 et 255), l'algorithme converge mal ou ne segmente pas correctement l'image.



Si les moyennes initiales des deux clusters sont égales, l'algorithme EM manque d'indications claires pour différencier les clusters, ce qui peut entraîner une convergence vers un seul cluster, annulant ainsi la probabilité d'appartenance à l'autre. Cela conduit à traiter les deux groupes comme un unique cluster. Toutefois, si les données sont bien séparées et que les autres paramètres, comme les variances, sont correctement initialisés, l'algorithme peut encore converger, mais avec un nombre d'itérations plus élevé. Pour éviter ces problèmes, il est essentiel d'initialiser les moyennes avec des valeurs distinctes et représentatives des données.

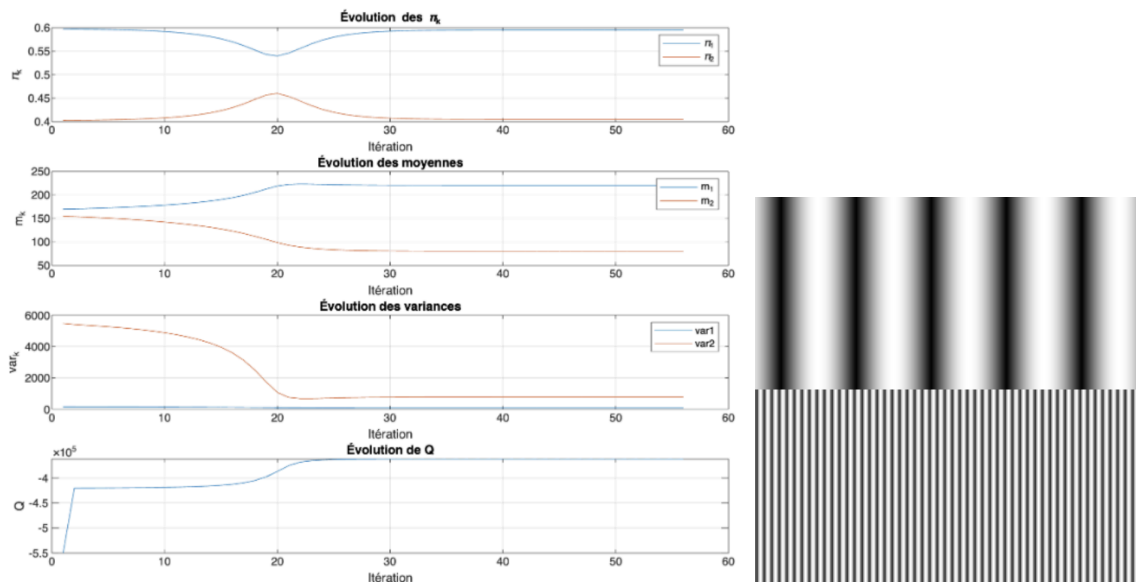


Image 2

Les probabilités  $\pi_k$  pour chaque cluster convergent vers des valeurs distinctes, ce qui s'explique par la présence de deux couleurs dominantes dans l'image (blanc et noir), ainsi que des zones où ces couleurs se mélangent. L'évolution des moyennes  $m_k$  montre des valeurs bien distinguées pour les clusters correspondant au blanc et au noir, mais elles tendent légèrement vers le gris dans les zones de chevauchement entre ces deux couleurs. Concernant les variances  $\sigma_k^2$ , elles sont éloignées l'une de l'autre en raison des différences marquées entre les couleurs blanche et noire dans l'image. Enfin, l'évolution de  $Q^\theta$  révèle que les paramètres initiaux sont peu adaptés, mais l'algorithme ajuste progressivement ces paramètres lors des étapes d'Expectation et de Maximization. Cela se traduit par une augmentation monotone de  $Q^\theta$ , et sa saturation sur une valeur stable indique que l'algorithme a convergé vers un ensemble de paramètres qui maximise la vraisemblance des données.

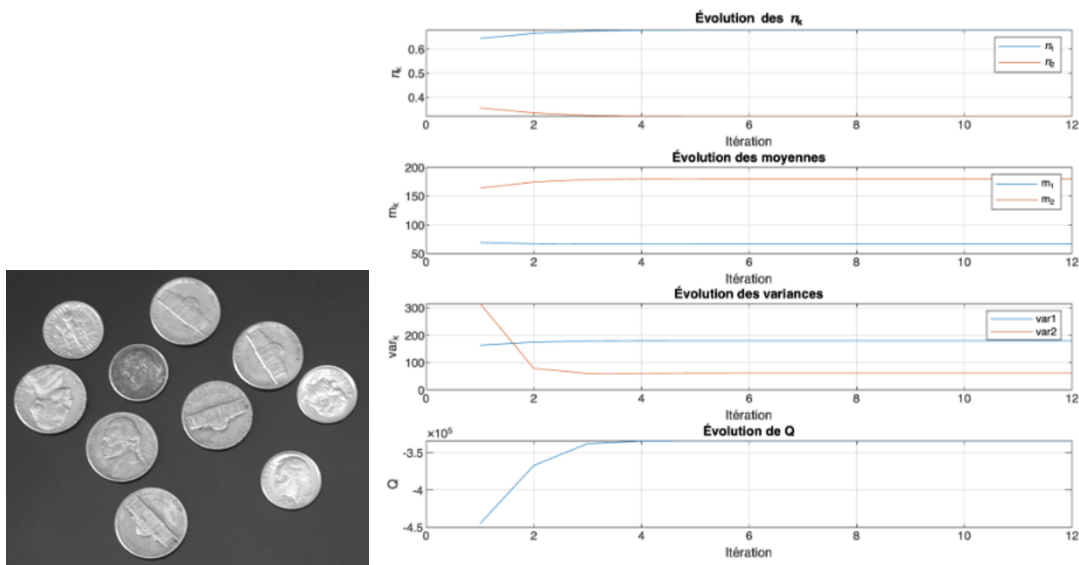


Image 3

Pour cette image, les deux clusters sont les pièces (pixel clairs) et le fond (pixel foncés). Il a fallu 12 itérations avec les meilleurs paramètres, soit avec les paramètres initiaux proches de vrais

paramètres.

a) Les probabilités ( $\pi_k$ ) :

- Les probabilités  $\pi_1 = 0.67$  (cluster du fond) et  $\pi_2 = 0.32$  (cluster des pièces) convergent rapidement.
- Ces valeurs sont cohérentes avec l'image : visuellement, le fond sombre occupe la majorité des pixels, tandis que les pièces claires sont moins nombreuses.
- Interprétation : L'algorithme a correctement identifié les proportions relatives des deux clusters, reflétant bien la composition de l'image.

b) Évolution des moyennes ( $m_k$ ) :

- $m_1 = 66$  (cluster du fond) représente les pixels sombres, ce qui est cohérent avec l'intensité du fond visible dans l'image.
- $m_2 = 180$  (cluster des pièces) correspond aux pixels clairs des pièces, ce qui est attendu étant donné leur brillance et leur contraste avec le fond.
- Interprétation : Les moyennes reflètent une séparation nette entre les deux clusters, ce qui indique une bonne convergence de l'algorithme. La convergence rapide montre également que les clusters sont bien définis dans les données.

c) Évolution des variances ( $\sigma_k^2$ ) :

- $\sigma_1^2 = 62$  pour le fond, ce qui indique une faible dispersion des intensités. Cela est attendu, car le fond est homogène (pixels sombres avec peu de variations).
- $\sigma_2^2 = 854$  pour les pièces, ce qui reflète une plus grande variabilité des intensités en raison :
  - De la texture des pièces (gravures, reflets métalliques).
  - De l'éclairage non uniforme sur les surfaces brillantes des pièces.
- **Interprétation** : Cette différence de variance confirme que le cluster du fond est beaucoup plus homogène que celui des pièces, qui présente des variations importantes.

d) Évolution de ( $Q^\theta$ ) :

- $Q^\theta$  augmente de manière monotone à chaque itération pour atteindre un plateau, indiquant que l'algorithme a convergé.
- La convergence rapide (en 12 itérations) montre que les paramètres initiaux étaient bien choisis et proches des vrais paramètres des clusters.
- **Interprétation** : Le comportement attendu de  $Q^\theta$  (croissance monotone et plateau) confirme que l'algorithme a trouvé une solution optimale pour modéliser les données.

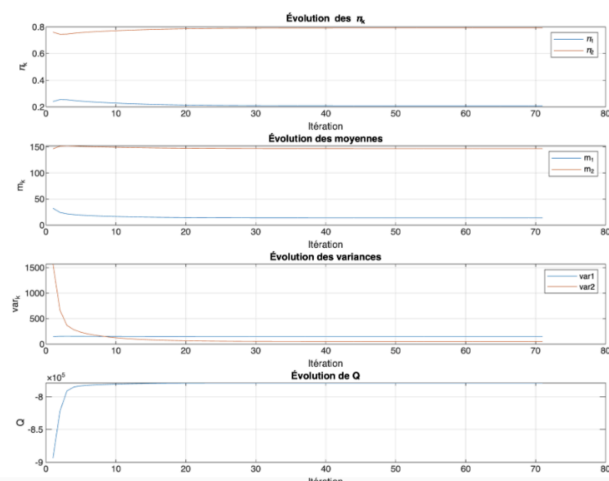


Image 4

a) Les probabilités (  $\pi_k$  ) :

- Les probabilités finales sont  $\pi_1 = 0.2090$  et  $\pi_2 = 0.7910$  .
- Cluster  $G_1$  (probablement les pixels sombres) représente environ 20,9% des pixels de l'image. Il s'agit ici de l'homme avec son manteau.
- Cluster  $G_2$  (probablement les pixels clairs) représente environ 79,1% des pixels de l'image. Ici, c'est l'arrière-plan.

b) Évolution des moyennes (  $m_k$  ) :

- Les moyennes convergent vers :
- $m_1 = 13.8309$  pour le cluster sombre (  $G_1$  ).
- $m_2 = 146.5789$  pour le cluster clair (  $G_2$  ).
- **Interprétation :**
  - $m_1 = 13.8309$  correspond bien aux pixels sombres (proches du noir), visibles dans le manteau du sujet ou les ombres.
  - $m_2 = 146.5789$  correspond aux pixels clairs (niveaux de gris élevés), présents sur le ciel, le trépied et les zones claires de la photo.
  - Cette séparation des moyennes est cohérente avec l'aspect général de l'image.

c) Évolution des variances (  $\sigma_k^2$  ) :

- Les variances convergent vers :
- $\sigma_1^2 = 50.2244$  pour  $G_1$  (sombre).
- $\sigma_2^2 = 1156.8$  pour  $G_2$  (clair).
- **Interprétation :**
  - Une variance faible ( $\sigma_1^2$ ) pour les pixels sombres reflète leur homogénéité (manteau sombre, ombres).
  - Une variance élevée ( $\sigma_2^2$ ) pour les pixels clairs indique une plus grande dispersion des intensités due à la diversité des niveaux de gris (ciel, visage, trépied).
  - Cette différence de variance est cohérente avec la complexité texturale des zones claires.

d) Évolution de (  $Q^\theta$  ):

- $Q^\theta$  augmente pour atteindre un plateau après environ 70 itérations.
- **Interprétation :**

L'évolution de  $Q^\theta$  confirme que l'algorithme EM a convergé correctement. La convergence plus lente par rapport à d'autres cas peut être due à des clusters moins bien définis ou à une initialisation plus éloignée des vrais paramètres.

De même que pour toutes les images, avec des paramètres initiaux proches des vrais paramètres, la convergence est très rapide. Il faut donc analyser l'image avant de choisir les paramètres initiaux.