

# Projet QI

## Étude du modèle de masse de l'aile de l'avion CESSNA C172 Skyhawk

2022-2023

### 1 Description du problème



Figure 1: Cessna C172 Skyhawk en vol

L'avion Cessna C172 Skyhawk, construit par la société américaine Cessna depuis 1955, est l'avion de tourisme le plus populaire au monde d'après sa fiche Wikipedia ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Cessna\\_172](https://fr.wikipedia.org/wiki/Cessna_172)).

Il est devenu un cas d'école pour illustrer les principes de conception aéronautique, tels que détaillés dans [Raymer]. En particulier, le modèle exprimant la masse de l'aile de cet avion en fonction de 10 paramètres réputés influents fait partie des cas illustratifs de la plateforme OpenTURNS, cf. [https://openturns.github.io/openturns/latest/usecases/use\\_case\\_wingweight.html](https://openturns.github.io/openturns/latest/usecases/use_case_wingweight.html).

L'objectif de ce projet est d'étudier l'influence des différents paramètres sur la masse de l'aile, et de vérifier si une simplification du modèle est légitime pour une analyse en tendance centrale et une analyse d'événement rare.

## 2 Formalisation

La masse de l'aile du Cessna C172 Skyhawk est donnée par la formule suivante:

$$g(S_w, W_{fw}, A, \Lambda, q, \ell, t_c, N_z, W_{dg}, W_p) = 0.036 S_w^{0.758} W_{fw}^{0.0035} \left( \frac{A}{\cos^2(\Lambda)} \right)^{0.6} q^{0.006} \ell^{0.04} \left( \frac{100 t_c}{\cos(\Lambda)} \right)^{-0.3} (N_z W_{dg})^{0.49} + S_w W_p$$

où les paramètres  $S_w$ ,  $W_{fw}$ ,  $A$ ,  $\Lambda$ ,  $q$ ,  $\ell$ ,  $t_c$ ,  $N_z$ ,  $W_{dg}$  et  $W_p$  sont écrits dans le tableau (1).

Variable	Distribution	Signification et unité
$S_w$	$\mathcal{U}(150, 200)$	Surface de l'aile ( $ft^2$ )
$W_{fw}$	$\mathcal{U}(220, 300)$	Masse du carburant dans l'aile ( $lb$ )
$A$	$\mathcal{U}(6, 10)$	Facteur d'aspect de l'aile (sans unité)
$\Lambda$	$\mathcal{U}(-10, 10)$	L'angle de balayage au quart de corde ( $deg$ )
$q$	$\mathcal{U}(16, 45)$	Pression dynamique en vol ( $lb/ft^2$ )
$\ell$	$\mathcal{U}(0.5, 1)$	Rapport d'effilement (sans unité)
$t_c$	$\mathcal{U}(0.08, 0.18)$	Rapport épaisseur sur corde du profil d'aile (sans unité)
$N_z$	$\mathcal{U}(2.5, 6)$	Facteur de charge ultime (sans unité)
$W_{dg}$	$\mathcal{U}(1700, 2500)$	Masse totale en vol ( $lb$ )
$W_p$	$\mathcal{U}(0.025, 0.08)$	Masse de la peinture ( $lb/ft^2$ )

Table 1: Liste des paramètres intervenant dans le modèle de masse de l'aile du Cessna C172 Skyhawk. Les grandeurs sont exprimées dans les unités impériales et sont supposées être indépendantes.

## 3 Travail à réaliser

### 3.1 Chargement du cas test

Le cas test est disponible dans le sous-module `wingweight_function` du module `usecases` d'OpenTURNS sous la forme d'une classe appelée `WingWeightModel`.

1. Charger la classe `WingWeightModel`.
2. Copier la distribution jointe des sources d'incertitude dans la variable `distribution_entrees`.
3. Copier la liste des identifiants de ces sources d'incertitude dans la variable `nom_sources`.
4. Copier le modèle de masse de l'aile dans la variable `model_masse`.

5. Vérifier que ce modèle n'a pas été défini à l'aide d'une fonction symbolique. Créer la fonction symbolique correspondante (utiliser `distribution_entrees` pour définir les variables dans le même ordre) et comparer le gradient et la hessienne des deux implémentations du modèle au point moyen des entrées. Certaines composantes sont-elles entachées d'une grande erreur relative?
6. En générant un échantillon de la distribution des sources d'incertitude de taille telle que l'évaluation de la fonction symbolique prenne au moins 0.1 secondes (tester progressivement une taille de 100, 1000 etc) en prenant soin à chaque fois d'initialiser la graine du générateur aléatoire à la valeur 1234, comparer les temps d'évaluation de l'implémentation via une fonction symbolique et via une fonction Python.

On utilisera désormais l'implémentation via une fonction symbolique.

### 3.2 Variables d'entrée et de sortie

7. Créer le vecteur aléatoire  $X$  dans la variable `X` des sources d'incertitude.
8. Créer le vecteur aléatoire  $M$  dans la variable `M` correspondant à la masse de l'aile.
9. Peut-on obtenir la distribution de  $M$  à l'aide de l'algèbre des distributions?
10. Calculer la distribution de la masse de la peinture à l'aide de l'algèbre des distributions et tracer sa densité.

### 3.3 Analyse en tendance centrale

On effectue d'abord une analyse de la moyenne et de la variance de la masse à l'aide d'une approximation de Taylor du modèle au point moyen des sources d'incertitudes à l'aide de la classe `TaylorExpansionMoments`.

11. Que valent la moyenne à l'ordre 0 et la moyenne à l'ordre 2 de  $M$ ? Le calcul précis de la hessienne est-il critique?
12. Que vaut la variance à l'ordre 1 de  $M$ ?
13. Calculer les facteurs d'importance des composantes de  $X$  dans la variance de  $M$ .
14. On considère que la composante  $X_i$  est importante dès lors que son facteur d'importance est supérieur à 0.5%. Quelles sont les composantes importantes et les composantes négligables selon ce critère?

On souhaite confronter cette analyse en calculant les indices de Sobol totaux de chacune des composantes de  $X$ , calculés à partir de la décomposition de Sobol de la fonction de masse.

15. Construire la décomposition de Sobol du modèle à l'aide de l'algorithme `FunctionalChaosAlgorithm` en utilisant un plan d'expérience de type Monte Carlo (classe `MonteCarloExperiment`) de taille 1000 associé à la distribution des incertitudes.
16. En générant un échantillon indépendant et de même taille, valider graphiquement la qualité de la décomposition. On calculera également le coefficient de détermination. Pour cela, on utilisera la classe `MetaModelValidation`.

17. En déduire une estimation des indices de Sobol totaux de chacune des composantes de  $X$ . En appliquant le même critère que pour les facteurs d'importance issus du développement de Taylor, quels sont les composantes influentes et celles qui ne le sont pas? Comparer avec le classement obtenu précédemment.

On souhaite tester le fait que certaines composantes de  $X$  ne sont pas influentes en les fixant à leur valeur moyenne dans le modèle et à comparer le modèle réduit ainsi obtenu au modèle initial.

18. Construire le modèle réduit reliant les composantes influentes de  $X$  à  $M$ . On utilisera la classe `ParametricFunction`.
19. Extraire l'échantillon marginal correspondant à ces composantes de l'échantillon de test précédent.
20. En utilisant le modèle réduit comme méta-modèle du modèle initial, valider graphiquement le fait qu'on puisse fixer les entrées incertaines non influentes à leur valeur moyenne. Que vaut le coefficient de détermination?

### 3.4 Analyse d'un événement rare

On souhaite garantir avec grande probabilité que la masse de l'aile reste en dessous d'une limite  $M_{max} = 460\text{ lb}$ . Pour cela, on souhaite calculer la probabilité de l'événement  $E = \{M \geq M_{max}\}$ .

21. Construire l'événement  $E$ .
22. En utilisant la méthode FORM, calculer une approximation de la probabilité de  $E$ . Combien d'appels au modèle ont été nécessaires? On utilisera l'algorithme d'optimisation `Cobyla` initialisé au point moyen.
23. Calculer l'approximation donnée par SORM (formule de Breitung). L'effet des courbures est-il important?
24. Calculer les facteurs d'importance issus de l'approximation FORM. En appliquant le même critère de sélection que précédemment, quelles sont les variables influentes?
25. En utilisant un tirage préférentiel couplé à une variable de contrôle construite à partir du résultat de la méthode FORM, estimer la probabilité de  $E$  avec un coefficient de variation de 0.1, une taille de bloc de 10 et un nombre maximum d'itérations de  $10^5$ . Combien d'appels au modèle ont été nécessaires pour cette étape? En tout, en comptabilisant ceux du calcul FORM? Comparer avec le nombre d'appels qu'aurait nécessité la méthode de Monte Carlo standard.
26. Bonus: reprendre ces calculs en utilisant le modèle réduit dans lequel les variables jugées peu influentes ont été fixées à leur valeur moyenne. Est-ce que la probabilité de  $E$  a beaucoup changé (erreur relative)?

## 4 Evaluation

Le projet est à réaliser en binôme. Chaque binôme devra rendre un unique notebook python (.ipynb) incluant les réponses aux questions et le code python associé. Le fichier sera nommé *NomEtudiant1\_NomEtudiant2\_projetQI.ipynb* et devra être déposé sur madoc avant le 31/03/2022 à 16h par un seul des membres du binôme.

## References

[Raymer] Raymer D.P. *Aircraft Design: a conceptual approach*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (2018).