Université Sultan Moulay Slimane
Ecole Superieure de Technologie
Béni Mellal

Année Universitaire 2021-2022
Département de génie des procédés
Filière : AI S1

M02

E01

Mathématique Générale

Travaux Dirigés, Série 1 **Agro-indusrie** **Pr KAJOUNI**

Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes :

♦ $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ ♦ $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ♦ $\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\text{ch}(x) = 2$

2) $\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$

3) $2\arcsin(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Exercice 3:

1) Montrer que : $2\arctan(\frac{1}{3}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin(2t) = \frac{2\tan(t)}{1+\tan(t)^2}$$

3) En déduire que : $\arcsin(\frac{3}{5}) = 2\arctan(\frac{1}{3})$

Exercice 4:

Sur $I =]-\infty, 0]$ on définit : $f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

1) Calculer $\lim\limits_{0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

2) Montrer que : f est continue sur I

3) Montrer que : f est monotone sur I

4) Montrer que : f admet une fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur un intervalle J à déterminer

5) Verifier que $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$ et calculer : $f(1)$ et $(f^{-1})'(\frac{\pi}{8})$

6) Montrer que $\forall\, x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$ et déterminer : $f^{-1}(x)$, $\forall\, x \in J$

Exercice 5:

$$\forall\ x \in I = [0, \tfrac{\pi}{2}[\ ,\ f(x) = \arctan\left(\sqrt{\tan(x)}\right)$$

1) Montrer que f est une bijection de I vers I et définir : f^{-1}

2) Résoudre dans I l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) > x$

3) Soit la suite

$$U_n \begin{cases} U_0 = \frac{\pi}{6} \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a- Montrer que : $\frac{\pi}{6} \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$

b- Montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.