المرحلة الثانوية

سلسة المهندس فى الرياضيات

المهندس
الرياضيات

إعداد المهندس

لطفي زهران

(قُلْ بِفَضْلِ اللَّهِ وَبِرَحْمَتِه فَبِذَٰلِكَ فَلْيَفْرَحُوا هُوَ خَيْرٌ مِّمَّا يَجْمَعُونَ)

"الحمد لله وبفضله والبركات وبتوفيقه تتحقق المقاصد والغايات"

صديقي العزيز.....

حبينا نشارك رحلتك الجديدة مع عالم الرياضيات السنادي يصديقي وبشكل مختلف وده هيكون متوفر لك مع سلسلة المهندس في الرياضيات حيث الأرقام تتحول إلي مفاتيح والمعادلات تصبح ألغازا ممتعة في انتظار من يحلها وستجدنا معك من أول خطوة لنهايتها في سلسلة كتب المهندس في الرياضيات وهدفنا الأسمي في هذا الكتاب ان نقدم المعلومة للمتعلم في أبسط صورها لذلك تم توفير اسلوب الشرح المبسط فيها وعلي الرغم من أننا نريد أن يستفيد من الكتاب اكبر عدد ممكن إلا أننا نرجو عدم تصوير أو مسح الكتاب وارسالة علي المواقع وغيرها ولن نسامح في حقنا امام الله اذا حدث ذلك بدون إذن مكتوب أو صوتي من صاحب الكتاب

والحمد لله الذي جعلنا نوفق لتري مجهود وتفاصيل في تقديم هذا الكتاب ليكون صاحب رحلتك خلال العام.

ونتمنى لك يصديقي التوفيق والسداد والتيسير في خطاك وان تحقق احلامك خطوه بخطوه حتي تصل إلي ما تتمناه.

لطفي زهران

مذكرة شهر أغسطس

الدوال الحقيقية

الدالة

هي علاقة تربط كل عنصر من عناصر $\boxed{\text{س}}$ بعنصر واحد من عناصر $\boxed{\text{ص}}$

مثال 1

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

س + ص = ٧ أكتب بيان ع ، لماذا هي دالة و أوجد مداها

من ٣ اعدادي يا صديقي

1. عشان أجيب بيان ع
بجيبه علي حسب العلاقة إلي مدهالي (س + ص =٧)
باخد كل س و أروح لل ص و اشوف الي يحقق معاها العلاقة

بيان ع = { (١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤) }

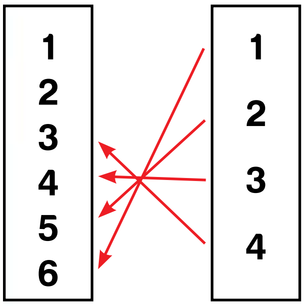
2. عشان أعرف هي دالة ولا لا وي عندي طرقتين

الطريقة الاولي

بص علي كل عنصر من عناصر س في بيان ع لو ظهر كمسقط أول مرة واحدة بس يبقي كدا دالة

الطريقة الثانية:

برسم مخطط سهمي



بشوف كل عنصر من عناصر س لو خرج منه سهم واحد بس يبقي دالة
» طيب لو خرج منه أكثر من سهم أو لو في واحد مخرجش منه يبقي ليس دالة

3. المدى هو المسقط الثانى في بيان ع أو الي يروحله السهم في ص
المدي = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

4. المجال ← س
المجال المقابل ← ص

كيفية تحديد العلاقة دالة أم لا جبريا

$ص = س^{٢} + ٣$

$ص^{٢} = س^{٢} + ٩$

هنا بقي من غير رسم او بيان ع

بص يا صديقي الموضوع بسيط جدا بمجرد النظر كدا

١. لو الصاد عليها **أس فردي** ← يبقي العلاقة **دالة**

٢. لو الصاد عليها **أس زوجي** ← يبقي العلاقة **ليست** دالة

نفهم بقي

1) $ص = س^{٢} + ٣$

هنعوض عن س بأى قيمة

$س = ١$ $ص = ١+٣ = ٤$

الصاد طلع ليها قيمة واحدة

2) $ص^{٢} = س^{٢} + ٩$

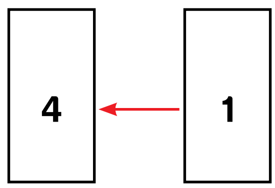
هنعوض عن س بأى قيمة

$س = ٤$ $ص = ١٦ + ٩$

$ص^{٢} = ٢٥$ $ص = \pm ٥$

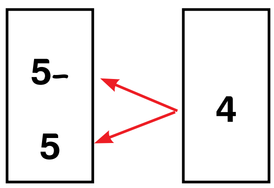
الصاد طلع ليها أكثر من قيمة واحدة

طيب لو جيت أعمل مخطط سهمي



طلع من س سهم واحد بس

دالة



طلع من س أكثر من سهم

ليست دالة

بيانيا (اختبار الخط الرأسي)

خطوات الحل يا صديقي:-

بعمل حاجه اسمها اختبار الخط الرأسي

يعني بنزل بخطوط رأسية كتير علي الرسمة

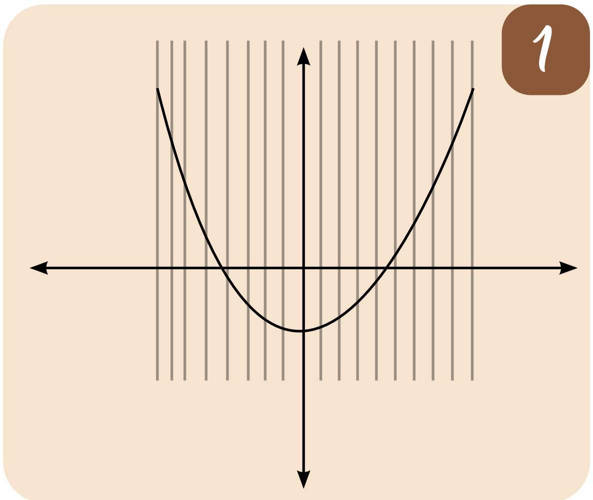
١. لو كل الخطوط قطعة في نقطة واحدة بس تبقي ← **دالة**

٢. لو في خط واحد علي الاقل قطع في أكثر من نقطة **ليست دالة**

مثال 2

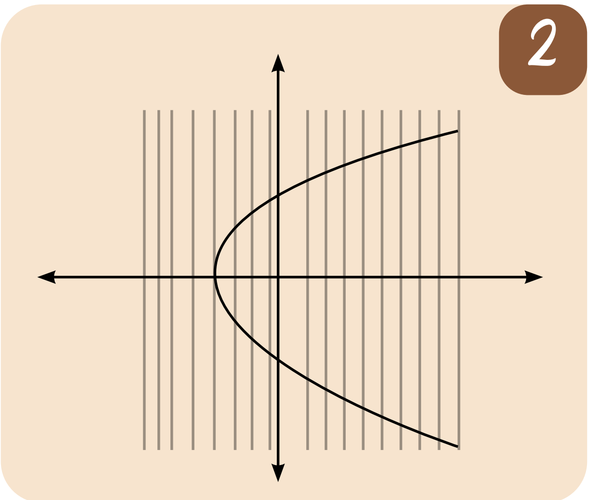
أيمها دالة

1



دالة

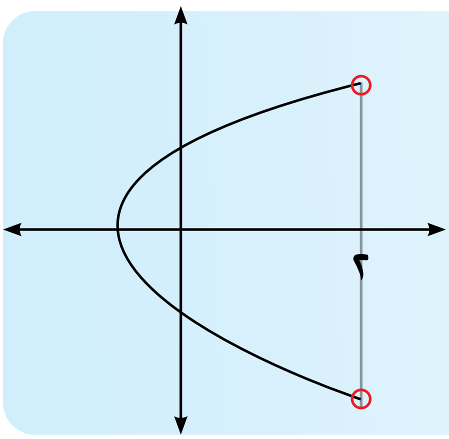
2



ليست دالة

نفهم بقي

لو أخدنا عند س = ٢ مثلًا
هنلاقي إن ليها قيمة فوق و قيمة تحت
يعني لو رسمنا مخطط سهمي هلاقي
س طلع منها سهمين يبقي ليست
دالة

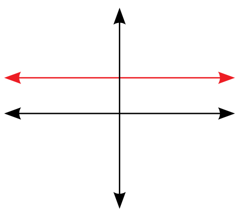


خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

١) اى علاقة تمثل بخط أفقي يوازي محور السينات تعتبر دالة

ص = ثابت (عدد)

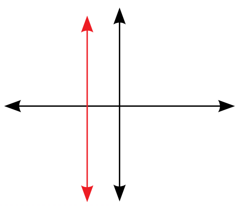
(دالة ثابتة)



٢) اى علاقة تمثل بخط رأسي يوازي محور الصادات لا تعتبر دالة

س = ثابت (عدد)

(ليست ثابتة)



تحديد المجال

١) مجال الدالة كثيرة الحدود

بص يا صديقي

لو الدالة ينفع أعوض فيها بأي قيمة لـ س و تطلع قيمة لـ ص يبقي دي دالة كثيرة حدود - مجالها = ح (ما لم يتم تحديد مجال لها في رأس السؤال)

أمثلة

1. د(س) = ٣ — كثيرة حدود — المجال = ح

2. د(س) = $س^٢$+س−٥ — كثيرة حدود — المجال = ح

3. د(س) = ٢س + ١ — س ≥ ١ — هنا المجال

كثير حدود

أقل من > -∞ في الاول
أكبر من < ∞ في الآخر
الاثنين فترة مفتوحة

المجال =]− ∞ ، ١] مقفول عشان فى علامة ≥ أو يساوى

٢) مجال الدالة الكسرية

9. د(س) = $\frac{٣}{س-٣}$

بص يا صديقي هنا مش هينفع نعوض بكل الأرقام

لي لان مينفش المقام = صفر نبقي المجال

المجال = ح − {أصفار المقام}

طيب أعرف القيم إلي بتخلي المقام = صفر إزي

هناخد المقام وأساوية بالصفر

س − ٣ = ٠

س = ٣ — المجال = ح − {٣}

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

اي حاجه / صفر ← غير معرفة

أمثلة

10 $د(س) = \frac{٥}{س^٢ - ١}$

الحل

$س^٢ - ١ = ٠$

$(س + ١)(س - ١) = ٠$

$س = -١$ | $س = ١$

المجال = $ح - \{-١ ، ١\}$

11 $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٢س}$

الحل

$س^٢ - ٢س = ٠$

$س(س - ٢) = ٠$

$س = ٠$ | $س = ٢$

المجال = $ح - \{٠ ، ٢\}$

12 $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$

الحل

$س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

$س = ٢$ | $س = ٣$

المجال = $ح - \{٢ ، ٣\}$

13 $د(س) = \frac{س - ١}{٢س^٢ - ٥س}$

الحل

$٢س^٢ - ٥س = ٠$

$س(٢س - ٥) = ٠$

$س = ٠$ | $٢س = ٥$ ، $س = \frac{٥}{٢}$

المجال = $ح - \{٠ ، \frac{٥}{٢}\}$

14 $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ + ٢٥}$

ملهاش أصفار مقام لان $س^٢$ دائما هتطلع عدد موجب وهنزود عليه عدد موجب

$س^٢$ + عدد (ليس له اصفار مقام)

المجال = ح

15 $د(س) = \frac{س - ٣}{٧}$

ثابت

يبقى مفيش أصفار مقام

المجال = ح

16 $د(س) = \frac{س - ٢}{س^٣ + ٢٧}$

$س^٣ + ٢٧ = ٠$

$س^٣ = -٢٧$

$س = -٣$

المجال = $ح - \{-٣\}$

الزتونه في المثالين دول

١. لما تلاقى فى المقام $س^٢$ + عدد

يبقى المجال = ع

٢. لما تلاقى المقام عدد يبقى

يبقى المجال = ع

17 $د(س) = \frac{س + ٣}{٣س^٢ - س - ٢}$

$$٣س^٢ - س - ٢ = ٠$$

يدوي

$٣س^٢ - س - ٢ = ٠$

$س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(س - \frac{٣}{٣})(س + \frac{٢}{٣}) = ٠$

مش بتقبل القسمة عليه

يبقي أطلعه جمب س

$(س - ١)(٣س + ٢) = ٠$

$س = ١$ ، $٣س = -٢$

$س = \frac{-٢}{٣}$

المجال = ع − $\{ \frac{-٢}{٣} ، ١ \}$

بالآلة

Mood ⟶ EQN ⟶ 3

$س_١ = ١$

$س_٢ = \frac{-٢}{٣}$

المجال = ع − $\{ \frac{-٢}{٣} ، ١ \}$

دالة الجذر النوني

لو الجذر دليلة عدد زوجي — الي تحت الجذر ≥ صفر

لو الجذر دليلة عدد فردي — المجال = ح علطول

أمثلة

18 د(س) = $\sqrt{س + ٢}$

الحل

س + ٢ ≥ ٠

س ≥ −٢

المجال = [−٢ ، ∞[

19 د(س) = $\sqrt{٥ - س}$

الحل

٥ − س ≥ ٠

−س ≥ −٥

س ≤ ٥

لو قسمت علي السالب بعكس اتجاه التباين

المجال =]−∞ ، ٥]

20 د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٢}$

الحل

المجال = ع

21 د(س) = $\sqrt{-٢س + ٣}$

الحل

−٢س + ٣ ≥ ٠

−٢س ≥ −٣

س ≤ $\frac{٣}{٢}$

المجال =]−∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

بحث اشارة - الدالة التربيعية

مثال 22

خطوات الحل يا صديقي

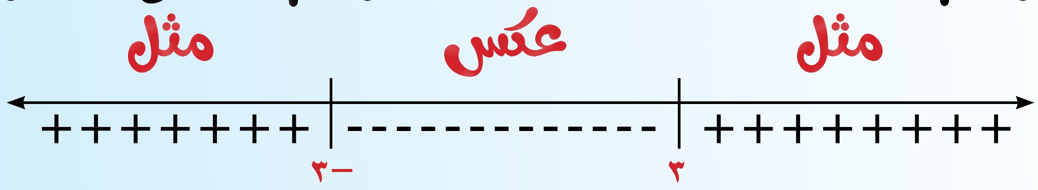
1 اساوي الدالة بصفر

س^{٢} −٩ = ٠

(س + ٣) (س − ٣) = ٠

س = −٣   س=٣

2 برسم خط الاعداد و أحط عليه الارقام وأوضح الاشارات



د(س) موجبة فقط عند ح − [−٣ ، ٣]

د(س) سالبة فقط عند] −٣ ، ٣ [

د(س) = ٠ {−٣ ، ٣}

طيب لو جيت أعمل مخطط سهمي

لو س^{٢} − ٩ > ٠ .

المجال : ح − [−٣ ، ٣]

لو س^{٢} −٩ ≥ ٠ .

المجال: ح −] −٣ ، ٣ [

لو س^{٢} − ٩ < ٠ .

المجال:] −٣ ، ٣ [

لو س^{٢} − ٩ ≤ ٠ .

المجال [−٣ ، ٣]

الزتونة يا صديقي

الاشارة	المجال
> ٠	ح − [٠]
≥ ٠	ح −] ٠ [
< ٠	] ٠ [
≤ ٠	[٠]

أمثلة

24 د(س) = $\sqrt{\text{س}^{2} - ٩}$

الحل

$\text{س}^{2} - ٩ \geq ٠$

$\text{س}^{2} - ٩ = ٠$

(س + ٣) (س − ٣) = ٠

س = −٣   س = ٣

المجال = ع −] −٣ ، ٣ [

25 د(س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^{2}}$

الحل

$٩ - \text{س}^{2} \geq ٠$ $\text{س}^{2} \leq ٩$ $\text{س}^{2} \leq ٩$

$\text{س}^{2} - ٩ = ٠$

(س + ٣) (س − ٣) = ٠

س = −٣   س = ٣

المجال = [−٣ ، ٣]

26 د(س) = $\sqrt{\text{س}^{2} - \text{س} - ٦}$

الحل

$\text{س}^{2} - \text{س} - ٦ \geq ٠$

(س − ٣) (س + ٢) = ٠

س = ٣   س = −٢

المجال = ع −] −٢ ، ٣ [

27 د(س) = $\sqrt{\text{س}^{2} + ٩}$

الحل

$\text{س}^{2} + ٩ \geq ٠$

س^{2} + عدد

إشارتها دائما موجبة

المجال = ع

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

د(س) = $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{عدد}}$ المجال = ع

28 د(س) = $\dfrac{١}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$

الحل

الجذر هنا جيه في المقام فمينفعش بيقي ≤ ٠ لأن مينفعش المقام = ٠ فهخليها > ٠ بس

س − ٥ > ٠

س > ٥

المجال =] ٥ ، ∞ [

29 $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt[٣]{\text{س} - ٥}}$

الحل

في العادي مجاله الجذر الي دليله فردي = ح بس لما جيه في المقام بقا مجاله = ح - { أصفار المقام }

$\text{س} - ٥ = ٠$

$\text{س} = ٥$

المجال = ع − { ٥ }

30 $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦}}$

الحل

$\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦ = ٠$

$(\text{س} - ٦) \quad (\text{س} + ١)$

$\text{س} = ٦ \quad \text{س} = -١$

المجال = ع − { −١ ، ٦ }

31 $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt{١٠ + ٣\text{س} - \text{س}^٢}}$

الحل

$١٠ + ٣\text{س} - \text{س}^٢ > ٠$

هنقسم على السالب عشان نظبط اشارة س²

$-١٠ - ٣\text{س} + \text{س}^٢ < ٠$

$\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠ = ٠$

$(\text{س} - ٥) \quad (\text{س} + ٢) = ٠$

$\text{س} = ٥ \quad \text{س} = -٢$

المجال =] −٢ ، ٥ [

32 $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$

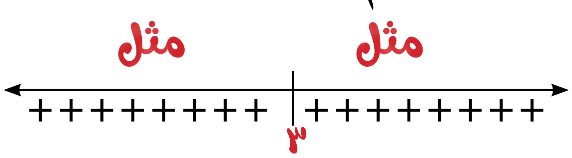
$\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩ \geq ٠$

$(\text{س} - ٣) \quad (\text{س} - ٣)$

$\text{س} = ٣ \quad \text{س} = ٣$

المجال = ع

طلعت رقم واحد فهنبحث الاشارة



د(س) موجبة فقط ع − {٣}

د(س) = ٠ عندما س = ٣

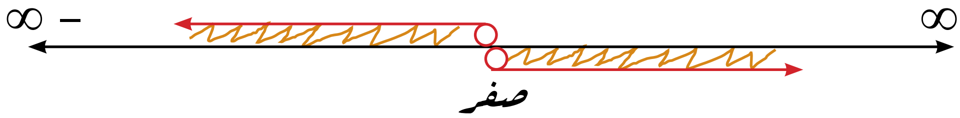
الزتونه يا صديقي

لو طلع حل واحد للدالة التربيعية

الاشارة	المجال
≤	ع
<	ع − { }

33 د(س) = { ٣ − س ، س > ٠ ؛ س − ٢ ، س < ٠

٣ − س	س > ٠	[− ∞ ، ٠]
س − ٢	س < ٠	[٠ ، ∞]



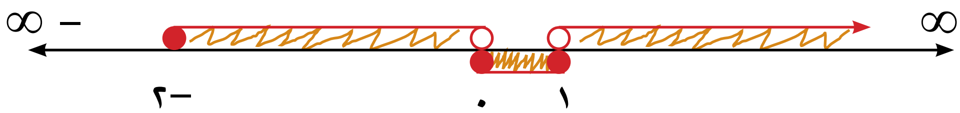
المجال = ع − {٠}

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

لو إداك ≤ أو ≥ يبقى الصفر مهانا   المجال = ع

34 د(س) =

س²	−٢ ≤ س > ٠	[−٢ ، ٠]
س	٠ ≥ س ≥ ١	] ٠ ، ١ [
$\frac{١}{س}$	س < ١	[١ ، ∞]



المجال = [−٢ ، ∞]

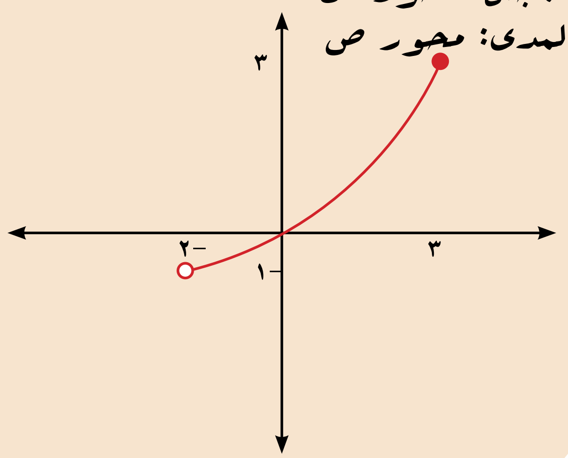
تحديد المجال و المدي بيانيًا :

مثال 35

بين مجال و مدي كل من الدالتين بالشكل الآتي

1

المجال: محور س
المدى: محور ص

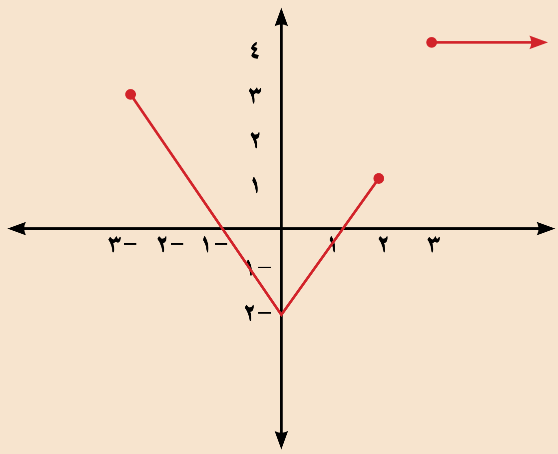


المجال=] −٢ ، ٣]

المدي ← أوطي نقطة و أعلي نقطة و اطلع علي محور الصادات

المدى =] −١ ، ٣]

2



المجال = [−٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞ [

= [−٣ ، ∞[−] ٢ ، ٣ [

لما نعمل - بعكس الفترة

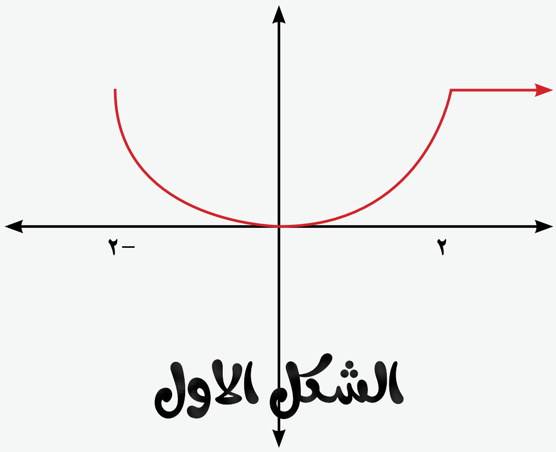
المدى = [−٢ ، ٣] ∪ { ٤ }

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

أي دالة ثابته مداها رقم واحد بس

مثال 36

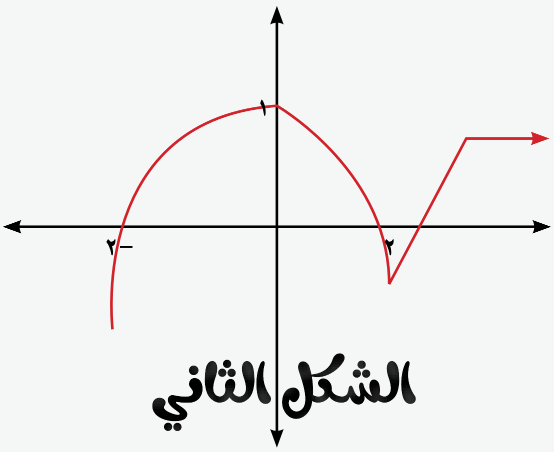
أوجد المجال والمدي في كلًا من الاشكال الآتية :



الشكل الاول

المجال = ع

المدى = [٠ ، ∞[



الشكل الثاني

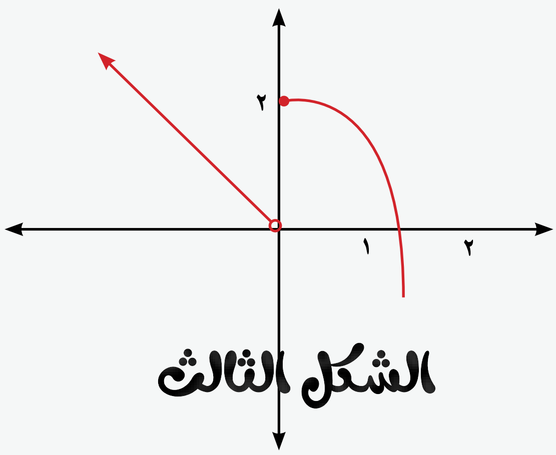
المجال = ع

المدى =]−∞ ، ١]

اطلع و انزل عند محور السينات

لو لمس الرسمه سواء من فوق

أو من تحت يبقي المجال = ح



الشكل الثالث

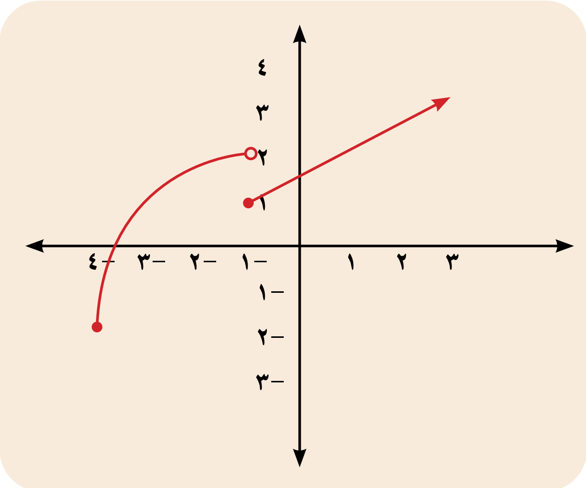
المجال = ع

المدى = ع

مثال 37

الشكل المقابل يمثل منحني الدالة د:-

فإن مجالها هو ....



أ) ع − { −٣ ، −١ }

ب) [−٤ ، −١]

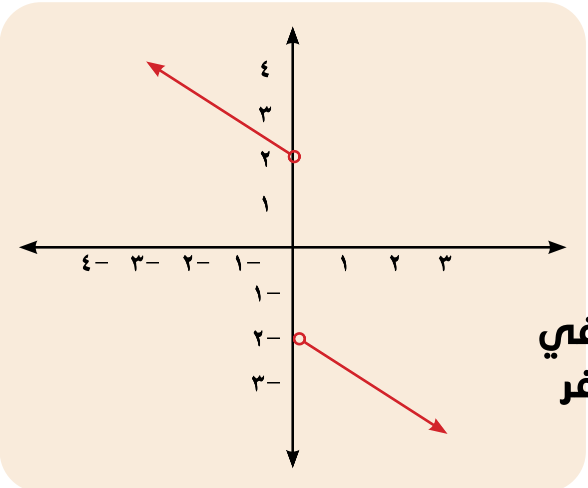
ج) [−٤ ، ∞]

د) [−٤ ، ∞] − { ١ }

مثال 38

الشكل المقابل يمثل الدالة في س

مجالها ......



أ) ع

ب) ع − [−٣ ، ٢]

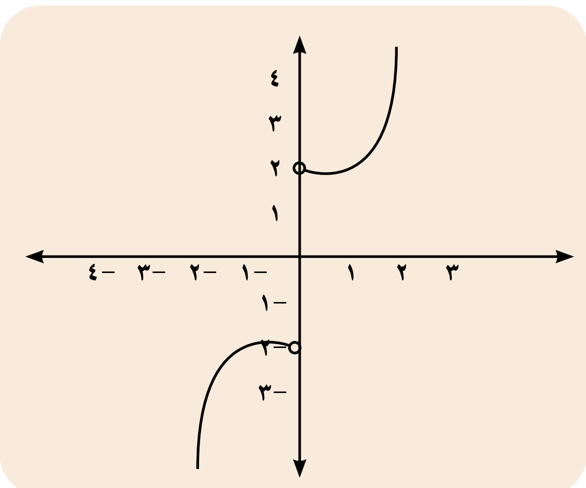
ج) ع −] −٣ ، ٣ [

د) ع − { ٠ }

مفتوح عند الصفر في
الاثنين يبقي الصفر
مش معانا

مثال 39

الشكل المقابل مدي الدالة هو ......



أ) ع − { ٠ }

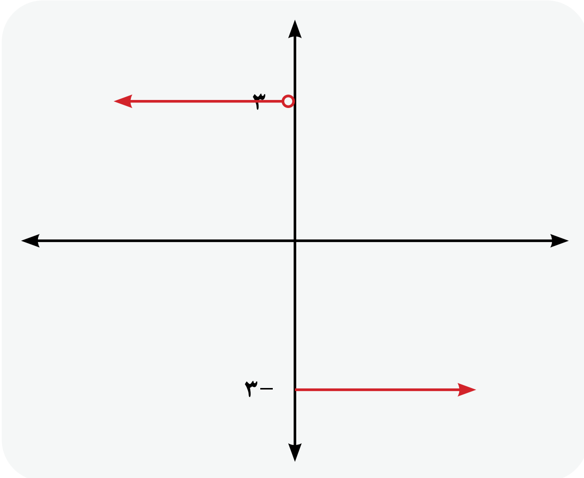
ب) ع −] −٣ ، ٢ [

ج) ع

د)] −٣ ، ٢ [

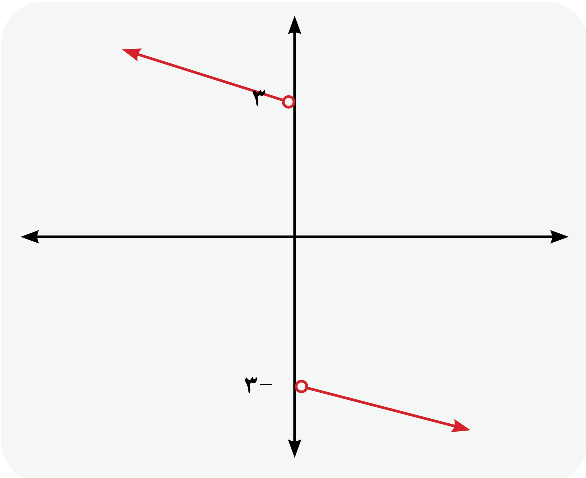
مثال 40

عين مجال ومدي كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية



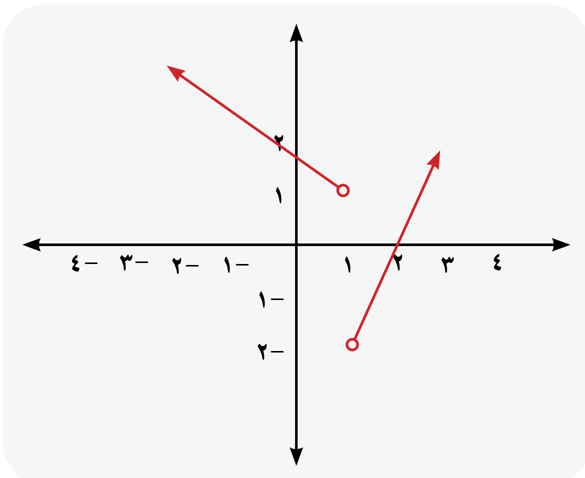
المجال = ع

المدى = { ٣ ، −٣ }



المجال = ع − { ٠ }

المدى = ع − [−٣ ، ٣]

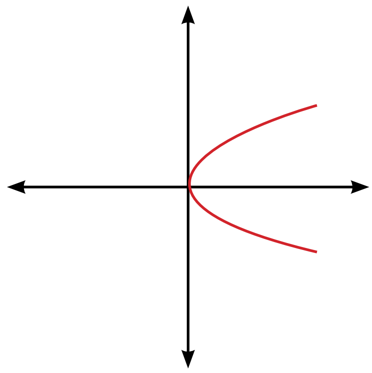


المجال = ع − {١}

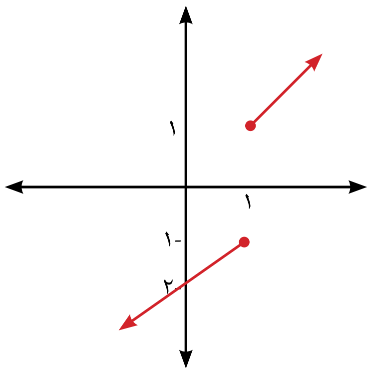
المدى =] −٢ ، ∞ [

مثال 41

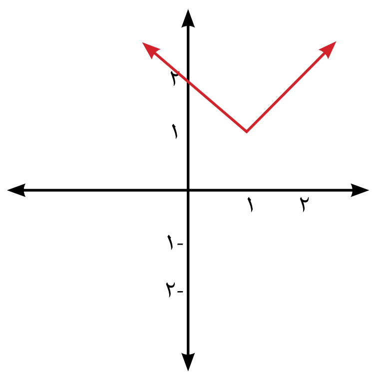
الشكل الذي يمثل دالة في كل من الأشكال الآتية هو ....



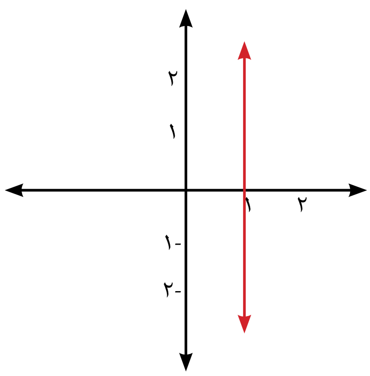
أ



ب



ج



د

هعمل اختبار الخط الرأسي يا صديقي

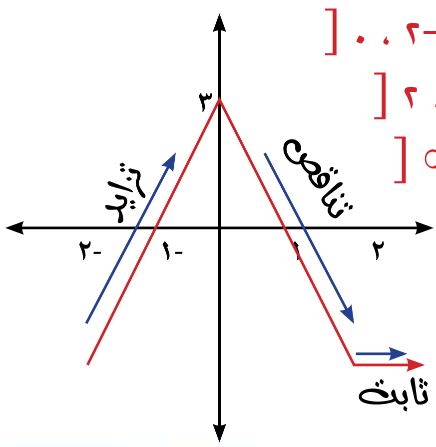
الاطراد

زى المجال بيجي من علي محور السينات

تزايدية] −٢ ، ٠ [

تناقصية] ٠ ، ٢ [

ثابتة] ٢ ، ∞ [



خطوات الحل يا صديقي

هقف علي الشمال خالص

هركب الموتسكل بتاعي

همشي علي الخط

لو طلع ← تزايد

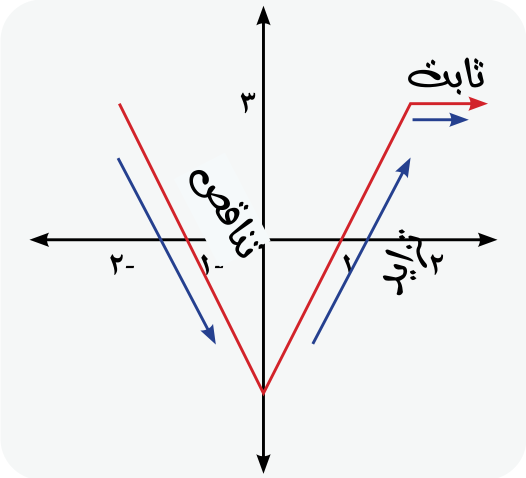
لو نزل ← تناقص

لو خط مستقيم ← ثابته

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

في الاطراد علي طول الفترة مفتوحة

مثال 42

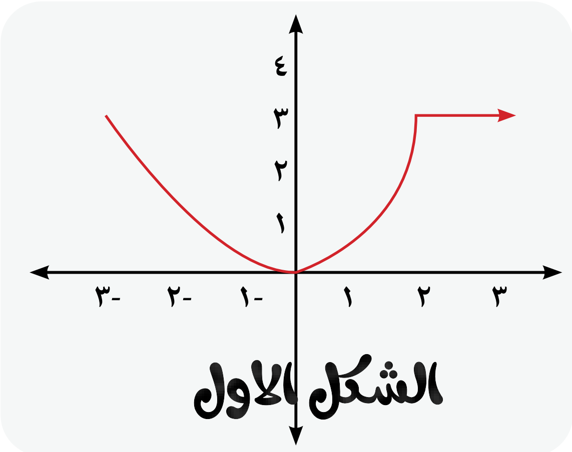


تناقصية] −٢ ، ٠ [

تزايدية] ٠ ، ٢ [

ثابته] ٢ ، ∞ [

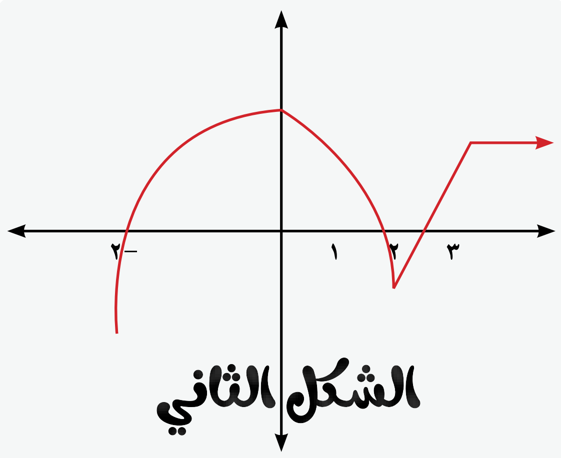
مثال 43



تزايدية] ٠ ، ٢ [

تناقصية] −∞ ، ٠ [

ثابتة] ٢ ، ∞ [



الشكل الثاني

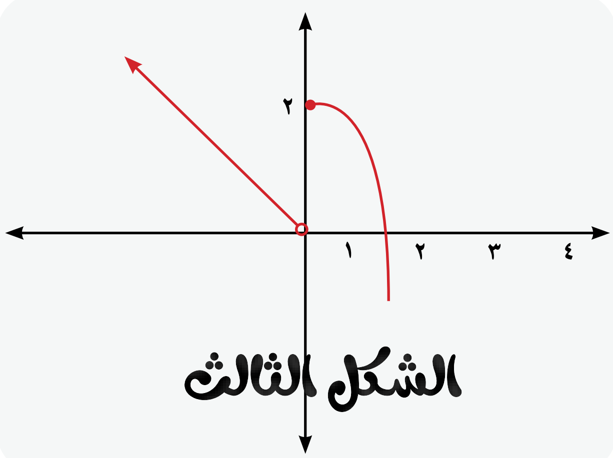
تزايدية] −∞ ، ٠ [،] ٢ ، ٣ [

تناقصية] ٠ ، ٢ [

ثابتة] ٣ ، ∞ [

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

في الاطراد مش بنعمل ∪ نعمل ،



الشكل الثالث

تناقصية] −∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [

العمليات علي الدوال

في الدرس دا بيديك دالتين أو ثلاثة ويقولك اجمعهم أو اطرحهم أو أضربهم او اقسمهم كل دا عادي الفكرة بقي في المجال

مثال 1

د(س) = س^٢ − س − ١٢ ومجالها [−٤ ، ٨]

ر(س) = س − ٤ و مجالها [−٧ ، ٤]

أوجد ١) (د + ر)(س)   ٢) (د − ر)(س)

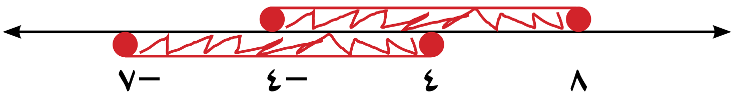
٣) (د×ر)(س)   ٤) (د/ر)(س)

٤) (ر/د)(س)

الفكرة كلها عندي في المجال زي قولنا عشان كدا هنبدأ بيه

١) هنجيب مجال د(س) ∩ مجال ر(س)

م١ ∩ م٢ = [−٤ ، ٤]



مجال (الجمع - الطرح - الضرب) = م١ ∩ م٢

مجال (القسمة) = م١ ∩ م٢ - { اصفار المقام }

مجال (د+ر)(س) = [−٤ ، ٤]

مجال (د−ر)(س) = [−٤ ، ٤]

مجال (د×ر)(س) = [−٤ ، ٤]

مجال (د/ر)(س) = [−٤ ، ٤[

س-٤ = ٠

س = ٤   ∴ المجال = [-٤ ، ٤] - {٤} (بما ان اصفار المقام طرف من طرفى الفترة بشيله وافتح الفترة)

= [-٤ ، ٤[

مجال (ر/د)(س) = [−٤ ، ٤[− {−٣}

س^٢ - س - ١٢ = ٠   (س-٤) (س+٣)

∴ المجال = [-٤ ، ٤] - {-٣ ،٤} = [-٤ ، ٤[- {-٣}

يلا نجيب الي طالبه الاول بقا

(د+ر) (س) = (س^٢ − س − ١٢) + (س−٤) = س^٢ − ١٦

(د−ر) (س) = (س^٢ − س − ١٢) − (س−٤)

= س^٢ − س − ١٢ − س + ٤ = س^٢ − ٢س − ٨

(د×ر) (س) = (س^٢ − س − ١٢) × (س−٤)

= س^٣ − ٤س^٢ − س^٢ + ٤س − ١٢س + ٤٨

= س^٣ − ٥س^٢ − ٨س + ٤٨

$$\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢}{\text{س}-٤} = \frac{(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٤)}}{\cancel{\text{س}-٤}} = \text{س}+٣$$

$$\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}-٤}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢} = \frac{\cancel{\text{س}-٤}}{(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٤)}} = \frac{١}{\text{س}+٣}$$

مثال 2

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١} \qquad \text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س}+١}{\text{س}-٢}$$

أوجد ١) (د + ر) (س)   ٢) (د−ر) (س)

٣) ($\frac{\text{د}}{\text{ر}}$) (س)

س + ١ =٠   س − ٢ =٠

س = −١   س = ٢

مجال د(س) = ع − { −١ } = م$_١$ مجال ر(س) = ع − {٢}

م$_١$ ∩ م$_٢$ = ع − { −١ ، ٢ }

مجال (د+ر) (س) = ع − { −١ ، ٢ }

مجال (د×ر) (س) = ع − { −١ ، ٢ }   **هو كدا كدا طالع مش هطلعه تاني**

مجال ($\frac{\text{د}}{\text{ر}}$) (س) = ع − { −١ ، ٢ } − { −١ } = ع − { −١ ، ٢ }

$$\frac{\text{س}+١}{\text{س}-٢} \longleftarrow \text{س} + ١ = ٠ \longleftarrow \text{س} = -١$$

لما ناخد دالة كسرية تساويها بالصفر كإنك أخد البسط = ٠

١. $(د+ر)(س) = \frac{س+١}{س-٢} + \frac{س}{س+١} = \frac{س(س-٢) + (س+١)(س+١)}{(س+١)(س-٢)}$

$= \frac{س^٢ - ٢س + (س+١)^٢}{(س+١)(س-٢)}$

$= \frac{س^٢ - ٢س + س^٢ + ٢س + ١}{(س+١)(س-٢)} = \frac{٢س^٢ + ١}{(س+١)(س-٢)}$

٢. $(د \times ر)(س) = \frac{\cancel{س+١}}{س-٢} \times \frac{س}{\cancel{س+١}} = \frac{س}{س-٢}$

٣. $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{س}{س+١} \div \frac{س+١}{س-٢}$

$= \frac{س}{س+١} \times \frac{س-٢}{س+١} = \frac{س^٢ - ٢س}{(س+١)^٢}$

$= \frac{س(س-٢)}{(س+١)^٢}$

$(د+ر)(٣) =$ بالتعويض فى ١

$\frac{٢ \times ٣^٢ + ١}{(٣+١)(٣-٢)} = \frac{٢ \times ٩ + ١}{٤ \times ١} = \frac{١٩}{٤}$

$(د \times ر)(٣) =$ بالتعويض فى ٢

$\frac{٣}{٣-٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

طب لو كان عايز (د×ر)(٢)

هقوله إنها غير معرفه لا مجالها ∌ للدالة

مثال 3

$د_١(س) = \sqrt{س - ٢}$ ، $د_٢(س) = \sqrt{٥ - س}$

أوجد ١) $(د_١ + د_٢)(س)$ ٢) $(د_١ \times د_٢)(س)$

مجال $د_١(س) = [٢ ، \infty[$

$س - ٢ \geq ٠$

$س \geq ٢$

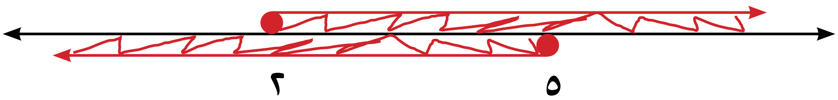
مجال $د_٢(س) =]-\infty ، ٥]$

$٥ - س \geq ٠$

$-س \geq -٥$

$س \leq ٥$

$م_١ \cap م_٢ = [٢ ، ٥]$



مجال $(د_١ + د_٢)(س) = [٢ ، ٥]$

مجال $(د_١ \times د_٢)(س) = [٢ ، ٥]$

١. $(د_١ + د_٢)(س) = \sqrt{س - ٢} + \sqrt{٥ - س}$

٢. $(د_١ \times د_٢)(س) = \sqrt{س - ٢} \times \sqrt{٥ - س} = \sqrt{(س - ٢) \times (٥ - س)}$

$= \sqrt{٥س - س^٢ - ١٠ + ٢س}$

$= \sqrt{-س^٢ + ٧س - ١٠}$

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

في الضرب و القسمة ممكن أخد جذر واحد علي الكل

$\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$

$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$

$\sqrt{س} + \sqrt{ص} \neq \sqrt{س + ص}$

مثال 4

$د_1$ (س) = $\sqrt{٥-س}$ $ر_1$ (س) = س − ٣

أوجد ١) ($\frac{د}{ر}$) (س)   ٢) ($\frac{د}{ر}$) (٣)

مجال $د_1$ (س) =] −∞ ، ٥]

٥ − س ≤ ٠

−س ≤ −٥

س ≥ ٥

مجال ر (س) = ع

دالة كثيرة حدود

$م_1$ ∩ $م_2$ = =] −∞ ، ٥]

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

ع ∩ أي فترة = الفترة

مجال ($\frac{د}{ر}$) (س) =] −∞ ، ٥] − { ٣ }

س − ٣ = ٠

س = ٣

١. ($\frac{د}{ر}$) (س) = $\frac{\sqrt{٥-س}}{س-٣}$

٢. ($\frac{د}{ر}$) (٣) غير معرفة لأن ٣ ∌ للمجال

اختر:-

1 مجال الدالة د: د(س) = $\sqrt{س-٢}$ − $\sqrt{٧-س}$ هو ....

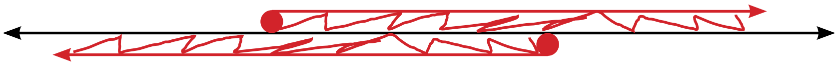
(أ) [٢ ، ٧]

(ب)] ٢ ، ٧ [

(ج) ع − [٢ ، ٧]

(د) ع −] ٢ ، ٧ [

طرح م = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ٧]



٢   ٧

م١ = [٢ ، ∞[

س − ٢ ≥ ٠

س ≥ ٢

م٢ =]−∞ ، ٧]

٧ − س ≥ ٠

−س ≥ ٧

س ≤ ٧

2 مجال الدالة د: د(س) = $\sqrt{س-١}$ + $\sqrt{س+٢}$ هو ....

أ [−٢ ، ∞[

ب [١ ، ∞[

جـ]١ ، ∞[

د [−٢ ، ∞[

الحل

جمع م = م١ ∩ م٢ = [١ ، ∞[

−٢   ١

2 مجال الدالة د: د(س) = $\sqrt{س+٢}$ + $\sqrt{٣-س}$ هو ....

أ ع

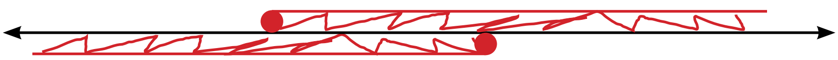
ب ع − [−٢ ، ٣]

جـ [−٢ ، ٣]

د]−٢ ، ٣[

الحل

جمع م = م١ ∩ م٢ = [−٢ ، ٣]



−٢   ٣

م١ = [−٢ ، ∞[

س + ٢ ≥ ٠

س ≥ −٢

م٢ =]−∞ ، ٣]

٣ − س ≥ ٠

−س ≥ −٣

س ≤ ٣

4 مجال الدالة د: د(س) = $\sqrt{س-٤} \times \sqrt[3]{س-٢}$ هو ....

(أ)] ٤ ، ∞]

(ب)] ٢ ، ∞]

(حـ) ع

(ء) [٢ ، ∞ [

الحل

ضرب م = م١ ∩ م٢ = [٤ ، ∞ [

م١ = [٤ ، ∞ [م٢ = ع

س − ٤ ≥ ٠

س ≥ ٤

5 إذا كان ع ← ع حيث د(س) = $س^٢$ − س ، ر ← ع حيث ر(س) = ٣س−٢ فإن (د×ر − ٦ر) (٢) = ...

(أ) ٢٤

(ب) ٤٠

(حـ) ١٦

(ء) −١٦

بص يا صديقي

طلامة مفيش ولا اختيار فيه كلمة غير معرف يبقي الرقم دا أكيد معانا في المجال فإنت مش محتاج نجيب المجال هنا عوض علطول

(د) × (ر−٦ر) (س) = ($س^٢$ − س) (٣س −٢) − ٦(٣س − ٢)

= ($س^٢$ −س) (٣س −٢) − ١٨ س + ١٢

(د) × (ر−٦ر)(٢) = ($٢^٢$ − ٢) (٢×٣ − ٢) − ١٨ × ٢ + ١٢

= (٤ − ٢) (٦ − ٢) − ٣٦ + ١٢

= ٢ × ٤ − ٣٦ + ١٢ = ٨ − ٣٦ + ١٢ = −١٦

6 إذا كان د: $ع^+$ ← ع حيث د(س) = س − ٥ ، ر= [−١ ، ٥] ← ع

حيث ر(س) = س−٢ فإن ($\frac{د}{ر}$) (١) = ...

(أ) ١

(ب) ٢

(ج) ٤

(د) ٨

$م_١$ = $ع^+$ =] ٠ ، ∞ [

$م_٢$ = [−١ ، ٥]

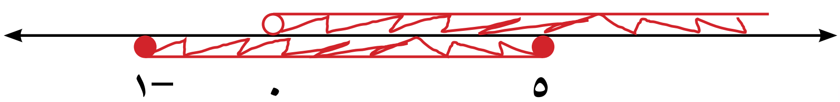
$م_١$ ∩ $م_٢$ =] ٠ ، ٥]

م = $م_١$ ∩ $م_٢$ − { اصفار المقام } =] ٠ ، ٥] − {٢}

قسمة يبقا ١ معانا

$\frac{د}{ر}$ س−٢=٠

س=٢



∴ ($\frac{د}{ر}$) (١) = $\frac{س−٥}{س−٢}$

= $\frac{١ − ٥}{١ − ٢}$

= $\frac{−٤}{−١}$ = ٤

تركيب دالتين

مثال 1

د(س) = $س^{٢}$ + ٣

ر(س) = س − ٥

أوجد ١) (د ∘ ر)(س)　　　٢) (ر ∘ د)(س)

خطوات الحل يا صديقي

١. هسمي الثانية (بطيخة)

٢. اروح علي الاولي وأشيل كل (س) وأحط مكانها (البطيخة)

١. (د ∘ ر)(س)

(س − ٥) بطيخة

$س^{٢}$ + ٣　　(بطيخة $)^{٢}$ + ٣ = (س−٥ $)^{٢}$ + ٣

هشيل س و احط مكانها البطيخة　= $س^{٢}$ − ١٠س + ٢٥ + ٣

= $س^{٢}$ − ١٠ س + ٢٨

٢. (ر ∘ د)(س)

($س^{٢}$ + ٣) بطيخة

س − ٥　　(بطيخة) − ٥ = ($س^{٢}$ + ٣) − ٥ = $س^{٢}$ −٢

مثال 2

د(س) = ٢س +١

ر(س) = س^{٢} − ٣

أوجد ١) (د $\circ$ ر)(س)   ٢) ر(د(س)) = (ر $\circ$ د)(س)

١)

س^{٢} − ٣

٢س + ١

٢(س^{٢} −٣) +١

٢س^{٢} − ٦ + ١ = ٢س^{٢} −٥

(د $\circ$ ر)(س) = ٢س^{٢} −٥

٢)

٢س + ١

س^{٢} − ٣

(٢س + ١)^{٢} − ٣

٤س^{٢} + ٤س + ١ − ٣ = ٤س^{٢} + ٤س − ٢

(ر $\circ$ د)(س) = ٤س٢ + ٤س − ٢

مثال 3

د(س) = س^{٣} ر(س) = س + ١

أوجد: ١) (د $\circ$ ر)(١)   ٢) (د $\circ$ د)(−١)   ٣) (ر $\circ$ ر)(−١)

١. (د $\circ$ ر)(١)

هنا عندى طرفين للحل

(د $\circ$ ر)(١)

(س+١) بطيخة

س^{٣}

(د $\circ$ ر)(س) = (س + ١)^{٣}

(د $\circ$ ر)(١) = (١ + ١)^{٣} = ٢^{٣} = ٨

من غير ما أجيب (د $\circ$ ر)(س) هناخد ١ و أعوض به فى الثانية والناتج إلى يطلع أعوض بيه فى الاول

ر(١) = ١ + ١ = ٢

د(٢) = ٢^{٣} = ٨

٢. (د $\circ$ د)(−١)

١) (د $\circ$ د)(س)

س^{٣} بطيخة

س^{٣}

(د $\circ$ د)(س) = (س^{٣})^{٣} = س^{٩}

(د $\circ$ د)(−١) = (−١)^{٩} = −١

٢) د(−١) = (−١)^{٣} = −١

د(−١) = (−١)^{٣} = −١

٣. (ر $\circ$ ر)(−١)

١) س+١ بطيخة

س+١

(ر $\circ$ ر)(س) = (س+١) + ١ = س+٢

(ر $\circ$ ر)(−١) = −١ + ٢ = ١

٢) ر(−١) = −١ + ١ = ٠

ر(٠) = ٠ + ١ = ١

مثال 4

د(س) = ٥س − ٢

ر(س) = { س + ١ ، س > ٣
　　　　{ ٢س ، س < ٢

أوجد ١) (د ₒ ر)(٤)　　　٢) (ر ₒ د)(١)

١. (د ₒ ر)(٤)

١) ٤ > ٣

يعني هنشتغل بالدالة ر(س) = س + ١

(د ₒ ر)(س) = ٥ (س + ١) − ٢ = ٥س + ٥ −٢ = ٥س +٣

س+١ بطيخة

٥س −٢

(د ₒ ر)(٤) = ٥ × ٤ + ٣ = ٢٠ + ٣ = ٢٣

٢) ر(٤) = س + ١　　　　　د(٥) = ٥س − ٢

= ٤ + ١ = ٥　　　　　　= ٢٥ − ٢ = ٢٣

١. (ر ₒ د)(١)

١) ١ < ٣ ← ٢س

(ر ₒ د)(س) = ٢(٥س − ٢) = ١٠س − ٤

٥س−٢ بطيخة

٢س

(ر ₒ د)(١) = ١٠ × ١ − ٤ = ٦

٢) د(١) = ٥ × ١ − ٢ = ٣

ر(٣) = ٣ × ٢ = ٦

مثال 5

د(س) = س^{٢} +٦

ر(س) = ٣س

أوجد قيم س التى تجعل (د ∘ ر) (س) = ٤٢

الحل

(د ∘ ر) (س) = (٣س)^{٢} + ٦ = ٩س^{٢} + ٦

٣س بطيخة

س^{٢} + ٦

(د ∘ ر) (س) = ٤٢

٩س^{٢} + ٦ = ٤٢

٩س^{٢} = ٤٢ − ٦

٩س^{٢} = ٣٦ ⟵ س^{٢} = $\frac{٣٦}{٩}$ = ٤ ⟵ س = ± ٢

مثال 6

د(س) = ٢س + ١

(د ∘ ر) (س) = س^{٢} + س −١

اوجد ر(س)

عكس السؤال يا صديقي

هنا بلجأ للفظ الثاني (د ∘ ر) (س) = د(ر(س))

د(ر(س)) = س^{٢} + س −١

٢ر(س) + ١ = س^{٢} + س −١

٢ر(س) = س^{٢} + س −١ − ١

٢ر(س) = س^{٢} + س −٢

ر(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س −١

خد بقى الملحوظه دى يا صديقى

د(س) = ٢س + ١

د(٥) = ٢ × ٥ + ١

د(٧) = ٢ × ٧ + ١

د(بطيخة) = ٢ × بطيخة + ١

د(ر(س)) = ٢ × ر(س) +١

خد بقى الملحوظة دى يا صديقى

مجال دالة التركيب = مجال الثانية ∩ مجال التركيب

مثال 7

د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، ر(س) = س٢

أوجد مجال (د $\circ$ ر) (س)

مجال ر(س) ← ع

(د $\circ$ ر) (س) = $\frac{١}{(س٢) - ١}$ = $\frac{١}{س٢ - ١}$

مجال التركيب = ع - { أصفار المقام }

س٢ - ١ = ٠

س٢ = ١ م التركيب = ع - {-١ ، ١}

س = ± ١

∴ المجال النهائى = ع ∩ ع - { -١ ، ١ } = ع - {-١ ، ١ }

مثال 8

د(س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ، ر(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$

أوجد مجال (د $\circ$ ر) (س)

مجال ر(س) = ع - {-٢}

س + ٢ = ٠

س = -٢

(د $\circ$ ر) (س) = $\frac{٣}{(\frac{٤}{س + ٢}) - ٤}$

$\frac{٤}{س + ٢}$ - ٤ = ٠

$\frac{٤}{س + ٢}$ = ٤ ٤س + ٨ = ٤

٤س = -٤

س = -١

مجال التركيب = ع - {-١}

∴ المجال النهائى = ع - { -٢ ، -١ }

مثال 9

د(س) = √(س−١)   ر(س) = س² −٣

اوجد ١) مجال (د ∘ ر)(س)   ٢) (د ∘ ر)(٢)

(د ∘ ر)(س)

س² − ٣ بطيخة   = √((س² −٣) − ١) = √(س² − ٤)

√(س − ١)

١. مجال (د ∘ ر)(س) = ع ∩ ع −]−٢ ، ٢[= ع −]−٢ ، ٢[

م ر(س) = ع

م التركيب = ع −]−٢ ، ٢[

س² − ٤ ≥ ٠

(س − ٢)(س+٢) ≥ ٠

من الجدول المحفوظ في الدرس الاول

ع − [،   ]

٢. (د ∘ ر)(٢) = √(٢² − ٤) = √(٤ − ٤) = √٠ = ٠

٢ مفتوحة في الفترة يعني معانا

ليه لان ح - ينعكس إلي بعدها

مثال 10

د(س) = √(س+٢)   ر(س) = √(٦ − س)

اوجد ١) مجال (د ∘ ر)(س)

مجال ر(س) =]−∞ ، ٦]

٦ − س ≥ ٠

−س ≥ −٦

س ≤ ٦

١. مجال (د ∘ ر)(س) = √(√(٦ − س) + ٢)

مجال (د ∘ ر)(س) =]−∞ ، ٦] ∩]−∞ ، ٢]

=]−∞ ، ٢]

√(٦ − س) + ٢ ≥ ٠   √(٦ − س) ≥ −٢

٦ − س ≥ ٤

−س ≥ −٢

س ≤ ٢   مجال التركيب =]−∞ ، ٢]

مقدمة في النهايات:

١. **الكمية المعينة:** هي الكمية التي لها ناتج محدد

⇐ زي $\frac{٥}{٧}$ ، ٥

٢. **الكمية غير المعينة:** هي كمية ليس لها ناتج محدد (٧ كميات)

⇐ زي $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

٣. **الكمية غير المعرفة:** هي الكمية التي ليس لها معنى

⇐ تكون على شكل $\left(\frac{أ}{صفر} : أ \in ح - \{٠\}\right)$

⇐ زي $\frac{٥}{٠}$ ، $\frac{٢}{٠}$ ، $\frac{٣}{٠}$

٤. **الصور غير المعينة سبع هي:**

⇐ $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times صفر$ ، $(صفر)^{صفر}$ ، $(\infty)^{صفر}$ ، $(١)^{\infty}$

مفهوم النهاية عند نقطة :

بص يا صديقي في الأول كدا عشان نعرف إن دي نهاية أصلا ولا لا هيديلك مسألة ويقولك أوجد النهاية عند س هنعوض بقيمة س في الدالة اللى في النهاية عندي لو طلع الناتج $\left(\frac{صفر}{صفر}\right)$ بعرف إن المسألة دي نهايات.

مثـــال ١

$د(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ عند $س = ١$

١. عوض ← $د(س) = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ ← نهايات

٢. بعوض بأى رقم قبل ١ علطول ← $د(٠,٩) = \frac{(٠,٩)^٢ - ١}{٠,٩٠ - ١} \simeq ١,٩$

٣. عوض بأي رقم بعد ١ علطول ← $د(١,١) = \frac{(١,١)^٢ - ١}{(١,١) - ١} = ٢,١$

هتلاقي الرقمين قريبين عندي من ٢ $\therefore$ نهـا د(س) = ٢

طيب أنا كل مرة هقعد أعمل كدا يا صديقي لا طبعا عندي طريقتين للحل:

١. بيانيا.   ٢.جبريا.

تعالى ناخد نبذة عن الجبري عشان بس نفهم الدنيا ماشية ازاي وبعد كدا ندخل على البياني:

مثال ٢

$$\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$$

١. عوض ← $\frac{١-١}{١-١} = \frac{صفر}{صفر}$ ← ✓ نهايات

٢. بسط ← $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{(س+١)\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}} = س + ١$

٣. عوض ← $\lim_{س \leftarrow ١} س + ١ = ١ + ١ = ٢$

يلا بينا على البياني يا صديقي:

مثال ٣ أوجد

د(١) = غير معرف ← بروح عند الواحد

لو مفتوح يبقى غير معرفة.

لو مقفول بنكتب ص عنده بكام؟؟

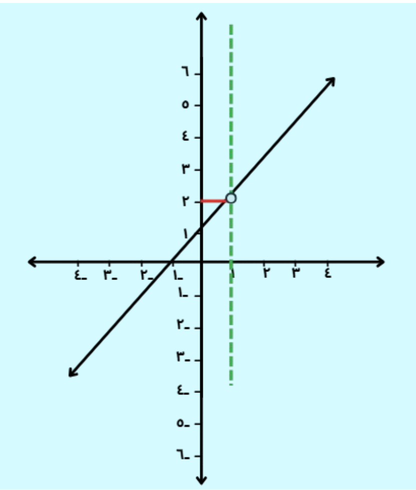
$\lim_{س \leftarrow ١^+} د(س) = د(١^+) = ٢$

نعمل خط رأسي عند ١

لو عايز + بنمشي من أي حتة على اليمين لحد مخبط في الخط الرأسي و أروح للصادات أشوفها بكام يبقى دا الناتج.

$\lim_{س \leftarrow ١^-} د(س) = د(١^-) = ٢$

ولو عايز – نفس الحاجة بس من الشمال.

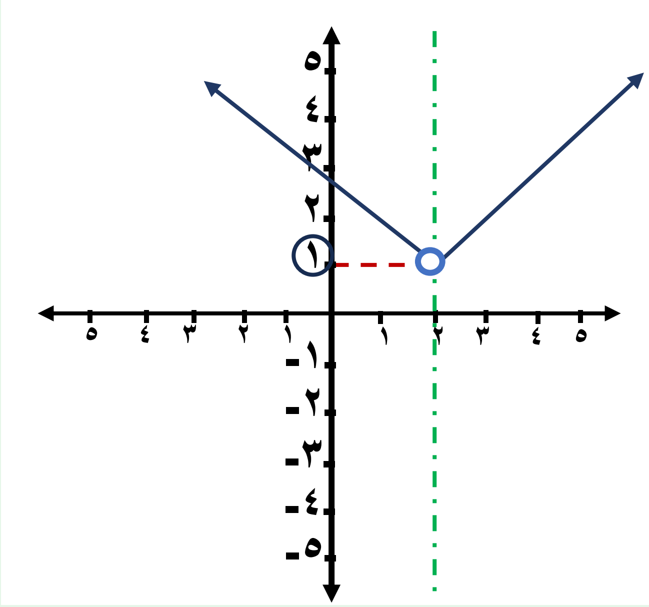


لـو $د(١^+) = د(١^-)$ ← يبقى الناتج زيهم.

لـو $د(١^+) \neq د(١^-)$ ← غير موجودة.

$\because د(١^+) = د(١^-)$ $\therefore \lim_{س \leftarrow ١} د(س) = ٢$

مثـــال ٣ أوجد



١) د(٢) = غير معرف

٢) د(٢ $^+$) = ١

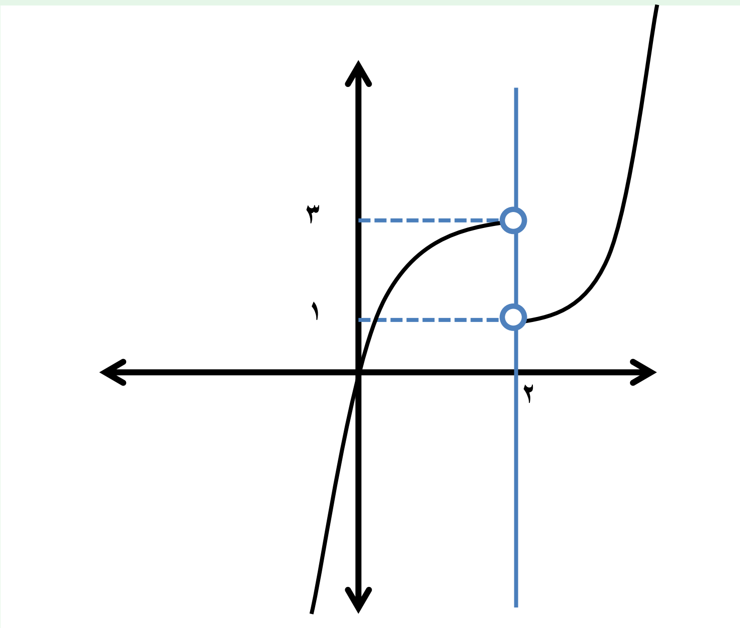
٣) د(٢ $^-$) = ١

٤) نهـــا د(س) = ١ (س←٢)

مثـــال ٤

. ادرس كلاً من الاشكال الآتية التى تمثل منحنى الداله د(س) ثم أوجد قيمة :

١) د(٢) ٢) نهـــا د(س) (س←٢ $^+$) ٣) نهـــا د(س) (س←٢ $^-$) ٤) نهـــا د(س) (س←٢)

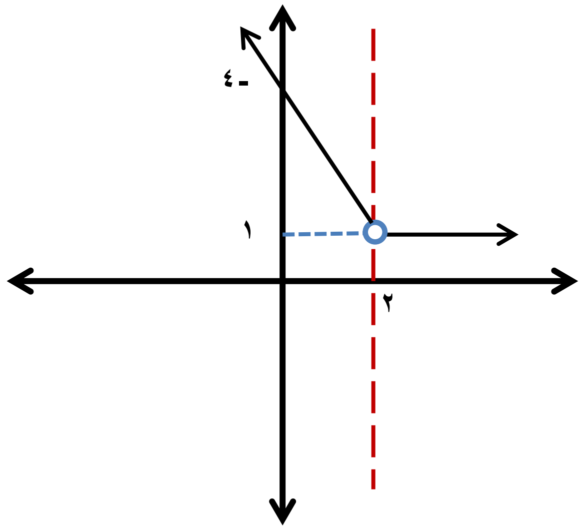


١) د(٢) = غير معرف

٢) نهـــا د(س) = ١ (س←٢ $^+$)

٣) نهـــا د(س) = ٣ (س←٢ $^-$)

٤) نهـــا د(س) = غير موجودة (س←٢)

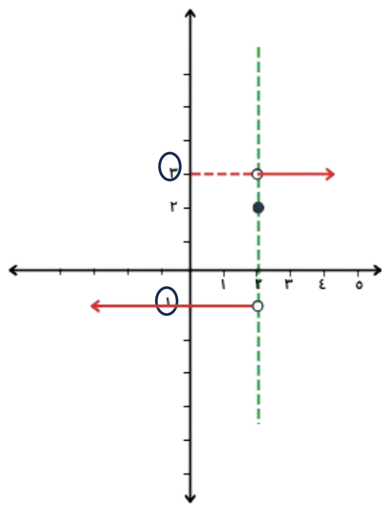


١) د(٢) = غير معرفة

٢) نهـا$_{س\to ٢^{+}}$ د(س) = ١

٣) نهـا$_{س\to ٢^{-}}$ د(س) = ١

٤) نهـا$_{س\to ٢}$ د(س) = ١



١) د(٢) = ٢

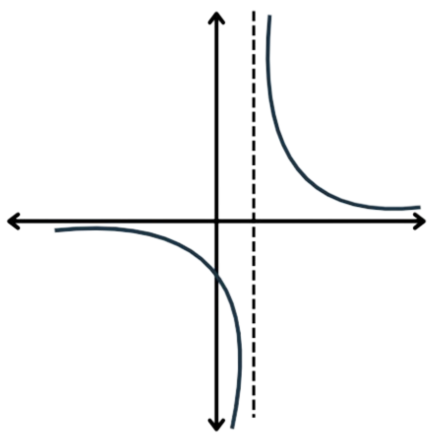
٢) نهـا$_{س\to ٢^{+}}$ د(س) = ٣

٣) نهـا$_{س\to ٢^{-}}$ د(س) = −١

٤) نهـا$_{س\to ٢}$ د(س) = غير موجودة

مثـــال ٥

أوجد نهـا د(س) في كلا من الأشكال الآتية:

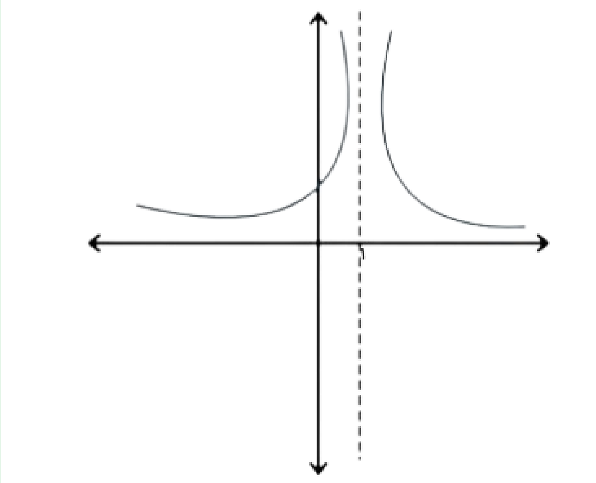


١) د(١^{+}) = ∞

٢) د(١^{-}) = $-\infty$

٣) نهـا$_{س\to ١}$ د(س) = غير موجودة

عشان ماشيين مش بيتفقوا وفنفس الوقت مش بيعدوا الخط الرأسي خالص



١) د(١$^{+}$) = ∞

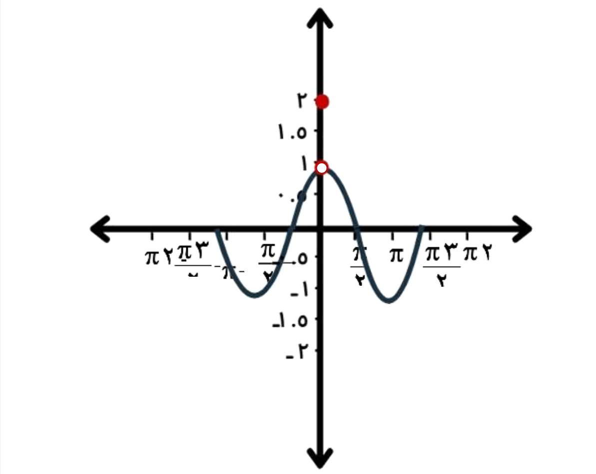
٢) د(١$^{-}$) = ∞

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ∞

مثـــال ٦

أدرس كلا من الأشكال الآتية ثم أوجد في كل شكل قيمة:

١) د (٠)　　٢) د(٠$^{+}$)　　٣) د(٠$^{-}$)　　٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

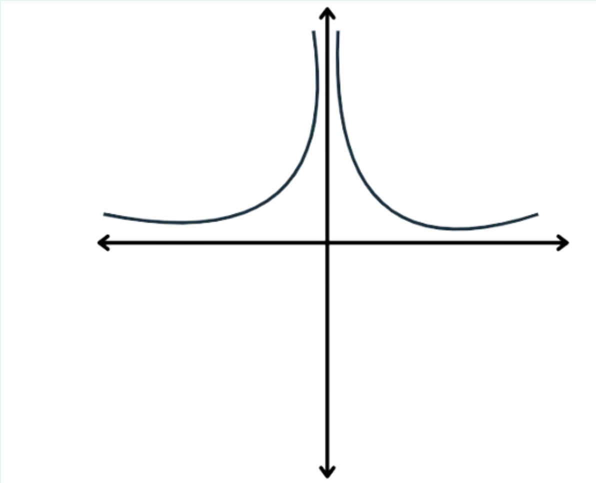


١) د(٠) = ٢

٢) د(٠$^{+}$) = ١

٣) د(٠$^{-}$) = ١

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١

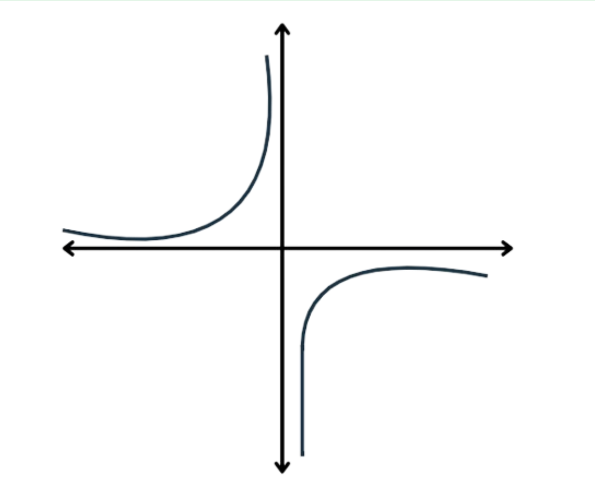


١) د(٠) = غير معرفة

٢) د(٠$^{+}$) = ∞

٣) د(٠$^{-}$) = ∞

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س) = ∞



١) د(٠) = غير موجودة

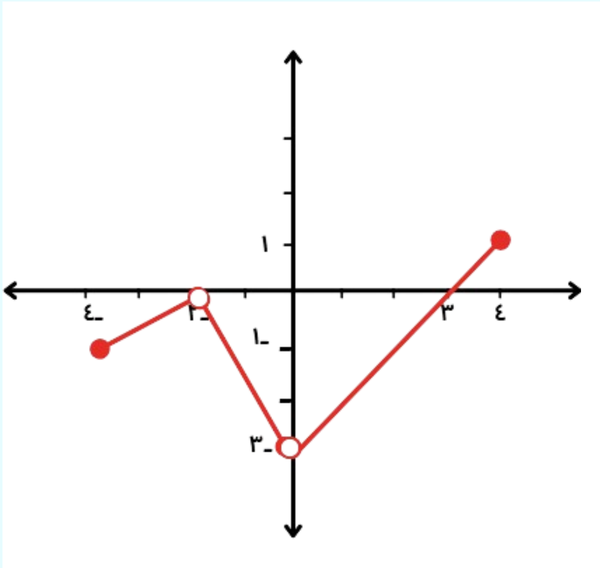
٢) د(0^+) = $-\infty$

٣) د(0^-) = ∞

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س) = غير موجودة

مثـــــال 7

من الشكل البيانى المقابل:



أولا: $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ...

أ) صفر
ب) -٣
جـ) -٢
د) غير موجودة

الإجابة:

د(-2^+) = صفر

د(-2^-) = صفر

$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) = صفر

ثانيا: $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ...

أ) صفر
ب) -٢
جـ) -٣
د) غير موجودة.

الإجابة:

د(0^+) = -3 د(0^-) = -3 ∴ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س) = -3

ثالثا: $\lim_{س \to -٤}$ د(س) = ...

أ) صفر　　ب) -٤　　جـ) -١　　د) غير موجودة.

(يوجد نهاية يمنى ولا يوجد نهاية يسرى إذا النهاية غير موجودة)

رابعا: $\lim_{س \to ٤}$ د(س) = ...

أ) صفر　　ب) ٤　　جـ) ١　　د) غير موجودة.

(يوجد نهاية يسرى وا يوجد نهاية يمنى)

التحليل:

١. الفرق بين مربعين:

⇐ $ا^٢ - ب^٢ = (ا + ب)(ا - ب)$

$س^٢ - ١٦ = (س + ٤)(س - ٤)$

٢. مجموع المكعبين:

⇐ $ا^٣ + ب^٣ = (ا + ب)(ا^٢ - اب + ب^٢)$

٣. الفرق بين مكعبين:

⇐ $ا^٣ - ب^٣ = (ا - ب)(ا^٢ + اب + ب^٢)$

⇐ $س^٣ + ٨ = (س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)$

⇐ $س^٣ + ٢٧ = (س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)$

٤. المقدار الثلاثي

١. علي صورة س^{٢} + ب س + جـ

س^{٢} + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)

عددين ضربهم ١٢ ، مجموعهم ٧

اشارة الأخير موجب ، يبقى الاتنين زي اللى في النص

س^{٢} − ٣س − ١٠ = (س − ٥)(س + ٢)

عددين ضربهم ١٠ طرحهم ٣

اشارة الأخير سالب ، الكبير زي اللى في النص والتاني عكسه

٥. المقدار الثلاثي

٢. على صورة اس^{٢} + ب س + جـ

٣س^{٢} + ١٣س + ١٢

هنضرب معامل س^{٢} اللى هوا ٣ في الحد المطلق اللى هوا ١٢ وبعدها نحلل المقدار الجديد

⟸ س^{٢} + ١٣س + ٣٦

(س + $\frac{٤}{٣}$)(س + $\frac{٩}{٣}$)

نقسم ناتج التحليل على معامل س^{٢}.

ولو مش بيقبل طلعه اضربه في س

(٣س + ٤)(س + ٣)

محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة:

تعين القوة: القوة هي متجه يتميز بأنه يمر بنقطة محددة أي أنه يعمل في خط مستقيم.

⇐ **القوة تتعين تماماً بمعرفة:**

١. مقدار القوة   **٢. إتجاه القوة**   **٣. نقطة تأثير القوة**

⇐ **وحدات قياس القوة:**

يقاس مقدار القوة بوحدات تسمى وحدات تثاقلية مثل ثقل جرام (ث.جم) ، ثقل الكيلو جرام (ث.كجم).

حيث أن: ١ث.كجم = ١٠٠٠ ث.جم = $١٠^{٣}$ ث.جم

كما توجد وحدات أخرى لقياس مقدار القوة تسمى وحدات مطلقة مثل الداين والنيوتن

حيث أن: ١ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين = $١٠^{٥}$ داين

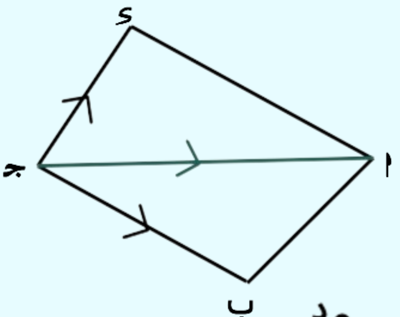
ترتبط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة:

١ث.كجم = ٩,٨ نيوتن

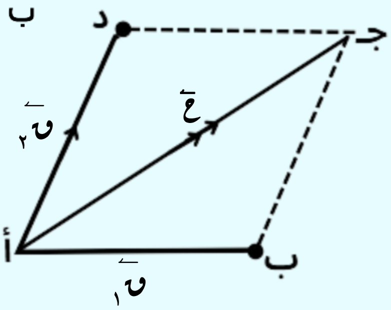
١ث.جم = ٩٨٠ داين

⇐ **إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة هندسيا:**

ا ب جـ ء متوازي أضلاع



$\overrightarrow{\text{جب}} + \overrightarrow{\text{جء}} = \overrightarrow{\text{جا}}$



$\overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = \overrightarrow{\text{ح}}$

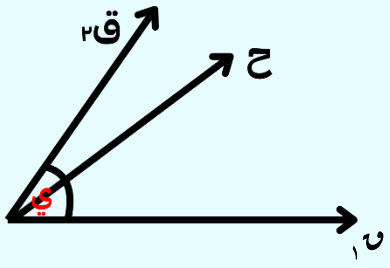
∴ في متوازي الأضلاع

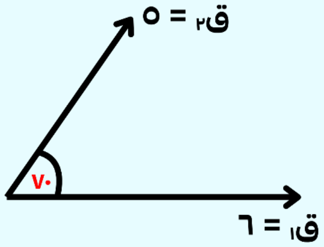
⇐ المحصلة عبارة عن قطر المتوازي الأضلاع

⇐ إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة تحليلياً:

قانون المحصلة (حفظ)

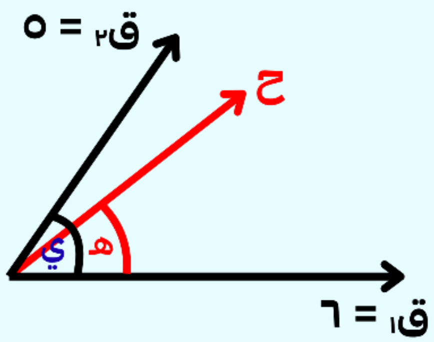
$$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتاي}}$$





$$ح = \sqrt{(٦)^2 + (٥)^2 + ٢ \times ٥ \times ٦ \text{ جتا } ٧٠} = ✓✓$$

وممكن يجي يطلب إتجاه المحصلة وهو عبارة عن الزاوية بين المحصلة والقوة الأولى ونرمز لها بالرمز (هـ)



حيث $\text{ظا هـ} = \frac{ق_2 \text{ جا ي}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتاي}}$

$\text{ظا هـ} = \frac{٥ \text{جا} ٧٠}{٦ + ٥ \text{ جتا} ٧٠} = ✓✓$ ، $ي = ٧٠$

هـ ⇐ الزاوية بين المحصلة والقوة الأولى

مثال ١

قوتان مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية والزاوية بين إتجاهيهما قياسها ٦٠° ، أوجد مقدار و إتجاه محصلتهما تحليلياً:

الحل

$$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتاي}}$$

$$ح = \sqrt{٢٥ + ٩ + ٢ \times ٥ \times ٣ \text{ جتا } ٦٠} = \text{ نيوتن}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{ق_2 \text{ جاي}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتاي}} = \frac{٣ \text{جا} ٦٠}{٥ + ٣ \text{جتاي}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{١٣}$$

$$\therefore \text{ظاهـ} = \frac{٣\sqrt{٣}}{١٣}$$

$$\text{sh tan}\left(\frac{3\sqrt{3}}{13}\right) = ٤٧ \,\bar{}\, ٢١^{o} =$$

∴ المحصلة تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٤٧ ‾ ٢١ °

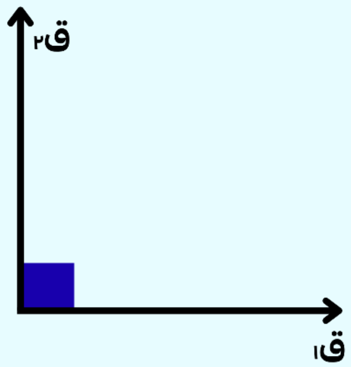
⇐ حالات خاصة:

١. إذا كانت القوتان متعامدتين (ي=٩٠)

$$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + \cancel{2 ق_1 ق_2 جتا ٩٠}} \qquad \therefore ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$$

$$ظاهـ = \frac{ق_2 جاي}{ق_1 + ق_2 جتاي} = \frac{ق_2 جا ٩٠}{ق_1 + \cancel{ق_2 جتا ٩٠}}$$

$$\therefore ظاهـ = \frac{ق_2}{ق_1}$$



مثـــال ٢

(١) قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، أوجد مقدار وإتجاه المحصلة.

الحل

$$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2} = \sqrt{٦^2 + (٢,٥)^2} = ✓✓ \text{ نيوتن}$$

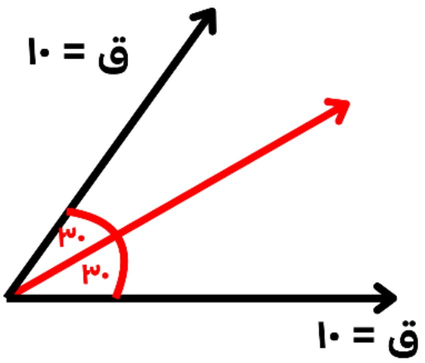
$$ظاهـ = \frac{ق_2}{ق_1} = \frac{٢,٥}{٦} \qquad \therefore ق(\hat{هـ}) = ٢٢^\circ\ ٣٧'$$

(٢) إذا كانت القوتان متساويتان في المقدار ($ق_1 = ق_2$)

الحل

$$ح = ٢ ق جتا \frac{ي}{٢} \qquad \therefore هـ = \frac{ي}{٢}$$

$$\therefore هـ = \frac{ي}{٢} = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠^\circ$$



مثـــال ٣

قوتان متساويتان في المقدار ومقدار كل منهما ١٠ والزاوية بينهما ٩٠° ، أوجد مقدار وإتجاه المحصلة.

الحل

ح = ٢ق جتا $\frac{ي}{٢}$ = ٢ × ١٠ × جتا ٤٥ = ✓✓ نيوتن

هـ = $\frac{ي}{٢}$ = $\frac{٩٠}{٢}$ ∴ هـ = ٤٥°

خد بالك يا معلم:

لو جه قال أن ي = ١٢٠ والقوتين متساويتين في المقدار في هذه الحالة ح = ق.

إزاي؟؟

ح = ٢ق جتا ٦٠ = $\cancel{٢}$ق × $\frac{\cancel{١}}{\cancel{٢}}$ = ق

ي = ١٢٠ ، $ق_{١}$ = $ق_{٢}$ = ق ⇐ ح = ق

⇐ خد بالك ـــ هيلعب معاك في الثلاث معلومات هيديلك إثنين ويطلب الثالثة:

⇐ القوتين متساويتين / ي = ١٢٠ / ح = ق

مثـــال ٤

قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما ٧٠$\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° ، أوجد مقدار كل من القوتين.

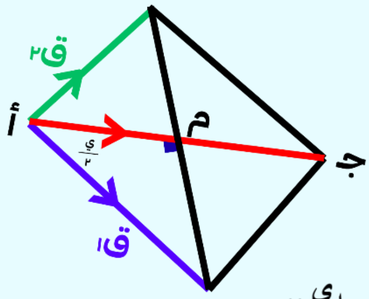
الحل

ح = ٢ق جتا $\frac{ي}{٢}$ ⇐ ٧٠$\sqrt{٣}$ = ٢ق جتا ٣٠

٧٠$\sqrt{٣}$ = $\cancel{٢}$ق × $\frac{\cancel{\sqrt{٣}}}{\cancel{٢}}$

∴ ق = ٧٠ نيوتن

⇐ الناس اللي عاوزة تفهم قانون القوتين المتساويتين جه منين :



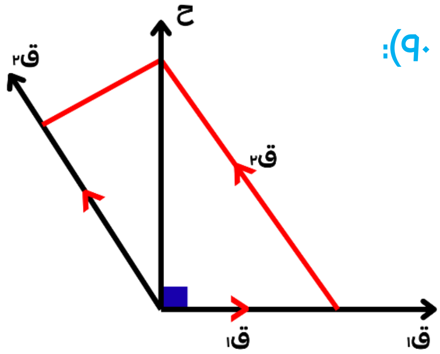
$\vec{\text{ق}}_1 + \vec{\text{ق}}_2 = \overleftarrow{\text{أجـ}}$

$\vec{\text{ق}}_1 + \vec{\text{ق}}_2 = ٢\,\overleftarrow{\text{أم}}$

$\frac{\text{جتا}\frac{\text{ي}}{٢}}{١} = \frac{\text{أم}}{\text{ق}} \quad \therefore \text{أم} = \text{ق جتا}\frac{\text{ي}}{٢}$

$\therefore \vec{\text{ق}}_1 + \vec{\text{ق}}_2 = ٢\text{ق جتا}\frac{\text{ي}}{٢}$ #

(٣) إذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى (هـ = ٩٠):



من فيثاغورث

$\text{ح}^2 = \text{ق}_2^2 - \text{ق}_1^2 \qquad \therefore \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_2^2 - \text{ق}_1^2}$

⇐ "خد بالك" من الحالة الأولى لما كانت القوتان متعامدتان ح = $\sqrt{\text{ق}_2^2 + \text{ق}_1^2}$

⇐ "خد بالك يا معلم" لو المحصلة عمودية على إحدى القوتين

∴ إحدى القوتين هي الصغرى#

$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ق}_2\,\text{جاي}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتاي}}$

ظا ٩٠ = غير معروفة = $\frac{١}{٠}$

$\frac{١}{٠} = \frac{\text{ق}_2\,\text{جاي}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتاي}}$

$\therefore \text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتاي} = \text{صفر}$

⇐ "الخلاصة" في حالة أن المحصلة عمودية على القوة الأولى (هـ = ٩٠)

$\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_2^2 - \text{ق}_1^2}$ ، $\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتاي} = \text{صفر}$

مثـــال ٥

قوتان مقدارهما ٥٠ ، ١٠٠ تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى، أوجد قياس الزاوية بينهما ومقدار المحصلة.

الحل

$\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$

$\text{ح} = \sqrt{(٥٠)^2 + (١٠٠)^2} = ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

$\text{ق}_1 + \text{ق}_2\ \text{جتاي} = \text{صفر}$

$٥٠ + ١٠٠\ \text{جتاي} = ٠$

$\frac{١٠٠}{١٠٠}\ \text{جتاي} = \frac{-٥٠}{١٠٠}$

$\text{جتاي} = \frac{-١}{٢}$

$\theta = ٦٠$

الثاني: $\text{ي} = ١٨٠ - \theta$

$= ١٨٠ - ٦٠$

$\therefore \text{ي} = ١٢٠$

الثالث: $\text{ي} \in [٠ ، ١٨٠]$

(٤) إذا كان القوتان لهما نفس خط العمل وفي إتجاهين متضادين (ي=١٨٠°):

$\text{ح} = |\text{ق}_2 - \text{ق}_1|$

⇐ الناس اللي عاوزة تعرف المحصلة جات منين:

$\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + ٢\text{ق}_1\text{ق}_2\ \cancel{\text{جتا}\ ١٨٠}}$

$\therefore \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 - ٢\text{ق}_1\text{ق}_2} = \sqrt{\text{ق}_1^2 - ٢\text{ق}_1\text{ق}_2 + \text{ق}_2^2}$

$= \sqrt{(\text{ق}_1 - \text{ق}_2)^{\cancel{2}}} = |\text{ق}_1 - \text{ق}_2|$

ي = ١٨٠ ⇐ في هذه الحالة تكون أصغر قيمة للمحصلة

(٥) إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفي نفس الإتجاه (ى=٠):

$$\text{ح} = \text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢}$$

وفى هذه الحالة أكبر قيمة للمحصلة عندما (ى=٠).

(٦) إذا كانت القوتان متساويتين في المقدار ولهما نفس خط العمل وفي إتجاهين متضادين :

⇐ المحصلة = صفر.

مثال ٦

قوتان تؤثران في نقطة مادية فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم ، وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث.كجم ، أوجد مقدار كل من القوتين ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بينهما ٦٠°.

الحل

نفرض أن القوتين $\text{ق}_{١}$ ، $\text{ق}_{٢}$

أكبر قيمة للمحصلة ⇐ $\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} = ٣٢$

أصغر قيمة للمحصلة ⇐ $\text{ق}_{١} - \text{ق}_{٢} = ١٢$

$\therefore \frac{٢\text{ق}_{١}}{٢} = \frac{٤٤}{٢}$ $\therefore \text{ق}_{١} = ٢٢$ ث . كجم

$\text{ق}_{٢} = ٣٢ - ٢٢$ $\therefore \text{ق}_{٢} = ١٠$ ث . كجم

$$\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_{١}^{٢} + \text{ق}_{٢}^{٢} + ٢\text{ق}_{١}\text{ق}_{٢}\,\text{جتا}\,\text{ى}}$$

$$= \sqrt{(٢٢)^{٢} + (١٠)^{٢} + ٢\times١٠\times٢٢\,\text{جتا}\,٦٠}$$ = ث . كجم

مثال ٧

قوتان ١٦،٣٠ تؤثران في نقطة مادية إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن ، أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

الحل

$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2ق_1ق_2 جتاي}$ =

خد بالك لما يديلك المحصلة في السؤال ربّع الطرفين

$\therefore ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2ق_1ق_2 جتاي$

$(٢٦)^2 = (٣٠)^2 + (١٦)^2 + ٢ \times ٣٠ \times ١٦ جتاي$

$٦٧٦ = ٩٠٠ + ٢٥٦ + ٢ \times ٣٠ \times ١٦ جتاي$

$٦٧٦ = ١١٥٦ + ٩٦٠ جتاي$

$\frac{-٤٨٠}{٩٦٠} = \frac{٩٦٠ جتاي}{٩٦٠}$

$\therefore جتاي = \frac{-١}{٢}$ $\therefore ي = ١٢٠$

مثال ٨

قوتان مقدارهما ٦، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° ، أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة ق.

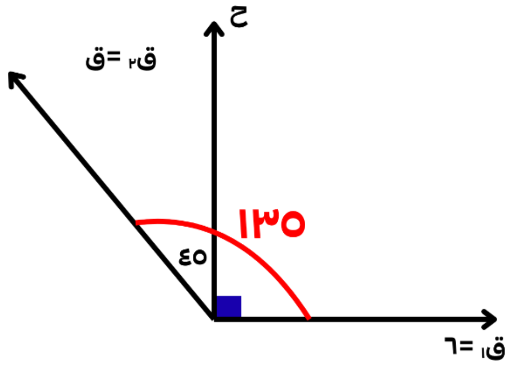
الحل

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

$ح = \sqrt{ق_2^{\,2} - ق_1^{\,2}}$

$ق_1 + ق_2 \,\text{جتاي} =$ صفر

$٦ + ق \,\text{جتا}\, ١٣٥ = ٠$



$\Leftarrow ٦ + ق \times \frac{-\sqrt{٢}}{٢} = ٠$

$٦ - \frac{\sqrt{٢}}{٢} ق = ٠$

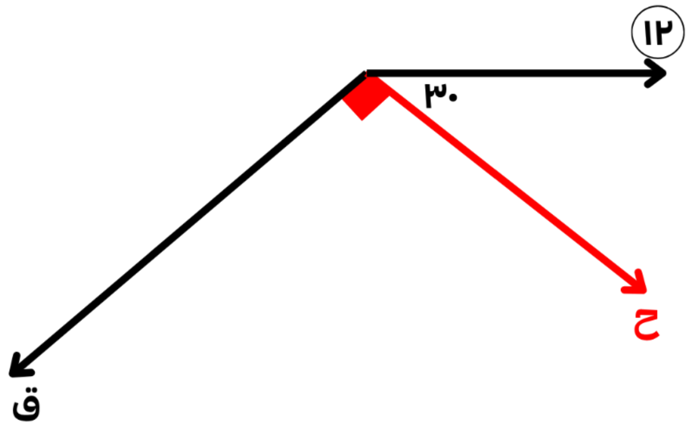
$\therefore \Leftarrow \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times ٦ = \frac{\cancel{\sqrt{٢}}}{\cancel{٢}} ق \times \frac{\cancel{٢}}{\cancel{\sqrt{٢}}}$

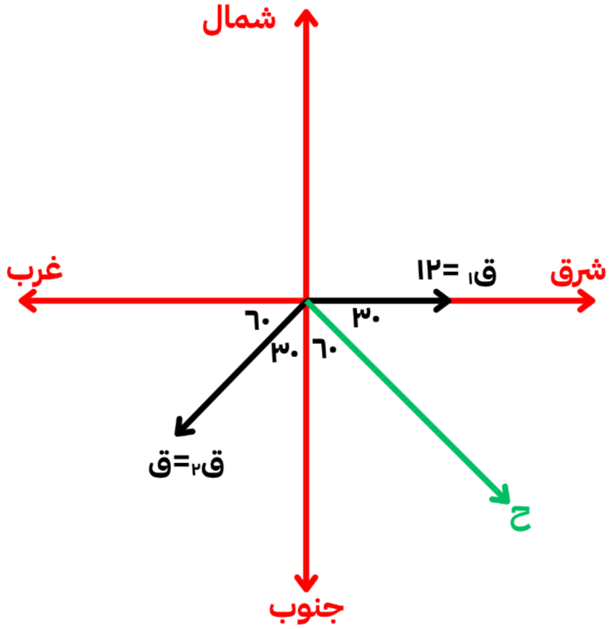
$\therefore ق = ٦\sqrt{٢}$ ث.كجم $\qquad \therefore ح = \sqrt{(٦\sqrt{٢})^{٢} - (٦)^{٢}} = ٦$ ث.كجم

مثـــال ٩

قوتان مقدارهما ١٢، ق تؤثران فى نقطة، تعمل الأولى فى إتجاه الشرق وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠ جنوب الغرب، أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا علم أن خط عمل المحصلة يؤثر فى إتجاه شمال٣٠° جنوب الشرق.

الحل





$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{ق}_{\text{٢}}\ \text{جاي}}{\text{ق}_{\text{١}} + \text{ق}_{\text{٢}}\ \text{جتاي}}$$

$$\Leftarrow \text{ظا٣٠} = \frac{\text{و جا١٢٠}}{\text{١٢} + \text{و جتا١٢٠}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}} = \frac{\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{و}}{\text{١٢} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{و}}$$

$$\Leftarrow \text{١٢}\sqrt{\text{٣}} - \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{و} = \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{و}$$

$$\therefore \text{١٢}\sqrt{\text{٣}} = \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{و} + \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{و} \Leftarrow \text{١٢}\cancel{\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\cancel{\text{٤}}\cancel{\sqrt{\text{٣}}}}{\cancel{\text{٢}}}\ \text{و}$$

$$\therefore \text{٢و} = \text{١٢}$$

$$\therefore \text{و} = \text{٦}$$

$$\therefore \text{ح}^{\text{٢}} = \text{و}_{\text{١}}^{\text{٢}} + \text{و}_{\text{٢}}^{\text{٢}} + \text{٢و}_{\text{١}}\text{و}_{\text{٢}}\ \text{جتاي} \Leftarrow \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_{\text{١}}^{\text{٢}} + \text{ق}_{\text{٢}}^{\text{٢}} + \text{٢ق}_{\text{١}}\text{ق}_{\text{٢}}\ \text{جتاي}}$$

$$= \sqrt{(\text{١٢})^{\text{٢}} + (\text{٦})^{\text{٢}} + \text{٢} \times \text{٦} \times \text{١٢}\ \text{جتا١٢٠}} = \text{٦}\sqrt{\text{٣}}\ \text{ث.كجم}$$

مثـــال ١٠

قوتان مقدارهما ٣٠ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن ق = ... نيوتن

أ) ١,٥ ب) ٣ جـ) $٣\sqrt{٣}$ **د) ٦**

الحل:

$ح \perp ٣٠$ $\therefore ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$

$ق_١ + ق_٢ \, \text{جتاي} = ٠$

$٣ + ق \, \text{جتا} \, ١٢٠ = ٠ \Leftarrow ٣ - \frac{١}{٢} ق = ٠$

$٣ = \frac{١}{٢} ق$ $\therefore ق = ٦$

مثـــال ١١

قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن ومقدار محصلتهما $٣\sqrt{٥}$ نيوتن فإن ق = ... نيوتن

أ) ٧ **ب) ٤** جـ) ٦ د) ٣

الحل:

$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢} \Leftarrow ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ \Leftarrow$

$(٣\sqrt{٥})^٢ = (٢ق - ٥)^٢ + (ق + ٢)^٢$

$\Leftarrow ٤٥ = ٤ق^٢ + ٢٥ - ٢٠ق + ق^٢ + ٤ق + ٤$

$٥ق^٢ - ١٦ق + ٢٩ = ٤٥ \Leftarrow ٥ق^٢ - ١٦ق - ١٦ = ٠$

$\therefore ق = ٤$

مثـــال ١٢

قوتان مقدارهما ٢ق، ٥ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ومقدار محصلتهما ٣ق فإن ي = ...

أ) صفر ب) ٦٠° جـ) ٩٠° د) ١٨٠°

الحل:

ح = ق٢ - ق١ ⇐ ى = ١٨٠ قوتان متضادتين فى الإتجاه.

مثـــال ١٣

قوتان مقدارهما ٣ ق ، ق ومحصلتهما ٤ ق نيوتن يكون قياس الزاوية بينهما ....

أ) ٦٠° ب) صفر جـ) ١٨٠° د) ٩٠°

الحل:

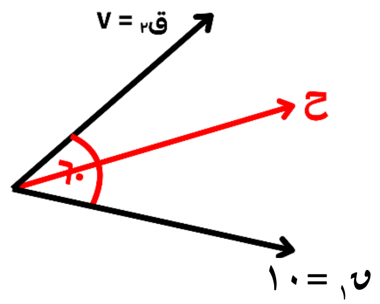
المحصلة عبارة عن جمع القوتين ع = ق١ + ق٢ في حالة أن القوتين في نفس الإتجاه

∴ الزاوية بينهما = صفر

تحليل القوة إلى مركبتين:

⇐ في الدرس اللي فات كان بيديلك قوتين و الزاوية بينهم ويطلب منك المحصلة.

$$ح = \sqrt{ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ق_{١}ق_{٢}\ \text{جتاى}}$$

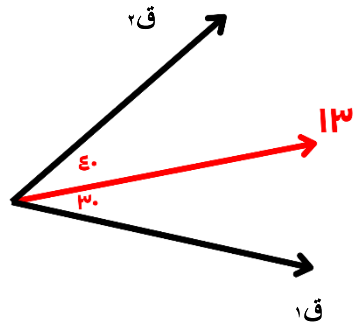


في الدرس ده هيديلك المحصلة ويطلب منك القوتين ويبديلك الزوايا بين القوة والمحصلة

⇐ طب الحل إزاي يا مستر

هتاخد $\dfrac{ق_{١}}{\text{جا الزاوية البعيدة}} = \dfrac{ق_{٢}}{\text{جا الزاوية البعيدة}} = \dfrac{\text{المحصلة}}{\text{جا الزاوية كلها}}$

$$\frac{ق_{١}}{\text{جا}٤٠} = \frac{ق_{٢}}{\text{جا}٣٠} = \frac{١٣}{\text{جا}٧٠}$$



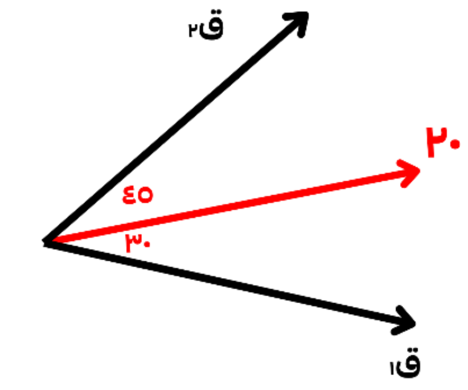
$\therefore ق_{١} = \dfrac{١٣\text{جا}٤٠}{\text{جا}٧٠}$ نيوتن

$\therefore ق_{٢} = \dfrac{١٣\text{جا}٣٠}{\text{جا}٧٠}$ نيوتن

مثال ١

حلل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن إلى مركبتين تميلان على إتجاه القوة بزاويتين قياسهما ٤٥° ، ٣٠° فى ناحيتين مختلفتين منها ثم قرب الناتج لأقرب رقم عشرى واحد .

الحل



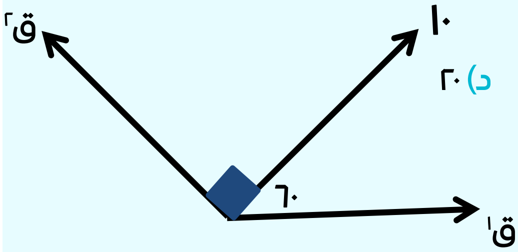
$$\frac{\text{ق}_{١}}{\text{جا}٤٥} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا}٣٠} = \frac{٢٠}{\text{جا}٧٥}$$

$$\therefore \text{ق}_{١} = \frac{٢٠\text{جا}٤٥}{\text{جا}٧٥} = ١٤.٦ \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{ق}_{٢} = \frac{٢٠\text{جا}٣٠}{\text{جا}٧٥} = ١٠.٤ \text{ نيوتن}$$

مثال ٢

في الشكل المقابل: حُللت القوة التي مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{\text{ق}_{١}}$، $\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسهما ٦٠°، ٩٠° فإن : $\text{ق}_{٢}$ = ... نيوتن..



أ) ٥$\sqrt{٣}$ ب) ١٠ ج) $\boxed{١٠\sqrt{٣}}$ د) ٢٠

الحل:

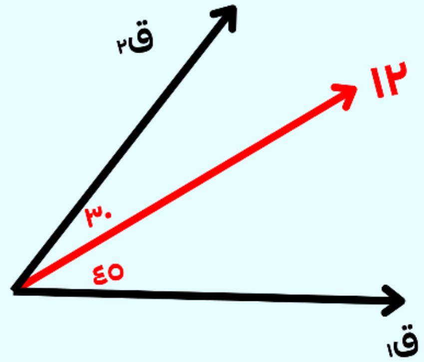
$$\frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا}٩٠} = \frac{١٠}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا}٦٠} \quad \therefore \text{ق}_{٢} = \frac{١٠\text{جا}٦٠}{\text{جا}١٥٠} = ١٠\sqrt{٣}$$

مثال ٣

إذا حًللت القوة التي مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{\text{ق}_{١}}$، $\overrightarrow{\text{ق}_{٢}}$ فإن: $\text{ق}_{١}$ .... نيوتن.

أ) ١٢جتا٧٥ ب) ١٢جتا٤٥ ج) ٦قتا٤٥ د) $\boxed{\text{٦قتا٧٥}}$

الحل:



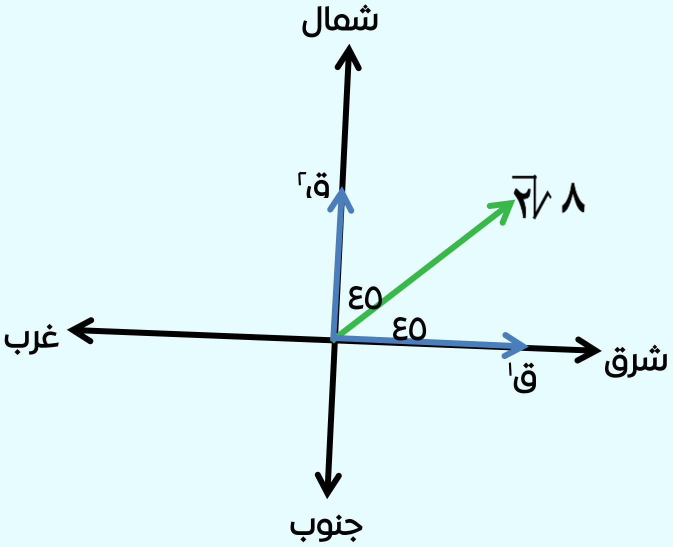
$$\frac{\text{ق}_{١}}{\text{جا}٣٠} = \frac{١٢}{\text{جا}٤٥} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا}٤٥}$$

$$\therefore \text{ق}_{١} = \frac{١٢\text{جا}٣٠}{\text{جا}٧٥} = \frac{٦}{\text{جا}٧٥} = ٦\frac{١}{\text{جا}٧٥}$$

$$\therefore \text{ق}_{١} = \text{٦قتا٧٥}$$

مثال ٤

حلل قوة مقدارها $٨\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثر في نقطة (و) فى إتجاه الشمال الشرقي إلى مركبتين إحداهما فى إتجاه الشرق والأخرى فى إتجاه الشمال.



الحل:

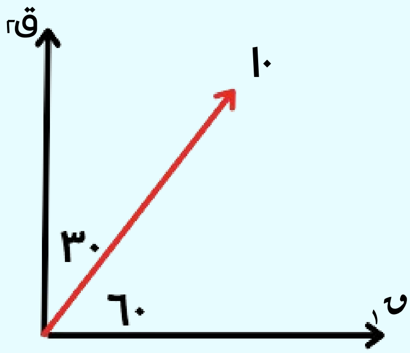
$$\frac{\text{ق}_{١}}{\text{جا}٤٥} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا}٤٥} = \frac{٨\sqrt{٢}}{\text{جا}٩٠}$$

$$\therefore \text{ق}_{١} = \text{ق}_{٢} = \frac{٨\sqrt{٢}\,\text{جا}٤٥}{\text{جا}٩٠}$$

$$= ٨\sqrt{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٨$$

"خد بالك" لو الزاوية بين المركبتين ٩٠

⇐ الحالة الخاصة رقم (١)



$$\frac{\text{ق}_{١}}{\text{جا}٣٠} = \frac{١٠}{\text{جا}٩٠} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا}٦٠}$$

$$\therefore \text{ق}_{١} = ١٠\,\text{جا}٣٠ = ٥$$

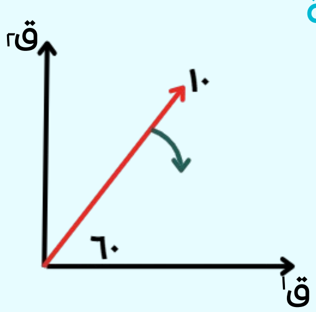
$$\text{ق}_{٢} = ١٠\,\text{جا}٦٠ = ٥\sqrt{٣}$$

⇐ أول ما تلاقي الزاوية بين المركبتين ٩٠ استخدم الحالة الخاصة ــــ اشطب زاوية منهم

⇐ القوة القريبة من الزاوية = المحصلة × جتا الزاوية

⇐ القوة البعيدة من الزاوية = المحصلة × جا الزاوية

عندنا قاعدة بتقول المحصلة بتنام على جيب التمام (جتا)



$$\text{ق}_{١} = ١٠\,\text{جتا}٦٠$$

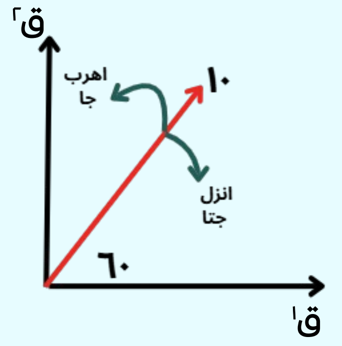
$$\text{ق}_{٢} = ١٠\,\text{جا}٦٠$$

⇐ عندنا قاعدة تانية انزل بال"جتا " و إهرب بال "جا "

$ق_1$ = ١٠ جتا ٦٠

$ق_2$ = ١٠ جا ٦٠

(استخدم الطريقة اللي تعجبك)

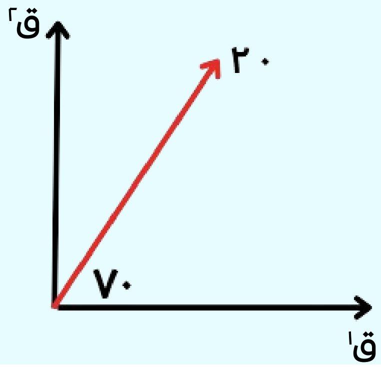


$ق_1$ = ٢٠ جتا ٧٠

$ق_2$ = ٢٠ جا ٧٠

⇐ استخدم الحالة الخاصة دي امتى؟

إذا كانت المركبتين متعامدتين



مثـــال ٥

في الشكل المقابل: إذا حُللت القوة التي مقدارها ١٠٠ نيوتن إلى قوتين $\overrightarrow{ق_1}$، $\overrightarrow{ق_2}$ وكانت القوة مقدرة بالنيوتن فإن : ($ق_1$، $ق_2$) = ...

$\boxed{\text{أ) (٥٠، ٥٠√٣)}}$ ب) (٥٠√٣، ١٠)

جـ) (٥٠، ٥٠) د) (١٠، ١٠)

الحل:

$ق_1$ = ١٠٠ جتا ٦٠ = ٥٠

$ق_2$ = ١٠٠ جا ٦٠ = ٥٠√٣

مثـــال ٦

في الشكل المقابل: إذا حُللت القوة التي مقدارها ١٠ √٣ نيوتن إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ ثقل كجم فما مقدار المركبة الأخرى؟

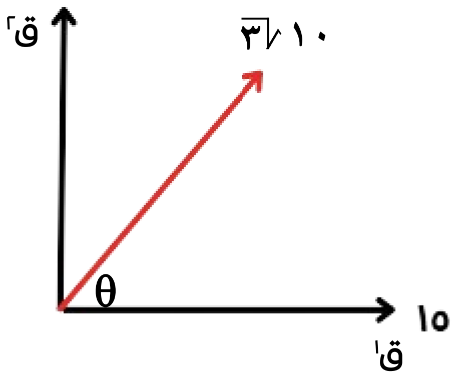
الحل

$$\text{ق}_1 = ١٠\sqrt{٣}\ \text{جتا}\ \theta$$

$$\frac{١٥}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠\sqrt{٣}}\ \text{جتا}\ \theta$$

$$\therefore \text{جتا}\ \theta = \frac{١٥}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \qquad \therefore \theta = ٣٠^\circ$$

$$\therefore \text{ق}_2 = ١٠\sqrt{٣}\ \text{جا}\ ٣٠ = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} = ٥\sqrt{٣} \qquad \therefore \text{ق}_2 = ٥\sqrt{٣}$$



مثال ٧

حلل قوة مقدارها ١٢ ث . كجم تؤثر في اتجاه الشمال الشرقي إلى مركبتين إحداهما نحو الشرق والأخرى نحو الشمال الغربي

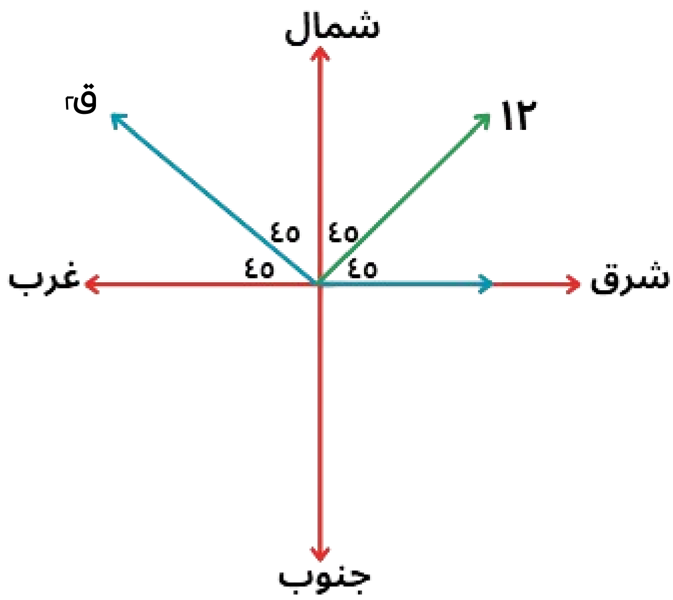
أوجد مقدار هاتين المركبتين

الحل

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا}\ ٩٠} = \frac{١٢}{\text{جا}\ ١٣٥} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا}\ ٤٥}$$

$$\text{ق}_1 = \frac{١٢\ \text{جا}\ ٩٠}{\text{جا}\ ١٣٥} = ١٢\sqrt{٢}\ \text{ث . كجم}$$

$$\text{ق}_2 = \frac{١٢\ \text{جا}\ ٤٥}{\text{جا}\ ١٣٥} = ١٢\ \text{ث . كجم}$$



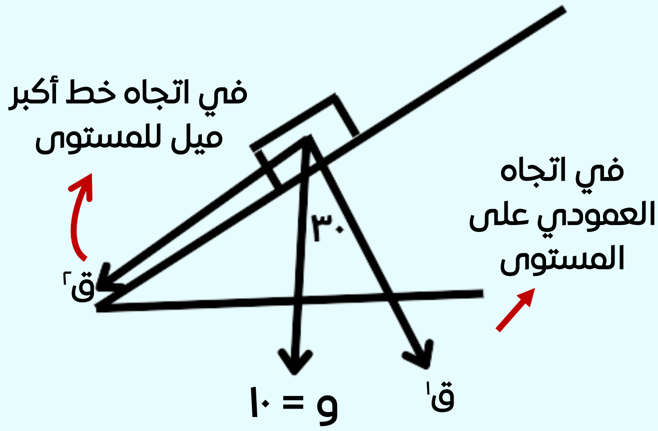
⇐ الحالة الخاصة رقم (٢)

لو عندك جسم على مستوى مائل

⇐ تأثير الوزن رأسي لأسفل

ق$_1$ = وجتا٣٠ = ١٠جتا٣٠

ق$_2$ = وجا٣٠ = ١٠جا٣٠



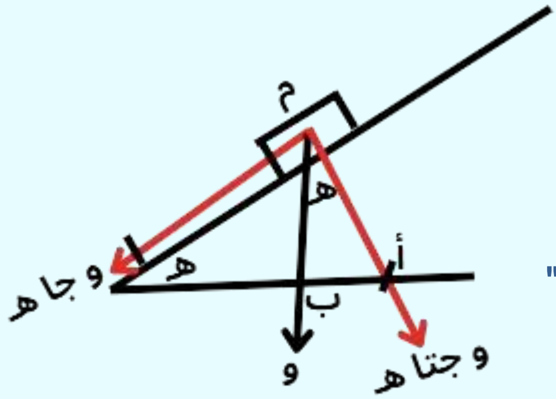
خد بالك في حالة المستوى المائل

ق(∠ ا م ب) = ق(∠ ب م جـ)

في حالة المستوى المائل هناك قاعدة ثابتة

⇐ المركبة العمودية على المستوى "وجتاهـ"

⇐ المركبة في خط ميل المستوى لأسفل "وجاهـ"



مثـــال ٨

وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠ أوجد مقدار مركبتي وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والإتجاه العمودي عليه

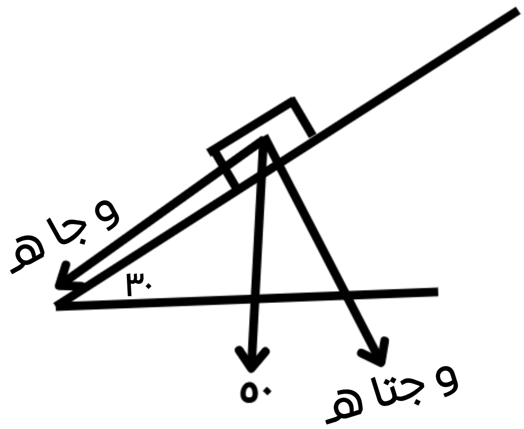
الحل

في اتجاه خط أكبر ميل ______ و جا هـ

و جا هـ = ٥٠ جا ٣٠ = ٢٥

في اتجاه العمودي على المستوى ____ و جتا هـ

و جتا هـ = ٥٠ جتا ٣٠ = ٢٥ $\sqrt{3}$



مثال ٩

في الشكل المقابل: إذا وضع جسم وزنه ١٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠ و تم تحليل الوزن إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل = ... نيوتن

أ) $٥\sqrt{٢}$ ب) $٥\sqrt{٣}$ $\boxed{\text{جـ) ٥}}$ د) و١

الحل:

⇐ في اتجاه خط أكبر ميل ـــــ و جا هـ

١٠ جا ٣٠ = ٥ #

مثال ١٠

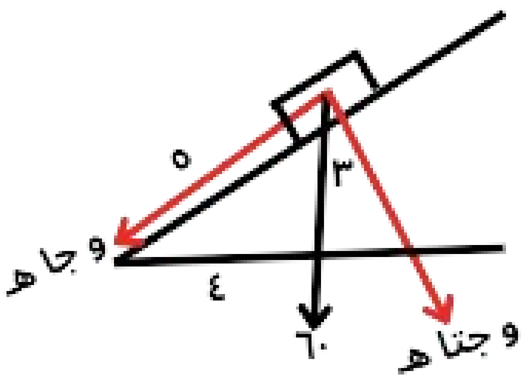
جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوع على مستوى مائل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث ظاهـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه

الحل

جاهـ = $\frac{٣}{٥}$ ∴ جتاهـ = $\frac{٤}{٥}$

و١ = وجاهـ = ٦٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣٦ نيوتن

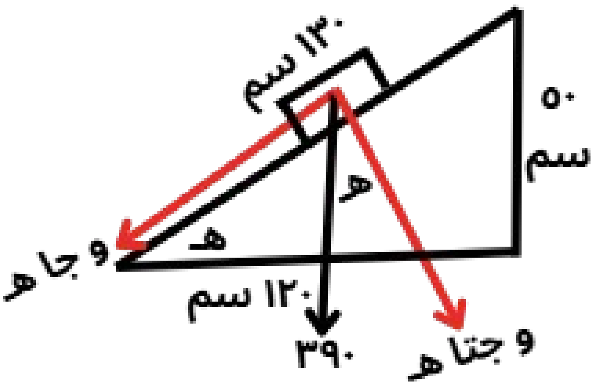
و٢ = وجتاهـ = ٦٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤٨ نيوتن



مثال ١١

مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث.كجم

أوجد مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و الإتجاه العمودي عليه



الحل

جاهـ = $\frac{٥٠}{١٣٠} = \frac{٥}{١٣}$

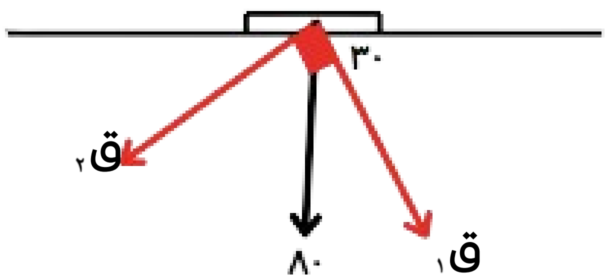
جتاهـ = $\frac{١٢٠}{١٣٠} = \frac{١٢}{١٣}$

$و_١$ = وجتاهـ = $٣٩٠ \times \frac{١٢}{١٣} = ٣٦٠$ ث.كجم

$و_٢$ = وجاهـ = $٣٩٠ \times \frac{٥}{١٣} = ١٥٠$ ث.كجم

مثال ١٢

أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين لوزن جسم موضوع على أفقي و مقداره ٨٠ نيوتن إذا علم أن إحداهما تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠ إلى أسفل



الحل

$و_١$ = ٨٠جتا٦٠ = ٤٠ نيوتن

$و_٢$ = ٨٠جا٦٠ = ٤٠$\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال ٩

ا ب جـ د هـ و شكل سداسي منتظم أثرت فيه القوة ١٥ نيوتن في $\overleftarrow{\text{اجـ}}$ وتحللت إلى مركبتين $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ كما بالشكل ، فإن $\text{ق}_{١} : \text{ق}_{٢}$ = ...

أ) √٣ : ٢ ب) $\boxed{٢ : ١}$ جـ) ١ : ٢ د) √٣ : ١

الحل:

السداسي النتظم قياس الزاوية الداخلة = ١٢٠°

$$\frac{\text{ق}_{١}}{\text{جا }٩٠} = \frac{١٥}{\text{جا }١٢٠} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{جا }٣٠}$$

$$\text{ق}_{١} = \frac{١٥\text{ جا }٩٠}{\text{جا }١٢٠} = ١٠\sqrt{٣} \text{ ، } \text{ق}_{٢} = \frac{١٥\text{ جا }٣٠}{\text{جا }١٢٠} = ٥\sqrt{٣}$$

$$\therefore \text{ق}_{١} : \text{ق}_{٢} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٣}} = ٢ : ١$$