Recherche Opérationnelle : TP01

SARHANE ABDELMOUHAIMEN
OURKIA ABDELHAKIM

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2022-2023

1 Introdution

Les problématiques d'optimisation sont omniprésentes dans divers domaines tels que la production industrielle, la gestion des ressources humaines et l'affectation logistique en e-commerce. Dans ce contexte, nous explorerons deux cas distincts : l'assemblage de vélos dans une usine et l'affectation de commandes de clients aux magasins en tenant compte des contraintes financières et environnementales liées à la livraison. Nous débuterons par la modélisation du processus d'assemblage de vélos, puis aborderons le problème d'affectation en e-commerce avec différents cas particuliers.

2 Modélisation

2.1 Assemblage

Dans une usine, une équipe d'ouvriers assemble des vélos cargos (C) et des vélos standards (S). Les vélos cargos sont assemblés à raison de 100 modèles en 6 heures, tandis que les vélos standards sont assemblés à raison de 100 modèles en 5 heures.

2.1.1 Contraintes du problème

- Chaque semaine, l'équipe peut fournir au maximum 60 heures de travail.
- Les véhicules sont garés sur un parking de 1500m^2. Un vélo cargo occupe 2.5m^2, et un vélo standard occupe 1m^2.
- Il ne faut pas assembler plus de 700 vélos cargos par semaine en raison de limitations dans l'approvisionnement en ressources pour les batteries.
- Il n'y a pas de limitation pour l'assemblage des vélos standards par l'approvisionnement en ressources.

2.1.2 Objectif du problème

La marge pour chaque vélo assemblé est de 700€ pour un vélo cargo et 300€ pour un vélo standard. L'objectif est de maximiser la marge totale en répartissant le travail entre les deux modèles de vélos.

2.1.3 Modélisation en Programmation Linéaire (PL)

Le problème peut être modélisé en Programmation Linéaire avec les variables de décision suivantes :

x_C : le nombre de vélos cargos assemblés par semaine.
x_S : le nombre de vélos standards assemblés par semaine.
L'objectif est de maximiser la fonction objective :

$$\text{Maximiser } Z = 700x_C + 300x_S$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
&6x_C + 5x_S \leq 60 \quad \text{(temps de travail)}\\
&2.5x_C + x_S \leq 1500 \quad \text{(espace de parking)}\\
&x_C \leq 700 \quad \text{(limite de vélos cargos)}\\
&x_C, x_S \geq 0 \quad \text{(quantités non négatives)}
\end{aligned}$$

2.1.4 Modélisation en Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE)

Si l'on considère que le nombre de vélos doit être un nombre entier, le problème se modélise en PLNE. Les variables de décision restent les mêmes, mais on ajoute la contrainte que x_C et x_S doivent être des nombres entiers.

$$\begin{aligned}
&6x_C + 5x_S \leq 60 \\
&2.5x_C + x_S \leq 1500 \\
&x_C \leq 700 \\
&x_C, x_S \geq 0 \\
&x_C, x_S \in \mathbb{Z} \quad \text{(nombres entiers)}
\end{aligned}$$

Ces modèles permettront à l'usine de déterminer la répartition optimale du travail entre les deux modèles de vélos pour maximiser la marge totale.

2.1.5 Résultat

Ainsi, la solution optimale obtenue pour ce problème est 920 vélos standards et 232 vélos cargo assemblés par semaine, assurant une maximisation de la marge totale tout en respectant les contraintes imposées.

2.2 Affectation avec prise en compte des préférences

Une manageuse doit préparer le planning de son équipe de N personnes. Durant la journée, il y a N tâches à effectuer. Chaque tâche doit être affectée exactement une fois et chaque personne doit effectuer exactement une tâche. Chaque membre de l'équipe a fait part de ses préférences quant aux différentes tâches, qui se traduit par un score de préférence noté sur 10, comme illustré en figure 1.

Ainsi, $c(i, j)$ correspond au score de préférence de la personne P_i pour la tâche T_j. La manageuse souhaite trouver la meilleure affectation possible. Établissons un Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) pour cela.

	$T1$	$T2$	$T3$
$P1$	4	7	9
$P2$	9	8	3
$P3$	2	1	2

Figure 1: Exemple de matrice de préférences

2.2.1 Modélisation en PLNE

Définissons les variables de décision binaires x_{ij} qui sont égales à 1 si la personne P_i est assignée à la tâche T_j, et 0 sinon. La fonction objectif est de maximiser la somme des scores de préférence pondérés par ces variables.

$$\text{Maximiser} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c(i, j) \cdot x_{ij}$$

Sous les contraintes suivantes :

1. Chaque tâche doit être effectuée exactement une fois :

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \ldots, N$$

2. Chaque personne doit effectuer exactement une tâche :

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

3. Les variables de décision sont binaires :

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, N$$

2.2.2 Résultat

Pour la matrice de préférence suivante :

	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$P1$	4	7	1	2
$P2$	9	8	2	6
$P3$	2	6	7	3
$P4$	1	2	5	7

On a le résultat suivant :

	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$P1$	0	1	0	0
$P2$	1	0	0	0
$P3$	0	0	1	0
$P4$	0	0	0	1

Le résultat est cohérent car on remarque que le programme prend la valeur la plus élevée de chaque ligne..

3 Applications en optimisation pour l'e-commerce

Parmi les problématiques d'optimisation émergeant en e-commerce se trouvent l'affectation de commandes de clients aux magasins. Ces affectations dépendent des coûts financiers et/ou environnementaux associés à la livraison des colis, à la préparation des commandes et à la gestion des différents stocks. Nous nous intéresserons particulièrement au problème d'affectation de commandes et tournées de véhicules pour différents magasins d'une même enseigne ou franchise à coût/impact minimal.

3.1 Cas particulier 1.1 (5 points)

Les données (a), (b) et (c) représentent à titre d'exemple des demandes en fluide émanant de différentes commandes et les coûts unitaires associés selon les magasins d'origine. Chaque magasin dispose d'un volume de stock limité. Modéliser et résoudre à l'aide d'un programme linéaire (dans le cas de livraison de fluides) ou programme linéaire en nombres entiers (dans le cas de livraison de colis).

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiser} && \sum_{i,j,k} c_{ij} \cdot x_{ijk} \\
&\text{Sous contraintes} && \\
& && \sum_{i} x_{ijk} = d_{kj} \quad \forall k, j \\
& && \sum_{k} x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i, j \\
& && x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k
\end{aligned}$$

Où:

- x_{ijk} est la quantité du fluide j prise du magasin i pour la demande k.
- c_{ij} est le coût de chaque magasin i pour le fluide j.
- d_{kj} est la quantité du fluide j demandé dans la commande k.
- s_{ij} est la quantité disponible dans le magasin i pour le fluide j.

(a) Fluides demandés par commande

	$F1$	$F2$
$D1$	2	0
$D2$	1	3

(b) Stocks de fluides par magasin

	$F1$	$F2$
$M1$	2.5	1
$M2$	1	2
$M3$	2	1

(c) Coûts unitaires par magasin d'origine

	$F1$	$F2$
$M1$	1	1
$M2$	2	3
$M3$	3	2

3.1.1 Résultat

```
  11 Cout         B            9.5

 No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
----- ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
   1 Q[M1,F1,D1]  B              2             0
   2 Q[M1,F1,D2]  B            0.5             0
   3 Q[M1,F2,D1]  NL             0             0                           3
   4 Q[M1,F2,D2]  B              1             0
   5 Q[M2,F1,D1]  NL             0             0                       < eps
   6 Q[M2,F1,D2]  B            0.5             0
   7 Q[M2,F2,D1]  NL             0             0                           3
   8 Q[M2,F2,D2]  B              1             0
   9 Q[M3,F1,D1]  NL             0             0                           1
  10 Q[M3,F1,D2]  NL             0             0                           1
  11 Q[M3,F2,D1]  NL             0             0                           3
  12 Q[M3,F2,D2]  B              1             0
```

3.2 Cas particulier 1.2

A présent nous souhaitons prendre en compte les coûts financiers et/ou environnementaux d'expédition des colis des magasins aux clients. Chaque magasin expédie, vers chaque client qu'il dessert, un unique colis contenant tous les produits fournis par ce magasin à ce client. Le coût résultant comprend un coût fixe (correspondant par exemple aux émissions polluantes du véhicule utilisé s'il était vide), et un coût variable dépendant de la quantité transportée (correspondant par exemple au surplus d'émissions dû à la charge transportée). Modifier la formulation précédente pour modéliser le problème résultant et résoudre avec les données des tableaux (d) et (e).

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimiser} && \sum_{i,j,k}(c_{ij} \cdot x_{ijk}) + \sum_{k}\sum_{i}(F_{ki} + v_{ki}) \cdot e_{ik} \\
&\text{Sous contraintes} && \\
& && \sum_{i} x_{ijk} = d_{kj} \quad \forall k, j \\
& && \sum_{k} x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i, j \\
& && \sum_{j} x_{ijk} \leq M \cdot e_{ik} \quad \forall i, k \\
& && x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k
\end{aligned}
$$

Où:

- e_{ik} est binaire et vaut 1 si le magasin i expédie vers le client k.
- x_{ijk} est la quantité du fluide j prise du magasin i pour la demande k.
- c_{ij} est le coût de chaque magasin i pour le fluide j.
- d_{kj} est la quantité demandée du fluide j demandé dans la commande k.
- s_{ij} est la quantité disponible dans le magasin i pour le fluide j.
- F_{ki} est le Coût fixe d'expédition d'un colis k par le magasin i.
- v_{ki} est le Coût variable d'expédition d'un colis k par le magasin i .

On pose

$$M = card(Fluid) \times \max(s_{i,j})$$

car d'après ce qui précède:

$$
\begin{aligned}
& x_{ijk} \leq s_{ij} \quad \forall i, j, k \\
& x_{ijk} \leq \max(s_{i,j}) \\
& \sum_{j} x_{ijk} \leq \text{card(Fluid)} \times \max(s_{i,j})
\end{aligned}
$$

(d) Coûts fixes d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande, magasin

	$M1$	$M2$	$M3$
$D1$	110	90	100
$D2$	110	90	100

(e) Coûts variables d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande, magasin

	$M1$	$M2$	$M3$
$D1$	10	1	5
$D2$	2	20	10

3.2.1 Résultat

```
 17 Cout                      341

No. Column name       Activity     Lower bound   Upper bound
------ ------------    ------------- ------------- -------------
  1 Q[M1,F1,D1]                  0             0
  2 Q[M1,F1,D2]                  1             0
  3 Q[M1,F2,D1]                  0             0
  4 Q[M1,F2,D2]                  1             0
  5 Q[M2,F1,D1]                  0             0
  6 Q[M2,F1,D2]                  0             0
  7 Q[M2,F2,D1]                  0             0
  8 Q[M2,F2,D2]                  2             0
  9 Q[M3,F1,D1]                  2             0
 10 Q[M3,F1,D2]                  0             0
 11 Q[M3,F2,D1]                  0             0
 12 Q[M3,F2,D2]                  0             0
 13 E[M1,D1]     *               0             0             1
 14 E[M1,D2]     *               1             0             1
 15 E[M2,D1]     *               0             0             1
 16 E[M2,D2]     *               1             0             1
 17 E[M3,D1]     *               1             0             1
 18 E[M3,D2]     *               0             0             1
```

3.3 Cas particulier 2

(i) **Problème Théorique :** Le cas particulier 2 correspond au problème classique du *Voyageur de Commerce (TSP).*

(ii) **Modélisation PLNE :**
Soient les variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le livreur va du lieu } i \text{ au lieu } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction objectif est de minimiser la distance totale parcourue :

$$\text{Minimiser } \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j$$
$$\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$
$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \quad 2 \leq i \neq j \leq n$$
$$1 \leq u_i \leq n \quad \forall i$$

Le premier ensemble d'égalités stipule que chaque ville est atteinte depuis exactement une autre ville, et le deuxième ensemble d'égalités stipule qu'à partir de chaque ville, il y a un départ vers exactement une autre ville. Les dernières contraintes assurent qu'il n'y a qu'une seule tournée couvrant toutes les villes, et non deux ou plus de tournées disjointes qui ne couvrent collectivement que toutes les villes.

3.3.1 Résultat

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} \text{ALPHA} & \text{C1} & \text{C2} & \text{C3} & \text{C4} & \text{C5} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \text{ALPHA} \\ \text{C1} \\ \text{C2} \\ \text{C3} \\ \text{C4} \\ \text{C5} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

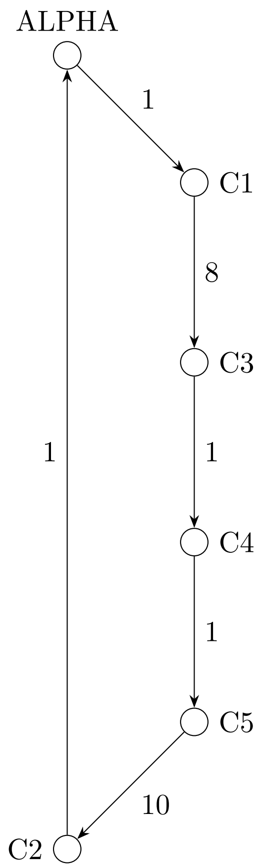

Figure 2: Solution Cas Particulier 1.2