projet_CS

abdellahi.babah

March 2023

L'objectif est de montrer que le problème (P_p) s'écrit sous forme d'un problème de moindres carrés pondérés :

$$(P_2) : \min ||W\alpha||_2, \text{ tel que } x = D\alpha.$$

Pour cela, on va utiliser la définition de la pseudo-norme l_p :

$$l_p(\alpha) = ||\alpha||_p = \left(\sum_i |\alpha_i|^p\right)^{1/p}$$

On commence par réécrire cette expression en ajoutant le facteur 1 sous la forme $1^{1/p} \cdot 1^{1/p}$:

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i |\alpha_i|^p \cdot 1\right)^{1/p} = \left(\sum_i |\alpha_i|^p \cdot 1^{1/p} \cdot 1^{1/p}\right)^{1/p}$$

On utilise ensuite la propriété de la multiplication des puissances de même base pour factoriser le terme $|\alpha_i|^p$:

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i |\alpha_i|^p \cdot 1^{1/p} \cdot 1^{1/p}\right)^{1/p} = \left(\sum_i (|\alpha_i|^p)^{1/p} \cdot (1^p)^{1/p}\right)^{1/p}$$

On pose alors $w_i = (1^p)^{1/p} / (|\alpha_i|^p)^{1/p}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i w_i \cdot (w_i\alpha_i)^{-p}\right)^{1/p}$$

On utilise ensuite la propriété de l'élévation à la puissance d'une racine pour simplifier l'exposant :

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i w_i \cdot (w_i\alpha_i)^{-p}\right)^{p/p}$$

On remarque alors que $w_i\alpha_i = (w_i^2\alpha_i)/w_i$, ce qui nous donne :

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i w_i \cdot (w_i\alpha_i)^{-p}\right)^{p/p} = \left(\sum_i (w_i^2\alpha_i)/w_i\right)^{p/p}$$

On utilise ensuite la propriété de l'homogénéité du produit scalaire pour écrire :

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i (w_i^2\alpha_i)/w_i\right)^{p/p} = \left(\sum_i w_i^2\alpha_i/w_i\right)^{p/p} = \left(\sum_i w_i \cdot (w_i\alpha_i)\right)^{p/p}$$

On pose enfin $W = diag(w_1, w_2, \ldots, w_k)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$l_p(\alpha) = \left(\sum_i w_i \cdot (w_i\alpha_i)\right)^{p/p} = \left(\sum_i w_i \cdot (W\alpha)_i\right)^{p/p} = |W\alpha|_p$$

On a donc montré que le problème (P_p) s'écrit sous forme d'un problème de moindres carrés pondérés.