Chapitre 5: Optimisation sous contraintes

Abdelkrim EL MOUATASIM
Professeur Habilité en Mathématique Appliquée
https://sites.google.com/a/uiz.ac.ma/elmouatasim/

FPO - SMI - S6

20 mars 2018

Plan

Organisation du cours

1. Introduction
2. L'optimisation sous contraintes d'égalité
3. L'optimisation sous contraintes d'inégalité

Modélisation et ingrédients d'une optimisation

Le processus de formalisation du problème, d'identification des objectifs et des variables à optimiser est appelé la *modélisation*. C'est une étape importante : il faut choisir un modèle ni trop simpliste ni trop coûteux à évaluer. Les ingrédients d'une optimisation, issue d'un processus de modélisation sont représentées par :

- **les variables / paramètres d'optimisation** $u \in U \subset V$ **:** l'optimum est cherché dans un ensemble U plongé dans l'espace vectoriel V. Très souvent on pose $V = \mathbb{R}^n$,
- **la fonction de coût (objectif)** $f : U \mapsto \mathbb{R}$ **:** une mesure quantitative de qualité d'un candidat à l'optimum,
- **les contraintes sur les variables d'optimisation :** représentés soit par une application $c : V \mapsto \mathbb{R}^m$ dite "vecteur de contraintes", ou par le choix de l'ensemble des solutions admissibles $U \subset V$ *(feasible région)*.

Solution d'un problème d'optimisation

Il n'existe pas d'algorithme universel pour résoudre les problèmes d'optimisation. Plutôt un ensemble d'algorithmes qui traitent des problèmes d'une certaine classe.
La quasi-totalité de méthodes de solution sont les méthodes itératives qui améliorent un candidat $u \in U$ dans sont voisinage. La façon comment elles essaient améliorer u peut varier. La majorité de méthodes utilisent la valeur $f(u)$, la valeur de $c(u)$, voire les dérivées première et seconde de f par rapport à u. Certaines méthodes accumulent l'information des itérations précédentes, tandis que d'autres se basent uniquement sur le pas courant.
Indépendamment de l'approche, une bonne méthode d'optimisation doit considérer les points suivants :

- **robustesse :** la méthode devrait fonctionner pour une large classe de problèmes, indépendamment des paramètres et des valeurs initiales,
- **efficacité :** elle ne devrait pas être prohibitivement chêre en temps CPU et en mémoire vive,
- **précision :** le résultat numérique devrait bien approcher la vraie solution $u^\star$ du problème de minimisation.

Dans le cas d'un modèle de programmation non-linéaire sans contrainte, nous avons vu la condition d'optimalité suivante : si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ est un maximum local, alors

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Cette condition n'est plus valable lorsqu'il y a des contraintes, car une solution optimale peut se trouver sur la frontière du domaine réalisable.

Example

Nous souhaitons résoudre le programme

$$\max_{x} \; f(x) = 6 - x - x^2$$
$$\text{s.c.} \quad x \geqslant 0.$$

Il est facile de se convaincre (voir Figure 1) que la solution optimale est $x^* = 0$, pourtant

$$\frac{df(0)}{dx} = -1 < 0.$$

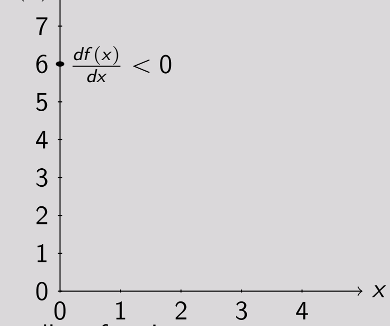

FIGURE : Maximum d'une fonction concave sous contrainte de positivité

Organisation du cours

Le problème
Optimisation sous contraintes

Notations

$$\begin{array}{lcl} V & : & \text{Espace vectoriel} \\ F(x), F_i(x), i = 1, \ldots, p, & : & \in C^1(V) \end{array}$$

Le problème formel

$$\begin{cases} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) = 0 \text{ , } j = 1, \ldots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{1}$$

Le problème

$$\begin{cases} \min & F(x) \\ \text{s.c.} & F_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{2}$$

Définition

$F_i(x)$	:	*Contraintes, liaisons*
C	:	*Ensemble des solutions réalisables*
	:	*ou ensemble des contraintes*
$F(x)$	:	*Fonction objectif*
$\bar{x}$	:	*Solution*

Optimisation sous contraintes

Exemples (Dimension finie)

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

$$F_i(x) = \langle B_i, x\rangle - c_i$$

Exemples (Dimension infinie)

$$V = C^1([0,1])$$

$$F(u) = \int_0^1 \frac{u'(t)^2}{2} + \frac{u(t)^2}{2}\, dt$$

$$F_i(u) = u(t_i) - c_i$$

Optimisation sous contraintes

Exemples (Dimension finie)

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

$$F_i(x) = \langle B_i, x\rangle - c_i$$

Exemples (Dimension infinie)

$$V = C^1([0,1])$$

$$F(u) = \int_0^1 \frac{u'(t)^2}{2} + \frac{u(t)^2}{2}\, dt$$

$$F_i(u) = u(t_i) - c_i$$

Multiplicateurs de Lagrange

Théorème (Théorème de Lagrange)

$\bar{x}$ est solution du Pb. d'optimisation sous contraintes (1)
$\Longrightarrow$
$\exists\ \bar{\lambda}_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, p,$
appelés multiplicateurs de Lagrange

$$\begin{cases} DF(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j DF_j(\bar{x}) = 0 \\ \\ F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{3}$$

Les conditions de Lagrange sont nécessaires mais elles ne sont pas suffisantes.

Multiplicateurs de Lagrange

Théorème (Théorème de Lagrange)

$\bar{x}$ est solution du Pb. d'optimisation sous contraintes (1)
$\Longrightarrow$
$\exists\ \bar{\lambda}_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, p,$
appelés multiplicateurs de Lagrange

$$\begin{cases} DF(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j DF_j(\bar{x}) = 0 \\ \\ F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{3}$$

Les conditions de Lagrange sont nécessaires mais elles ne sont pas suffisantes.

Mise en équations

$$V = \mathbb{R}^n$$

Théorème de Lagrange $\Rightarrow$ système de $n + p$ équations à $n + p$ inconnues

Théorème (Lagrange : équations)

$$\begin{cases} \nabla F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla F_j(x) = 0 \\ F_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{4}$$

C'est un système de $n + p$ équations à $n + p$ inconnues $(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_p)$.

Question

Comment résoudre ce système ?

Mise en équations

$$V = \mathbb{R}^n$$

Théorème de Lagrange $\Rightarrow$ système de $n+p$ équations à $n+p$ inconnues

Théorème (Lagrange : équations)

$$\begin{cases} \nabla F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla F_j(x) = 0 \\ F_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{4}$$

C'est un système de $n+p$ équations à $n+p$ inconnues $(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_p)$.

Question

Comment résoudre ce système ?

Introduction du lagrangien

Notations

$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

Définition (Lagrangien)

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j F_j(x)$$

Théorème (Lagrange)

$(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ vérifie

$$\begin{cases} D_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \\ F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{5}$$

Introduction du lagrangien

Notations

$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

Définition (Lagrangien)

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j F_j(x)$$

Théorème (Lagrange)

$(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ *vérifie*

$$\begin{cases} D_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \\ F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{cases} \tag{5}$$

Introduction du lagrangien

Notations

$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

Définition (Lagrangien)

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j F_j(x)$$

Théorème (Lagrange)

$(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ *vérifie*

$$\begin{cases} D_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \\ F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{5}$$

Théorème de Lagrange : forme différentielle

Remarques

$D_\Lambda \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = (F_1(x), \ldots, F_p(x))^t$

On peut donc écrire aussi

Théorème

$(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ *vérifie*

$$\begin{cases} D_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \\ D_\Lambda \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Théorème de Lagrange : forme différentielle

Remarques

$D_\Lambda \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = (F_1(x), \ldots, F_p(x))^t$

On peut donc écrire aussi

Théorème

$(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ *vérifie*

$$\begin{cases} D_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \\ D_\Lambda \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Théorème de Lagrange : exemple

Exemples (Fonction quadratique, contraintes linéaires)

$$\begin{cases} C = \{x \in V \quad \textit{tel que} \quad \mathbf{B}x = c\} \\ F(x) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{7}$$

Théorème (Conditions d'optimalité)

$$\begin{cases} \mathbf{A}\bar{x} & +\mathbf{B}^t\bar{\Lambda} & = b \\ \mathbf{B}\bar{x} & & = c \end{cases} \tag{8}$$

Question

Comment résoudre ce système ?

Théorème de Lagrange : exemple

Exemples (Fonction quadratique, contraintes linéaires)

$$\begin{cases} C = \{x \in V \quad tel\ que \quad \mathbf{B}x = c\} \\ F(x) = \dfrac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle + \langle \Lambda, \mathbf{B}x - c\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b - \mathbf{B}^t\Lambda, x\rangle - \langle \Lambda, c\rangle$$

Théorème (Conditions d'optimalité)

$$\begin{cases} \mathbf{A}\bar{x} \quad + \mathbf{B}^t\bar{\Lambda} \quad = b \\ \mathbf{B}\bar{x} \quad = c \end{cases} \tag{8}$$

Question

Comment résoudre ce système ?

Théorème de Lagrange : exemple

Exemples (Fonction quadratique, contraintes linéaires)

$$\begin{cases} C = \{x \in V \quad \textit{tel que} \quad \mathbf{B}x = c\} \\ F(x) = \dfrac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathcal{L}(x,\Lambda) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle + \langle \Lambda, \mathbf{B}x - c\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b - \mathbf{B}^t\Lambda, x\rangle - \langle \Lambda, c\rangle$$

Théorème (Conditions d'optimalité)

$$\begin{cases} \mathbf{A}\bar{x} \quad +\mathbf{B}^t\bar{\Lambda} & = b \\ \mathbf{B}\bar{x} & = c \end{cases} \tag{8}$$

Question

Comment résoudre ce système ?

Théorème de Lagrange : exemple

Exemples (Fonction quadratique, contraintes linéaires)

$$\left\{\begin{array}{l} C = \{x \in V \quad \textit{tel que} \quad \mathbf{B}x = c\} \\ F(x) = \dfrac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{array}\right. \tag{7}$$

Théorème (Conditions d'optimalité)

$$\left\{\begin{array}{llr} \mathbf{A}\bar{x} & +\mathbf{B}^t\bar{\Lambda} & = b \\ \mathbf{B}\bar{x} & & = c \end{array}\right. \tag{8}$$

Question

Comment résoudre ce système ?

Theorem

Supposons que le lagrangien associé au problème (2)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X lorsque le vecteur de multiplicateur $\lambda = \lambda^*$. Si $f_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, alors x^* est une solution optimale globale de (2).

Démonstration.

La preuve se fait par contradiction en supposant que x^* n'est pas une solution optimale de (2). Alors il existe un $\bar{x}$ tel que $f_i(\bar{x}) = 0$ pur tout $i = 1, \ldots, m$, et $f(\bar{x}) < f(x^*)$. Par conséquent, pour tout λ

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^*) = 0$$

et ainsi

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) < f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^*).$$

En prenant $\lambda = \lambda^*$ la relation précédente contredit le fait que x^* est un minimum global du lagrangien sur X lorsque $\lambda = \lambda^*$.

Organisation du cours

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème formel

$$\begin{cases} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) \leqslant 0 \;,\; j = 1, \dots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{9}$$

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème formel

$$\begin{cases} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) \leqslant 0 \ , \ j = 1, \ldots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{9}$$

Exemples (Dimension finie)

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\min_x \ F(x) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}x, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

$$avec \ F_i(x) = \langle B_i, x\rangle - c_i \leqslant 0$$

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème formel

$$\begin{cases} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) \leqslant 0 \ , \ j = 1, \ldots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{9}$$

Exemples (Projection sur un convexe)

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\min_x \ F(x) = \langle y - x, y - x \rangle$$

$$avec \ F_i(x) = \langle B_i, x \rangle - c_i \leqslant 0$$

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème formel

$$\begin{cases} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) \leqslant 0 \,,\, j = 1, \ldots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{9}$$

Exemples (Dimension infinie)

$$V = C^1([0,1])$$

$$\max_x \; F(u) = \int_0^1 u(t)\, dt$$

$$avec\ F_1(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(t)^2}\, dt - L \leqslant 0$$

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème formel

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) \leqslant 0 \; , \; j = 1, \ldots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{array} \right. \tag{9}$$

Définition

$F_i(x)$	:	*Contraintes, liaisons*
$F_i(x) = 0$	:	*Contraintes actives*
C	:	*Ensemble des solutions réalisables*
	:	*ou ensemble des contraintes*
$F(x)$	:	*Fonction objectif*
$\bar{x}$	:	*Solution*

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème formel

$$\begin{cases} C = \{x \in V \text{ tel que } F_j(x) \leqslant 0 \; , \; j = 1, \ldots, p\} \\ \\ \forall x \in C \quad F(\bar{x}) \leqslant F(x) \end{cases} \tag{9}$$

Définition

$F_i(x)$ linéaires	:	*C est un polyèdre*
idem, $F(x)$ linéaire	:	*"Programmation linéaire"*
admet une solution exacte	:	*algorithme du simplexe*
idem, $F(x)$ quadratique	:	*"Programmation quadratique"*
$F_i(x)$ convexes, $F(x)$ convexe	:	*"Programmation convexe"*

Theorem

Supposons que le lagrangien associé au problème (9)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X lorsque le vecteur de multiplicateur $\lambda = \lambda^*$. Si $f_i(x^*) \leqslant 0, \lambda_i^* \geqslant 0$ et $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, alors x^* est une solution optimale globale de (9).

Démonstration.

La preuve se fait par contradiction en supposant que x^* n'est pas une solution optimale de (9). Alors il existe un $\bar{x}$ tel que $f_i(\bar{x}) \leqslant 0$ pur tout $i = 1, \ldots, m$, et $f(\bar{x}) < f(x^*)$. Par conséquent, pour λ^*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*) = 0$$

et ainsi

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(\bar{x}) < f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*).$$

La relation précédente contredit le fait que x^* est un minimum global du lagrangien sur X.

Conditions d'optimalité

Théorème (Condition locale)

Si $\bar{x}$ réalise le minimum d'une fonction $F(x)$ sur un convexe C alors

$$\forall y \in x \quad \langle GradF(\bar{x}), (y - \bar{x}) \rangle \geqslant 0$$

Si la fonction $F(x)$ est convexe, la condition est suffisante

Théorème de Kuhn et Tucker

Théorème (Kuhn et Tucker, Version locale)

$\bar{x}$ solution du problème d'optimisation (9) ssi

$$\begin{cases} DF(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j DF_j(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_j F_j(\bar{x}) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, p, \\ F_j(\bar{x}) \leqslant 0, \ \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{10}$$

Seules interviennent les contraintes actives.

Théorème de Kuhn et Tucker

Théorème (Kuhn et Tucker, Version locale)

$\bar{x}$ solution du problème d'optimisation (9) ssi

$$\begin{cases} DF(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j DF_j(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_j F_j(\bar{x}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p, \\ F_j(\bar{x}) \leqslant 0, \ \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \dots, p \end{cases} \tag{10}$$

Seules interviennent les contraintes actives.

Multiplicateurs et Lagrangien

Définition (Multiplicateur)

les réels $\lambda_j \geqslant 0, j = 1, ..., p$ *sont les multiplicateurs de Lagrange.*
$\bar{\lambda}_j = 0$ *si la contrainte* j *est inactive.*

Définition (Lagrangien)

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j F_j(x)$$

Si $F(x)$ *et* $F_j(x)$ *sont convexes* $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(x, \Lambda)$ *est convexe en* x

Multiplicateurs et Lagrangien

Définition (Multiplicateur)

les réels $\lambda_j \geqslant 0, j = 1, ..., p$ *sont les multiplicateurs de Lagrange.*
$\bar{\lambda}_j = 0$ *si la contrainte* j *est inactive.*

Définition (Lagrangien)

$$\mathcal{L}(x, \Lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j F_j(x)$$

Si $F(x)$ *et* $F_j(x)$ *sont convexes* $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(x, \Lambda)$ *est convexe en* x

Cas convexe

Théorème (Kuhn et Tucker, Version globale)

On suppose $F(x)$ *et* $F_j(x)$ *convexes.*
$\bar{x}$ *solution de (9)* $\Rightarrow \exists\ (\bar{\lambda}_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, p)$

$$\begin{cases} \forall x \in V, \quad \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) \leqslant \mathcal{L}(x, \bar{\Lambda}) \\ \bar{\lambda}_j F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \\ F_j(\bar{x}) \leqslant 0,\ \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{11}$$

Définition (Problème primal)

Le problème $\Lambda \rightarrow x \ /\ \min_x \mathcal{L}(x, \bar{\Lambda})$ *est le problème primal .*
C'est un problème d'optimisation sans contrainte.

Cas convexe

Théorème (Kuhn et Tucker, Version globale)

On suppose $F(x)$ *et* $F_j(x)$ *convexes.*
$\bar{x}$ *solution de (9)* $\Rightarrow\ \exists\ (\bar{\lambda}_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, p)$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in V, \quad \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) \leqslant \mathcal{L}(x, \bar{\Lambda}) \\ \bar{\lambda}_j F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \\ F_j(\bar{x}) \leqslant 0,\ \lambda_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots, p \end{array}\right. \tag{11}$$

Définition (Problème primal)

Le problème $\Lambda \rightarrow x \ / \ \min_x \mathcal{L}(x, \bar{\Lambda})$ *est le problème primal .*
C'est un problème d'optimisation sans contrainte.

Theorem

Supposons que X est convexe et que les fonctions f et f_i sont différentiable et convexes. Si les conditions de KKT sont vérifiées à x^*, alors x^* est un minimum global du problème (9).

Démonstration.

Le lagrangien étant convexe puisque

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f_i(x) \quad \text{convexe} \Rightarrow \lambda_i f_i(x) \quad \text{convexe}$$
$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \quad \text{somme de fonctions convexes,}$$

alors par l'inégalité du gradient il s'ensuit que pour tout $x \in X$

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) \geqslant f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*)}_{0} + \underbrace{[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*)]}_{0}{}^T (x - x^*)$$

$$\Rightarrow f(x^*) - f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in X$$

et $f(x^*) \leqslant f(x)$. □

Example (Conditions KKT)

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \max\ f(x_1, x_2) &= \ln(x_1 + 1) + x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc considérer qu'il n'y a qu'une seule contrainte avec

$$g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2,$$

et $b_1 = 3$.

Example (Conditions KKT :suite)

Nous associons à cette contrainte un multiplicateur $u_1 \geqslant 0$, et pour les contraintes de non-négativité $u_2 \geqslant 0, u_3 \geqslant 0$, nous avons alors les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^* + 1} - 2u_1 + u_2 &= 0, \\
1 - u_1 + u_3 &= 0, \\
2x_1^* + x_2^* - 3 &\leqslant 0, \\
u_1(2x_1^* + x_2^* - 3) &= 0, \\
-x_1 &\leqslant 0, \\
-x_2 &\leqslant 0, \\
u_2 x_1 &= 0, \\
u_3 x_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Example (Conditions KKT : suite)

Nous obtenons $u_1 \geqslant 1$. Puisque

$$1 - 2u_1(x_1^* + 1) + u_2 = 0$$

et $x_1^* \geqslant 0$, nous en déduisons $u_2 \geqslant 1$
Par conséquent, $x_1^* = 0$. Puisque $u_1 \neq 0$, nous avons

$$2x_1^* + x_2^* - 3 = 0,$$

et par conséquent $x_2^* = 3$. Dès lors, $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 0$. Les conditions KKT sont donc satisfaites en un seul point : $(0, 3)$.
Il s'agit bien d'un maximum global, car la fonction objectif est concave et le domaine réalisable est convexe (modèle de programmation convexe).