Linear programming

Programation linéaire
(optimisation linéaire)

Chapitre 0: Rappel sur l'algebre linéaire

Chapitre 1: Modélisation des pbs sur forme d'un P.L

Chapitre 2: Résolution graphique d'un PL

Chapitre 3: Résolution analytique d'un PL (Méthode de simplexe)

Chapitre 04: Dualite en PL

Chapitre 5: Applications

$A^{-1}A = I$

I : diagonal egu 1 et les entre egu 0.

Chapitre 1:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow opt \ (max / min)$$

f^{ct} economique objective bute

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \rightarrow opt$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Modelise un pb sur forme d'une p.L

revi 1 : ā

1) trouve les varibls de décision
2) les contrents
3) les contrents de positivites
4) la fonction objectif.

Exo 1

1/ Identifier les variable de décision
2) Identifier les contraintes (pransipal et de positivité)
3) Identifier la fonction economique

sol

1/ Variable de decision

x_1 = la surface allowe pour cultiver la tomate

x_2 = " " " " piments

pour les contrantes de positivité

$x_1 \geq 0$ $\quad x_2 \geq 0$

Les contrainte principale

1) téren : $x_1 + x_2 \leq 150$

2) main d'œuvre

$x_1 + 4x_2 \leq 480$

3) l'eau :

$4x_1 + 2x_2 \leq 440$

4 bereux de perametre

$x \leq 90$

3) la fonction objectif.

$z = 100x + 200x_2 \rightarrow max$

Le programme PL

$z = 100x_1 + \cancel{x_2}\ 200x_2 \rightarrow max$

sous contrainte
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0 \ ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exo 2

1) les variable de décision

x_1 = le nombre de pilule de petite taille possible

x_2 = " " " " grand "

2) contrainte de non négativité

$x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0$

3) contraint principale

- contrainte d'asperine :

$2x_1 + x_2 \geq 12$

- contrainte bicarbonate

$5x_1 + 8x_2 \geq 74$

- contrainte codéine

$x_1 + 6x_2 \geq 24$

4 la f^{ct} économique

$z = x_1 + x_2 \rightarrow min$

Le programe liniare :

$z = x_1 + x_2 - min$

S.C
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0 \ ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exo 3

1) les variable de décision

x_1 : le nombre d'unité de produit P1 a fabriqué

x_2 : le nombre d'unité de produit P2 a fabriqué.

2) Contrainte de non négativité

$x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0$

3) contraint principale

pour la machine M_1 : $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$

" M_2 : $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$

" M_3 : $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$

4) la fonction objectife.

$z = 900x_1 + 1000x_2 \rightarrow max$

le P.L

$$
\begin{cases}
Z = 900x_1 + 1000x_2 \rightarrow \max \\
S.C \\
11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\
7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\
6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Exo 5

1/ Variable de desision.

x_1: le nombre de spot publisitaire dans la TV local.

x_2: // // /// la TV par satellite

x_3: // // // Radio

x_4: // // // Journaux

2/ Contrant de positivité

$x_i \geq 0 \quad , i = 1, 2, 3, 4$.

3) les contrant principale.

Coût d'une publicité

$40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$

nbr de client potentiel par pub. tte femme

$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$

contrant de la TV.

$40x_1 + 75x_2 \leq 500$

$x_1 \geq 3;\quad x_2 \geq 2$

nbr pub dans radio et dans les journaux

$5 \leq x_3 \leq 10$

$5 \leq x_4 \leq 10$

4) fonction objectif:

$Z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 \rightarrow \max$

le programme linéair

$$
Z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 \rightarrow \max
$$

$$
S.C
\begin{cases}
40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800 \\
300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000 \\
40x_1 + 75x_2 \leq 500 \\
x_1 \geq 3;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5 \\
x_3 \leq 10;\ x_4 \geq 5;\ x_4 \leq 10 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4
\end{cases}
$$

Exemple Exo

Un entrepreneur possède 3 chantier dans 3 sites différents S_1, S_2 et S_3. Le besoin en ciment pour chaque site est 48, 120 et 48 tonnes respectivement. Cette marchandise est disponible chez un fournisseur qui posède 3 dépots different D_1, D_2 et D_3 avec un stocks en quantité limitées 60, 72, 84 tonnes respectivement pour chaque dépot.

_ En connaissant le couts unitaire de transport c_{ij} de chaque dépot D_i $(i = 1, 2, 3)$ ver chaque site s_j $(j = 1, 2, 3)$ donnée par le tableau suivant

	S_1	S_2	S_3
D_1	3	2	4
D_2	1	4	3
D_3	4	2	5

question: Determiner un reseau de distribution de la marchandise avec un moindre Cout de transport?

Sol

1) les Variable de décisions

x_{ij} = la quantité de Ciment transporté de dépot $D_i (i=1,2,3)$ vers site S_j $(j=1,2,3)$

2) Che contrant de non négativité

$x_{ij} \geq 0; \quad i=1,2,3;$
$j=1,2,3;$

3) Les contrat prancipal.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}=60$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}=72$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}=84$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=48$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=120$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=48$

4 la fonction objectif.

$Z=3x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+4x_{31}+2x_{32}+5x_{33} \longrightarrow \min$

- le programme linéaire

$Z=3x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+4x_{31}+2x_{32}+5x_{33} \Rightarrow \min$

$$S.C \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=60 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=72 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=84 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=48 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=120 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=48 \\ x_{ij} \geq 0; \quad i=1,2,3 \\ \qquad j=1,2,3 \end{cases}$$

Exo en entreprise posede deux usine U_1 et U_2 l'usine U_1 despose de 500 unité de serte produit et l'usine U_2 despose 300 unité de méme produits. l'entreprise a 3 client E_1, E_2 et E_3 dans la demmande pour se produit est 100 unité par client E_1

200 uni $\rightarrow E_2$

300 uni $\rightarrow E_3$

les couts unitaire de transport on milie 1000 DA sont résumé au tableaux

Chapitre 02 : Résolation géométrique (graphique) d'une programme linéare.

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = r^2$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

$x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$

$(x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + 1 = 0$

$u(-1, 1)$

le nombre de 3 variable est défisile oubien impossible. (x, y, z) impossible

$x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 4$ impossible

Les ligne de niveau de la fonction objectif sont des droit eo parilleles dans $\mathbb{R}^2$

تقاطع ...

② Fdes solution admissibles de variabl z si la ligne de niveau associée à cette Valeur intersecte le domaine admissible D du problemme

③ pour déterminer la valeur maximale atteignable par un sol admissible il suffit de fair glaisser le plus loin possible un ligne de niveau de la fonction z dans le sens du gradient, jusqu'a se qu'elle torche encore tout juste D

plusieur variable

$x + 2y - 1$

4) Les point du Contact ainsi obtenu Corespondent aux solution optimale du problem p.L

Résultat d'une optimisation linéaire : tout sol est un sol réalisable

① Le domaine admissable d'un p.L peut être :

* Vide : dans un tel cas le probl est sans Solution admissable
$\Rightarrow$ Pas de solution

② borné : $(\neq \emptyset)$ le pb possède toujour au moin une solution optimal quel que soit la f^{ct} objectif.

③ non borné : Dans ce cas la f^{ct} objectif choisie

_ Le pb peut ~~posible~~ posside de sols opti

_ Il peut etre éxister des sols admissables de Valeur arbitrarement grande (en petite)

objectifs :

① Conaitre les defirent élements d'un p.L

② etre Capable de modélisor de petits problemme.

③ être Cabable de résudre graphiquement un p.L a 2 deux Variable de désision.

Les différent forme d'un p.L

1. La forme canonique
2. " " standard
3. " " matricial
4. " " générale (mixte)

(1) la forme générale

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to opt$$

$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i & i = \{1 - m\} \\ \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j \geq b_k & k = \{1 - m\} \\ \sum_{j=1}^{m} a_{rj} x_j = b_r & r = \{1 - m\} \\ l_j \leq x_j \leq M_j & j = 1 - m \end{cases}$$

(2) la forme Canonique

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to max$$

$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1 - m} \\ x_j \geq 0 & j = \overline{1 - m} \end{cases}$$

1. problem de maximisation
2. toute les contraints sont de type " $\leq$ ".
3. tout les variable de decision sont non négative

(3) la forme standard

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_j x_j \to max$$

$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j = b_i & i = 1 - m \\ x_j \geq 0 & j = 1 - m \end{cases}$$

1. prob de maximisation
2. tout les contrainte sont de type égaliter
3. $x_j \geq 0$.

la forme matricialle.

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to opt$$

$$s.c \begin{cases} A X = b \text{ vecteur} \\ X \geq 0, \ X \in \mathbb{R}^n \text{ vecteur} \end{cases}$$

A = matrice.

transformation

1. forme Canonique → f. standard

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to max$$

$$* \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \to \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + x_{m+i} = b_i$$

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{c_j}_{cout} x_j + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{0}_{Cout\ null} x_{m+i}$$

$$sc \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + x_{m+i} = b_i & i = 1_m \\ x_j \geq 0 & \forall j = \overline{1 - m} \end{cases}$$

1. Pourquoi les formes particules ?
2. pourquoi on fait les formes ?

① Vérifier les prérequis des méthodes de Résolution
② Simplifier la présentations des algorithmes.

Remarque :
les définition de forme canonique standard varient par fois d'un auteur à autre

c) équivalence des formulation canonique et standard

Théorame 1 :
au pris éventiel de l'ajout de contrainte et/ou de variables, tout pL peut être transformé en un pL sous forme canonique équivalent

Théorame 2 :
au pris eventiel de l'ajout de contrainte et / ou de variable, tout pL peut etre transformer en un pL sous forme standard equivalent

Remarque :
par progm equivalent on entand :
① tout solutiont admissible (opt) des pbs equivalent coresspond a une sol admissible (opt) des prbl initiale.
② tout sol admissible (optimale) du pb initiale corespend a au moins un sol admissible (opt) du problem equivalent.
③ L'issue de l'optimisation des deux problem est la même (Sans solution admis, optimaux fini prblm non borné).

I introduction
considerons le problame de production formàle par le programme linéare suivant (P)

ce programme contient deux variable. Dans ce cas, il est possible de répérenter géométriquement les contrants ainsi que la f^{ct} objective.
Les étapes suivre pour la résolution graphique sont les suivants :
1) tracer les axes pour les deux variables.

2/ tracer les contraints du probleme

3/ Determiner la région réalsable

4/ traces la f^{ct} objective pour quelque valeur

5/ Conclure pour la solution obtimal.

Exemple

Resoudre graphiquement le PL suivant

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$S.C_P : \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

$(D_1) : 3x_1 + x_2 = 15$

x_1	5	3
x_2	0	6

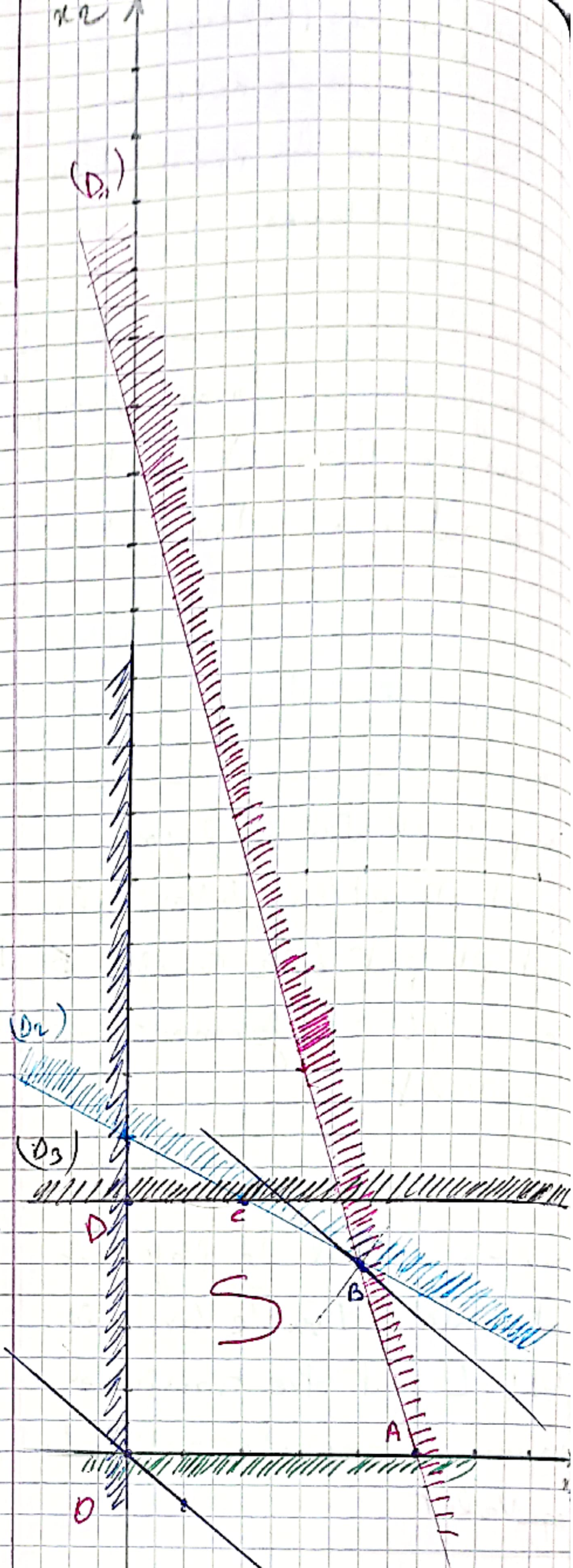
$(D_2) : x_1 + 2x_2 = 10$

x_1	0	2
x_2	5	4

$(D_3) : x_2 = 4$

$(D_4) : x_1 = 0$

$(D_5) : x_2 = 0$



– S c'est l'ensemble de solution réalisable (région réalisable) de notre programme P.

4/ tracer la f^{ct} $Z = 4x_1 + 5x_2$

droite izotope

$(D)_{Z=0}: 4x_1 + 5x_2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-4}{5} x_1$

$y = ax$

Coefficient directeur $a = \frac{-4}{5}$

- on trace tout les droites qui sont paralele à $(D)_{Z=0}$ (iyant même coeffission derecteur $a = \frac{-4}{5}$)
- le dernier point qui fait $\cap$ de $(D)_{Z=0}$ avec ensemble de solution realisable S c'est bient le sommet qui reprisent la solution optimal de notre programe
- dans notre cas c'est bient sommet B de l'ensemble.
- le sommet B est la solution optimale de programme linéaire (P) et c'est l'intercection entre (D_Z) avec l'esemble (region) réalisable S

$B(4,3)$

$X^* = (4,3)$ solution optimale

avec $Z^* = 4\times4 + 5\times3 = 31$

$\boxed{Z^* = 31}$

le point B c'est l'intersection entre les deux droit (cont) (D_1) et (D_2)

$\{B\} = (D_1) \cap (D_2)$

$$+\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 15 \\ (-3)\times \quad x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

$-5x_2 = -15 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$

$3x_1 + 3 = 15$

$3x_1 = 12 \Rightarrow \boxed{x_1 = 4}$

$$\begin{cases} x^* = B(4,3) \\ Z^* = 31 \end{cases}$$

Methode 2 : Enumératife.

Tra ces les droit qui représentes l'ensemble des contr (P).

On trouve l'ens des région réalisable (S) qui est un ensemble contexe (polygone) ensuite on cherche les coordonée des points (sommet) de l'ens (S) [illegible] pour notre PL (P)

S = formé par le polygone OABCD

$O(0,0) \to z_O = 0$

$A(5,2) \to z_A = 20$

$B(4,3) \to z_B = 31$

$C(2,4) \to z_C = 28$

$D(0,4) \quad z_D = 20$

La solution Obtimale est le sommet donne une polygone de valeur de z ; notre cas c'est bien B.

La solution optimale

$X^* = B = (4,3$

avec $z^* = 31$

Exemple 2

$z = 20x_1 + 40x_2 \to \min$

$$S_1 \; c \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 \leq 14 \\ x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exo 4

① tracer les droites des contraintes

(D_1) : $x_1 + x_2 = 1$

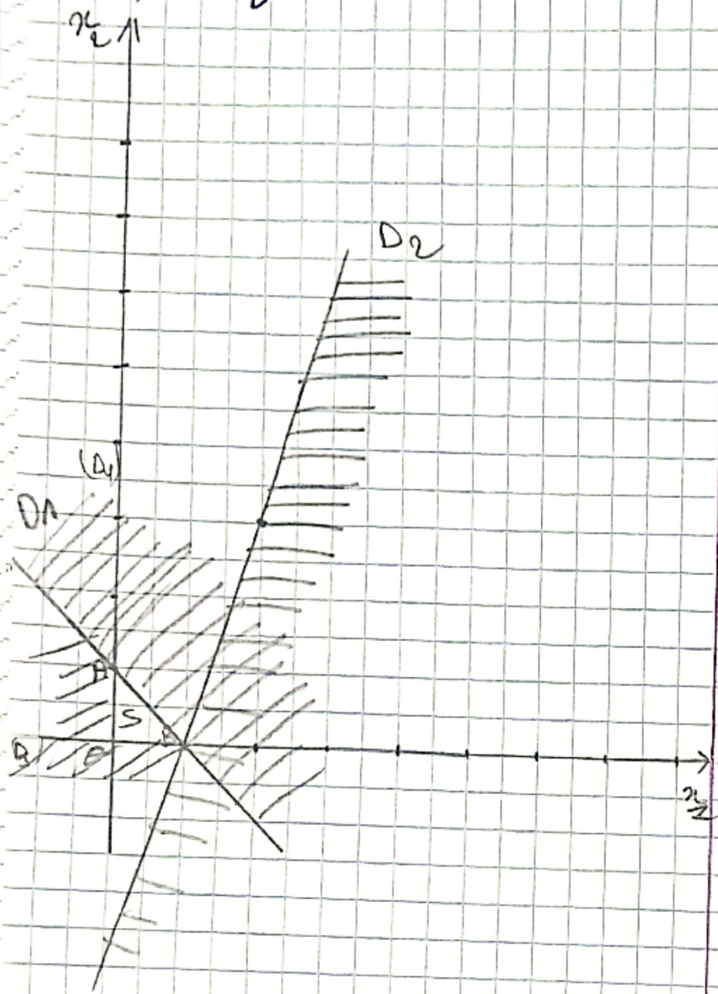
x_1	0	1
x_2	1	0

(D_2) : $-3x_1 + x_2 = -3$

x_1	1	2
x_2	0	3

(D_3) : $x_1 = 0$

(D_4) : $x_2 = 0$



② l'ensemble S est la region rialisable de problem (P)

$3x_1 + x_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = -3x_1}$

cofficient déred

$a = -3$

trac les les droite parallèle de (D_2) ; $a = -3$

l'intersection des droites les couts avec la region realisable donne le sommet B comme solution optimal du problem (P)

$X^* = (1, 0)$

avec $Z^* = 3$

(P) : par la methode enurative ona :

le polyédre O A B avec

$A(0,1) : Z_A = 1$

$B(1,0) : Z_B = 3$

$O(0,0) : Z_O = 0$

la solution optimal c'est bien sommet B.

c/ $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

(D_1) : $x_1 = 0$

(D_2) : $x_2 = 0$

(D_3) : $x_1 = 3$

(D_4) $x_2 = 3$

(D_5) : $x_1 + x_2 = 4$

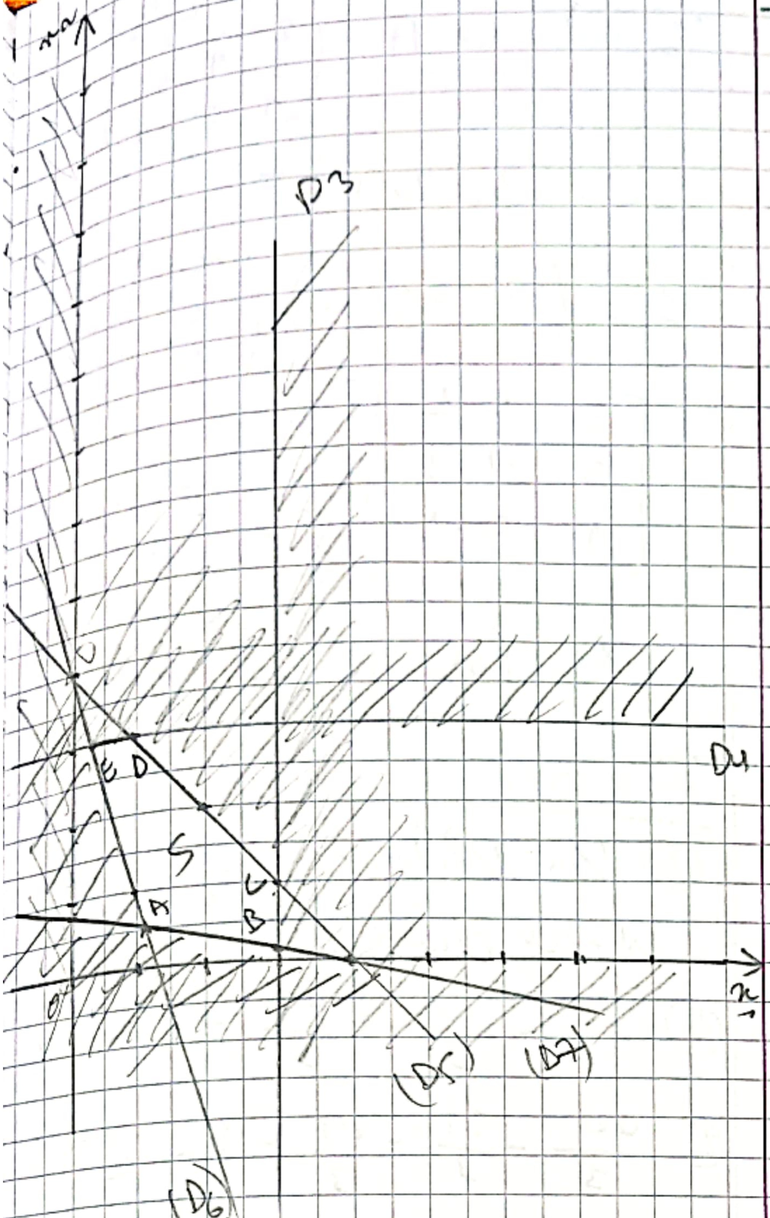
x_1	2	1
x_2	2	3

(D_6) : $6x_1 + 2x_2 = 8$

x_1	1	0
x_2	1	4

(D_7) : $x_1 + 5x_2 = 4$

x_1	0	4
x_2	$\frac{4}{5}$	0



par la méthode enumérative

on a le polyèdre ABCDE avec

$A\left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right)$ $Z_A = \frac{28}{7} = 4$

$B\left(3, \frac{1}{5}\right)$ $Z_B = \frac{31}{5}$

$C(3, 1)$ $Z_C = 9$

$D(1, 3)$ $Z_D = 11$

$E\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ $Z_E = \frac{2}{3} + 9 = \frac{29}{3}$

La solution optimale est le sommet $A\left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right)$ et $Z^* = 4$

EXO 1 :

$z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

La forme canonique

$5x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$

$\to -5x_1 - x_2 - x_3 \leq -5$

$3x_1 - 4x_2 = 4 \Rightarrow$

$3x_1 - 4x_2 \leq 4$

$-3x_1 + 4x_2 \leq -4$

$2x_1 - x_3 \leq 10$

$x_3 \leq 0 \to -x_3 \geq 0$

$x'_3 = -x_3$

$x_2 \in \mathbb{R}$ (libre)

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$ avec

$x_2^+ \geq 0$

$x_2^- \geq 0$

$W = 3x_1 - x_2^+ + x_2^- - 2x'_3 \to \max$

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2^+ + x_2^- + x'_3 \leq -5 \\ 3x_1 - 4x_2^+ + 4x_2^- \leq 4 \\ -3x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \leq -4 \\ 2x_1 + x'_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2^+ \geq 0,\ x'_3 \geq 0 \\ x_2^- \geq 0 \end{cases}$$

$Z = x_1 - x_2 \to \min$

L.F.C

$W = -x + x_2 \to Max$

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + 5x_2 = 10 \begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 10 \Leftrightarrow \\ x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ -x_1 - 5x_2 \leq -10 \end{cases}$

$x_2 \geq -3 \Leftrightarrow -x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$x_2^+ \geq 0 \quad , x_2^- \geq 0$

$W = -x + x_2^+ - x_2^- \to max$

$x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 5$

$x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \leq 10$

$-x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- \leq -10$

$-x_2^+ + x_2^- - 3 \leq 0$

$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$

Exo 2

La forme matricielle :

$Z = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to max$

$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, \ i = 1,2,3 \end{cases}$

Vecteur de Coûts $C = (3, -2, 4)^t$

V. décision $X = (x_1, x_2, x_3)^t$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$b = (3, 2, 5)^t$

$Z = (3, -2, 4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to max$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$X = (x_1, x_2, x_3)^t \geq 0$

Exo 4

1) La solution $x = \left(\frac{20}{3}, \frac{11}{3}\right)$ est-elle réalisable?

(1) : $\frac{20}{3} + \frac{22}{3} = \frac{42}{3} = 14 \leq 14$ ✓

(2) $\frac{40}{3} - \frac{11}{3} = \frac{29}{3} \simeq 9,\ldots \leq 10$ ✓

(3) $\frac{20}{3} - \frac{11}{3} = \frac{9}{3} = 3 \leq 3$ ✓

(4) $x_1 = \frac{20}{3} \geq 0 \quad x_2 = \frac{11}{3} \geq 0$

$\Rightarrow$ La solution $x = \left(\frac{20}{3}, \frac{11}{3}\right)$ est une solution réalisable puisque x vérifie tout les contraintes

2) $X = \left(\frac{20}{3}, \frac{11}{3}\right)$ est-elle optimale?

résolution graphique.

(D_1) : $x_1 + 2x_2 = 14$

x_1	0	4
x_2	7	5

(D_2) : $2x_1 - x_2 = 10$

x_1	5	7
x_2	0	4

(D_3) : $x_1 - x_2 = 3$

x_1	3	5
x_2	0	2

(D_4) : $x_1 = 0$

(D_5) : $x_2 = 0$

La solution optimal de programme est

$O(0,0) \rightarrow Z_O = 0$

$A(3,0) \rightarrow Z_A = 6$

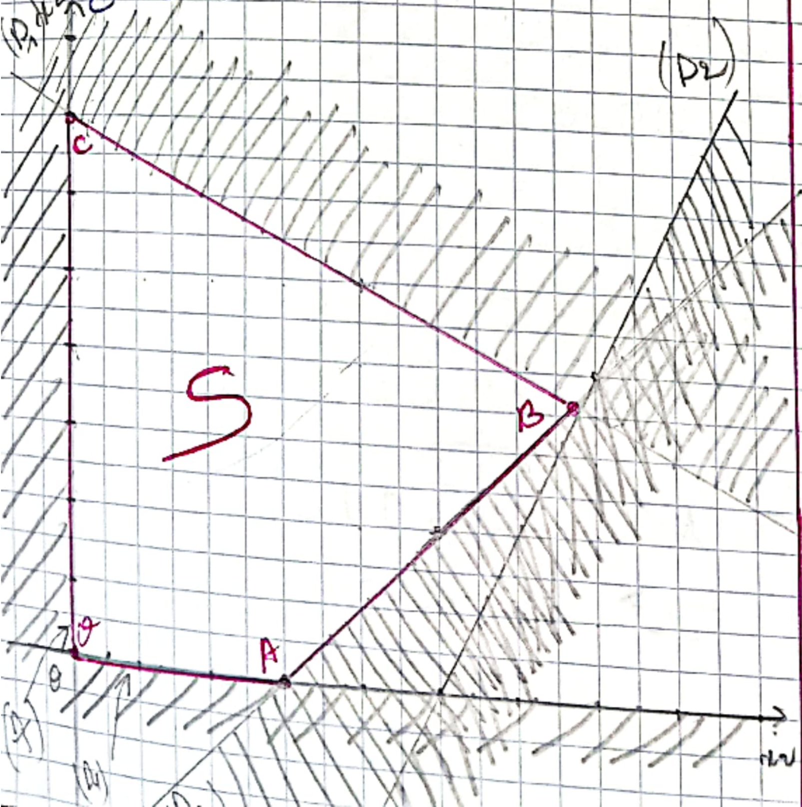
$B\left(\frac{20}{3}, \frac{11}{3}\right) \rightarrow Z_B = \frac{40}{3} + \frac{11}{3}$

$= \frac{51}{3} = 17$

$C = (0,7) \rightarrow Z_C = 7$

donc $x^* = \left(\frac{20}{3}, \frac{11}{3}\right)$ est optimal

$Z^* = 17$



II) Résolution graphique d'un PL

Les problemes réguliers

Dans cette partie on donne qq exemples de résolutions de probleme linéaire au différents cas possible

Exemple

Résoudre graphiquement le problème (P) :

(P) : $Z = 100\,x_1 + 200\,x_2 \rightarrow \max$

$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 \\ x_1 \leqslant 90 \\ x_1 \geqslant 0 ,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(D_1) : $x_1 + x_2 = 150$

x_1	60	80
x_2	90	70

(D_2) : $4x_1 + 2x_2 = 440$

x_1	70	100
x_2	80	$\cancel{20}$

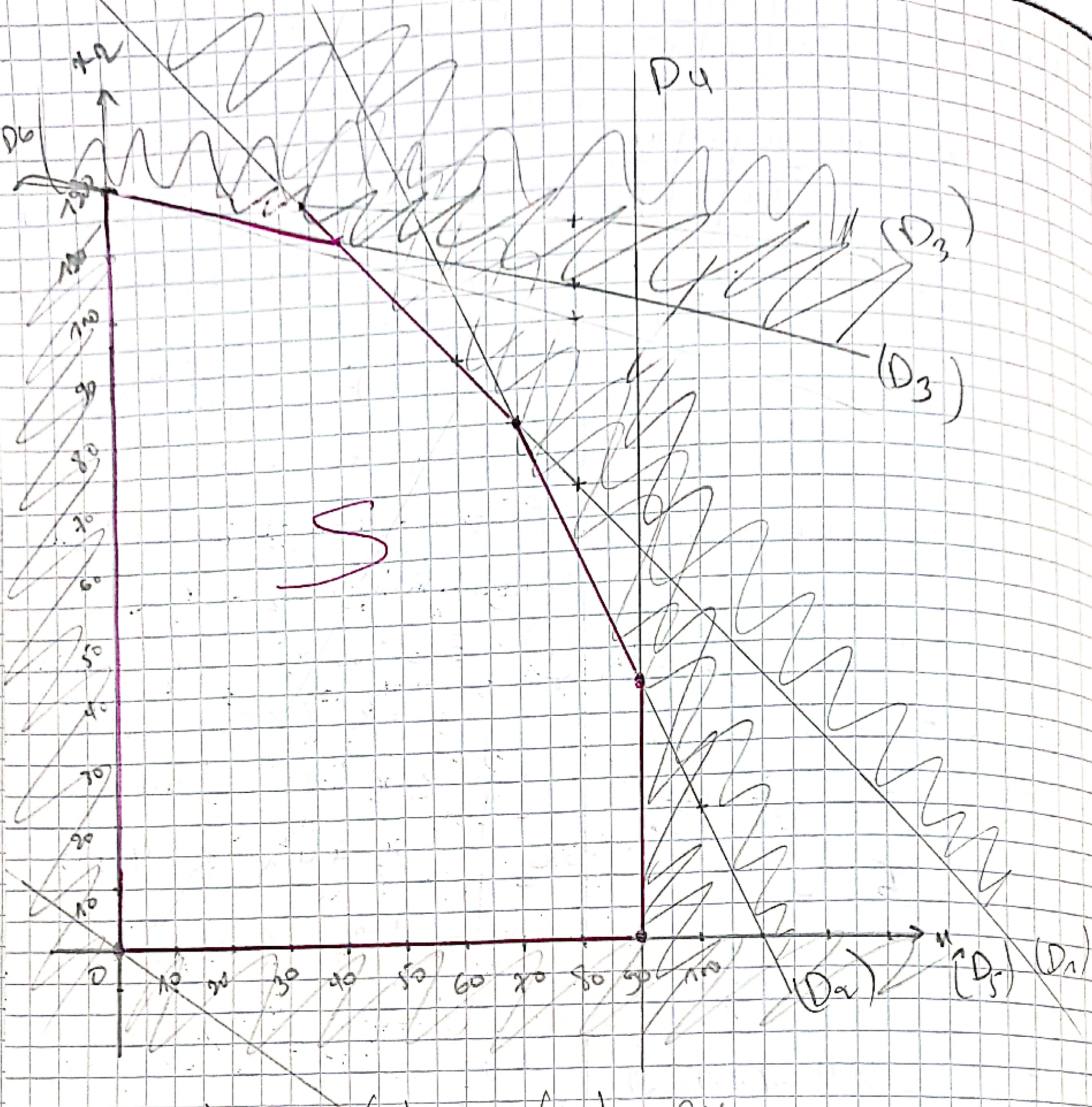
(D_3) : $x_1 + 4x_2 = 480$

x_1	0	80
x_2	120	100

(D_4) : $x_1 = 90$

(D_5) : $x_2 = 0$

(D_6) : $x_2 = 0$



$(0,120) = 100(0) + 200(120) = 24000$

$(0,0) = \quad = 0$

$(90,0) = (100 \times 90) + (200 \times 0) = 9000$

$(90,40) = (100 \times 90) + (200 \times 40) = 17000$

$(70,80) = (100 \times 70) + (200 \times 80) = 23000$

$(40,110) = (100 \times 40) + (110 \times 200) = 26000$

La solution optimale est $X^* = (40,110)$

$Z^* = 26000$

exmple 2

$Z = -2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$s.c \begin{cases} x_1 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$(D_1) = x_1 = 5$

(D_2) $2x_1 - 3x_2 = 6$

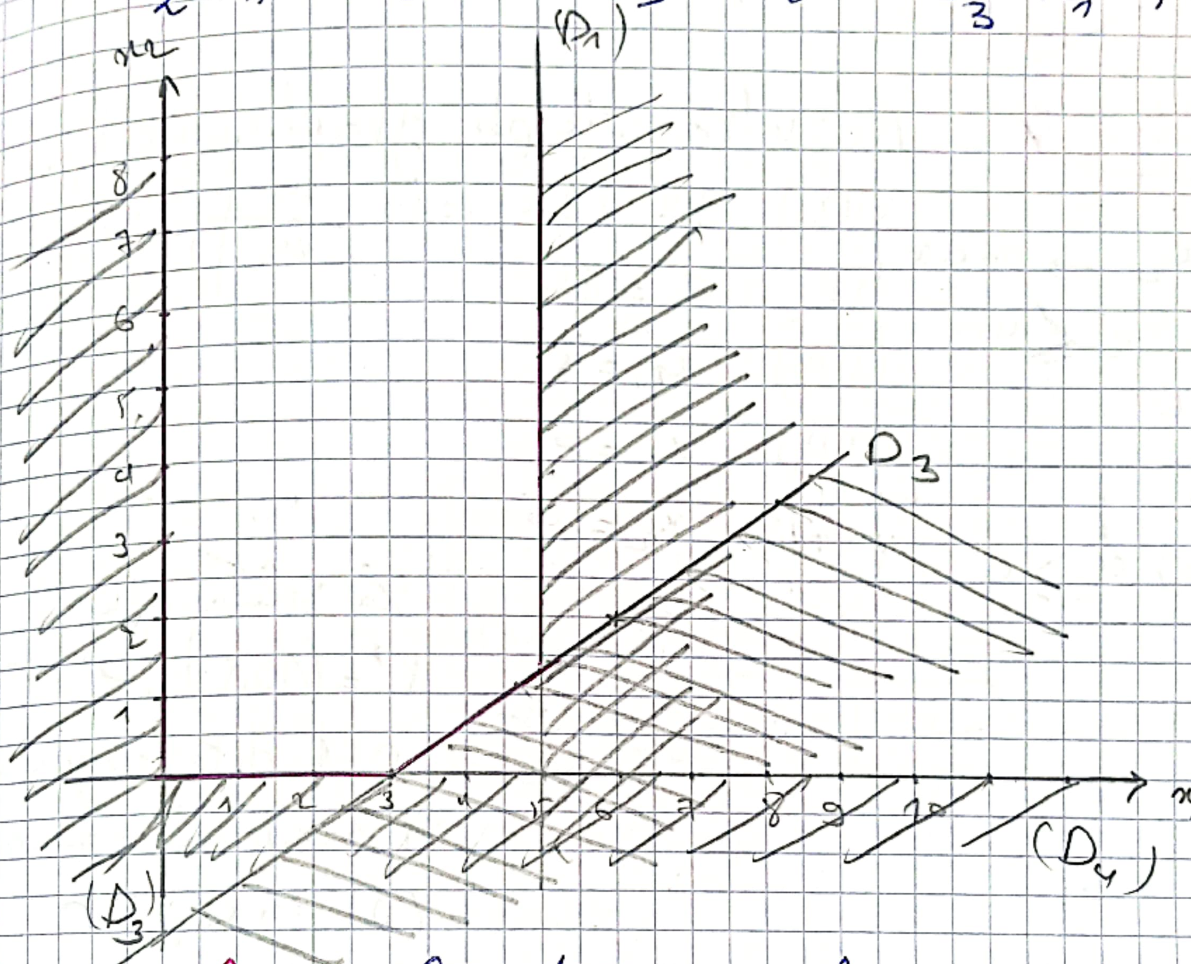
x_1	3	6
x_2	0	2

(D_3) $x_1 = 0$

D_4 : $x_2 = 0$

la solution est non borné puisque on peut agmunté la valurs de fct objectife

$2x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} x_1 \; \} x_2 = a x_2$



exmple 3 Résudre graphiquement.

$Z = 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min$

$$s.c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(D_1) : $x_1 + 2x_2 = 2$

x_1	0	2
x_2	1	0

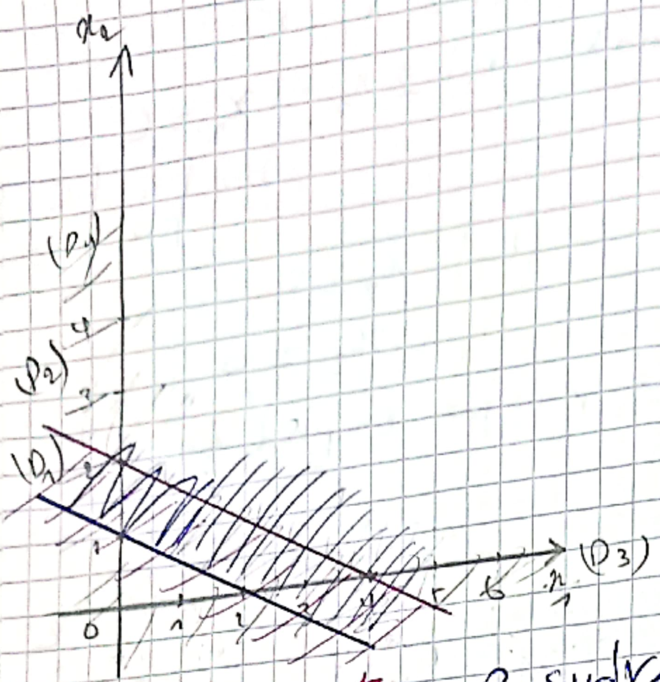
(D_2) : $2x_2 + 4x_2 = 8$

x_1	0	4
x_2	2	0

(D_3) : $x_1 = 0$

(4_4) : $x_2 = 0$,

l'espace de solution réalisable est vide le pb n'admet pas un solution



exemple 4

Resudre le pb graphiquement

$Z = x_1 + x_2 \to \max$

$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$(D_1) : 3x_1 + 2x_2 = 40$

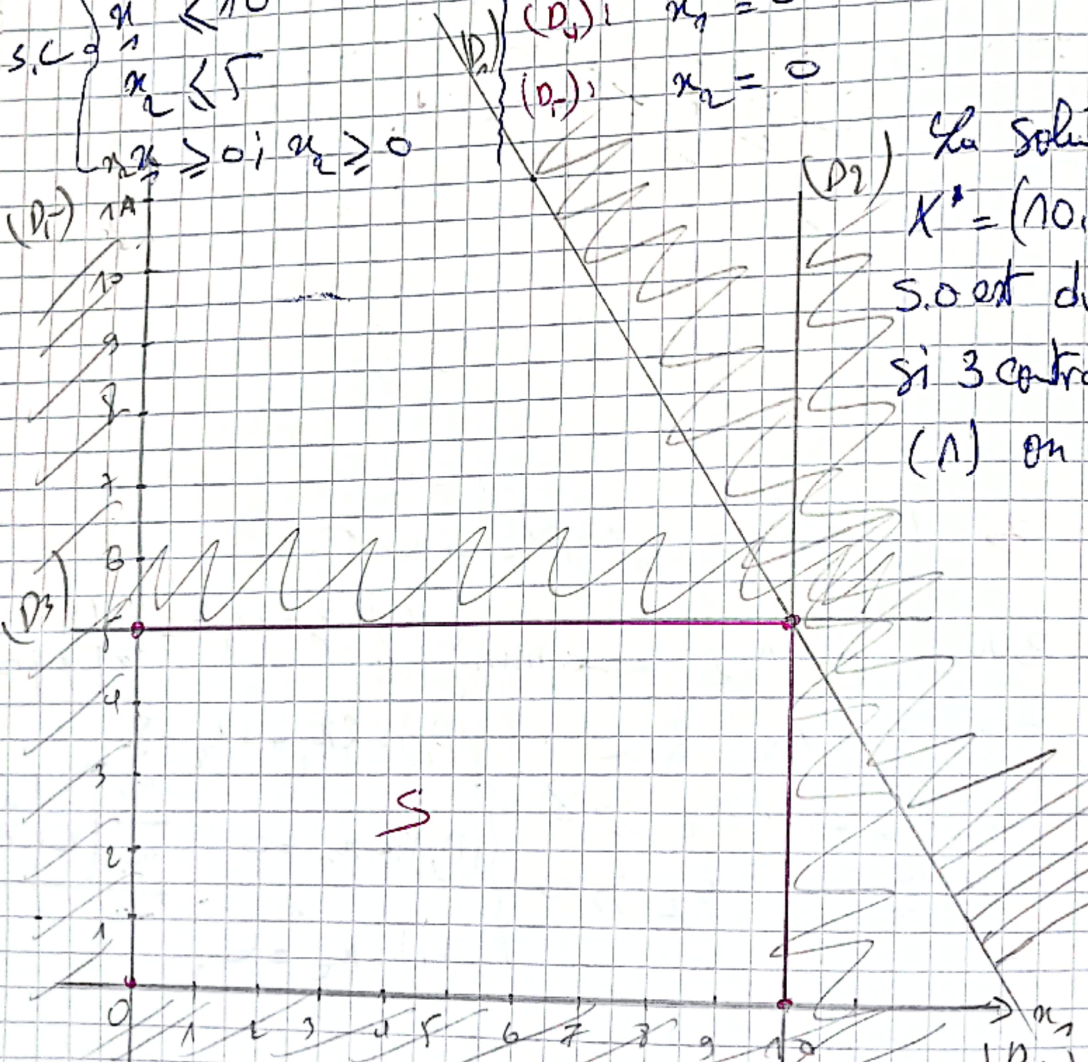
x_1	10	6
x_2	5	11

$(D_2) : x_1 = 10$

$(D_3) : x_2 = 5$

$(D_4) : x_1 = 0$

$(D_5) : x_2 = 0$



La solution optimal $X^* = (10, 5)$, $Z^* = 15$

S.O est dite dégénérée si 3 contrainte concourantes (∩) en ce point

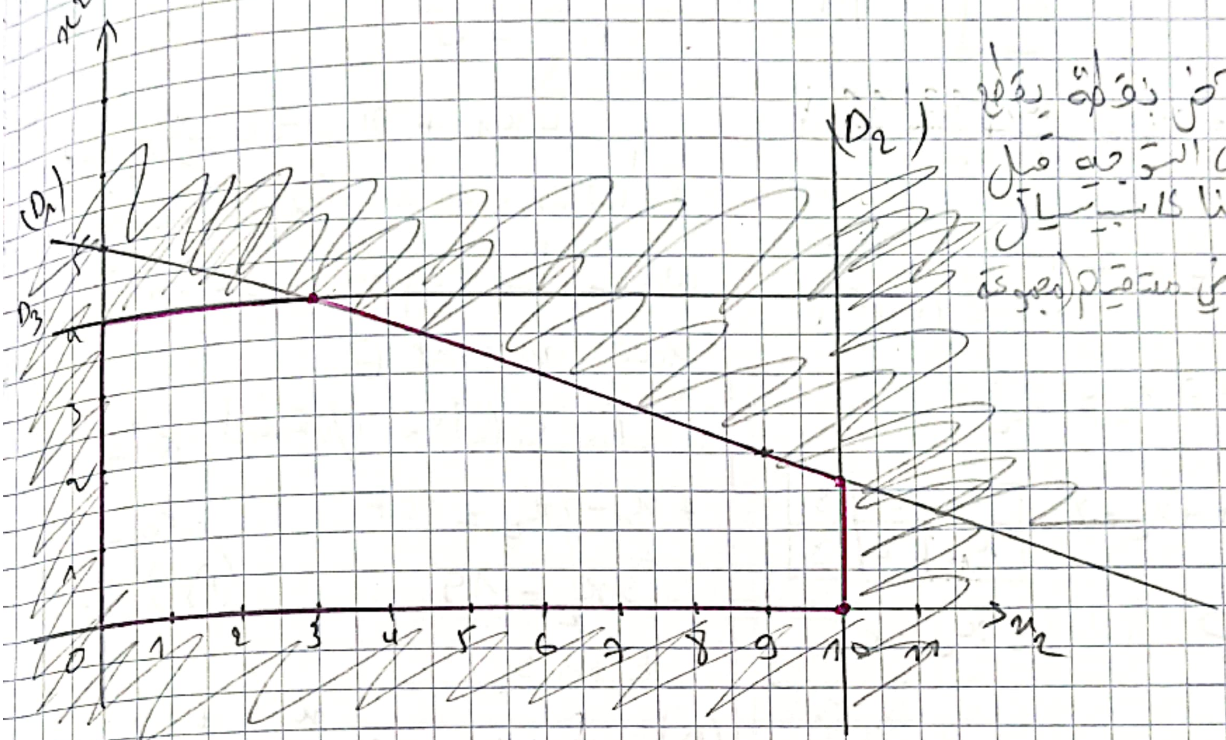
Exemple 5 :

$Z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\text{s.c}\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_1) : 2x_1 + 6x_2 = 30 \\ (D_2) : x_1 = 10 \\ (D_3) : x_2 = 4 \\ (D_4) : x_1 = 0 \\ (D_5) : x_2 = 0 \end{cases}$$

x_1	0	9
x_2	5	2



الحل هو آخر نقطة يقطع فيها معامل التوجيه قبل الخروج هنا لا يستطيع لأنه يقطع في مستقيم (مجموعة من النقط)

$(D_{Z_0}) = 0$

$$x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{1}{3} x_1}$$

$$(D_1) = 2x_1 + 6x_2 = 30 \Rightarrow x_1 + 3x_2 = 15$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 15 - x_1 \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + 5}$$

$(D_{Z_0}) \parallel (D_1)$ puisque $a = -\frac{1}{3}$

(D_1) l'ensemble des solution Realisable de Probleme P1

Algorithme de Simplex

inverse

① $x = b$; $\exists A^{-1}$, $\det \neq 0$; $Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$

$I x = A^{-1} b$

$x = A^{-1} \cdot b$

TD 05/11/2023

exo 5

(D_1) : $x_1 - 8x_2 = 2$

x_1	2	10
x_2	0	1

(D_2) : $x_1 - 4x_2 = 4$

x_1	4	8
x_2	0	1

(D_3) : $x_1 - 2x_2 = 8$

x_1	8	10
x_2	0	1

(D_4) $x_1 - x_2 = 11$

x_1	13	11
x_2	2	0

(D_5) $7x_1 - 2x_2 = 107$

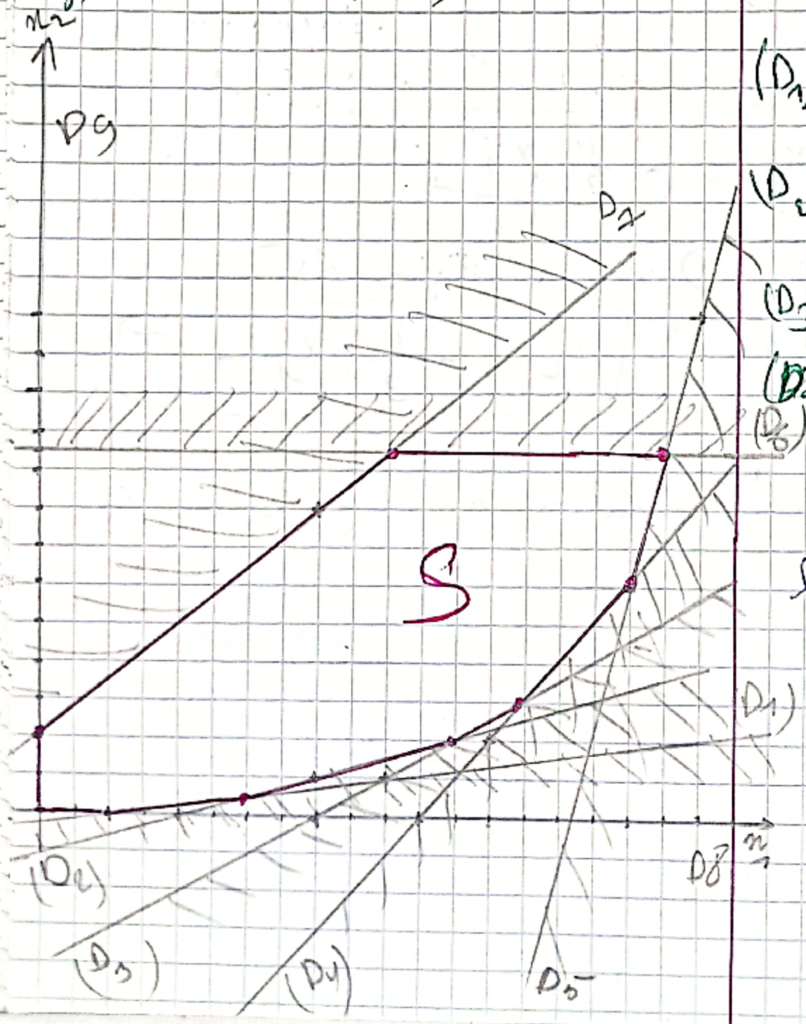
x_1	17	19
x_2	6	13

(D_6) : $2x_2 = 19 \Rightarrow x_2 = \frac{19}{2}$

(D_7) : $-3x_1 + 4x_2 = 8$

x_1	0	8
x_2	2	8

(D_8) : $x_1 = 0$ $\quad (D_9)$: $x_2 = 0$



$x_2 = \frac{19}{2}$

$7x_1 - 19 = 107$

$\Rightarrow 7x_1 = 107 + 19$

$x_1 = \frac{126}{7} = 18$

$X^* = \left(18, \frac{19}{2}\right)$

$Z^* = 81{,}5$

$D_8 = 0$

$4x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -4x_2$

l'intersiction de Droite izocat avec la region realisable ce fait au point E

la solution optimal $X^* =$

$7x_1 - 2x_2 = 107$

$2x_2 = 19$

intersection $(D_5) \cap (D_6)$

Exo 3

(D_1) : $-x_1 - x_2 = -1$

x_1	0	1
x_2	1	0

(D_2) : $x_1 + 4x_2 = 2$

x_1	2	0
x_2	0	$\frac{1}{2}$

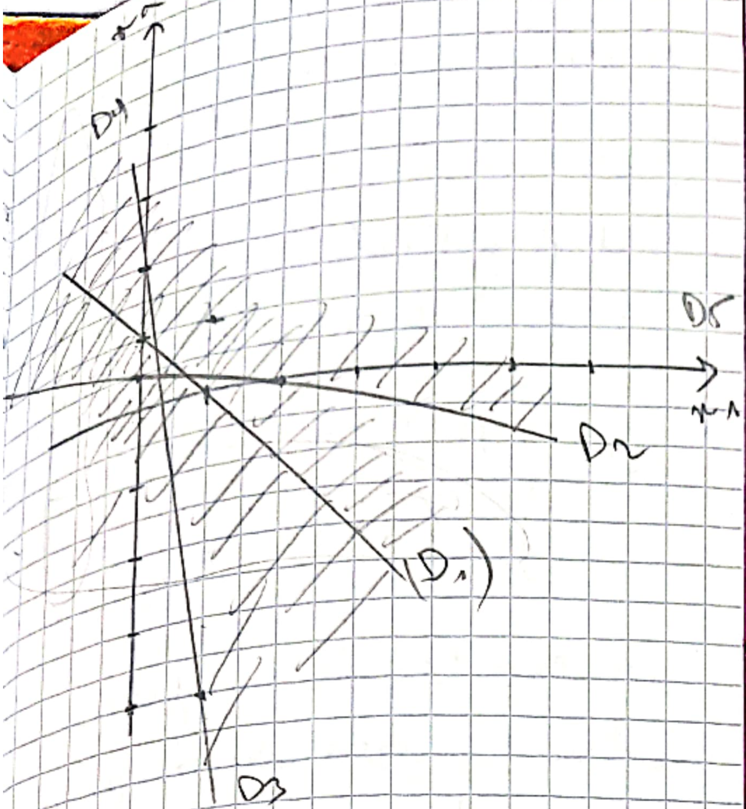
(D_3) : $6x_1 + x_2 = 2$

x_1	0	1
x_2	2	-4

(D_4) $x_1 = 0$

(D_5) $x_2 = 0$

le pb n'admet pas un solution



EXO5

2) (D_1) : $2x_1 + 3x_2 = 12$

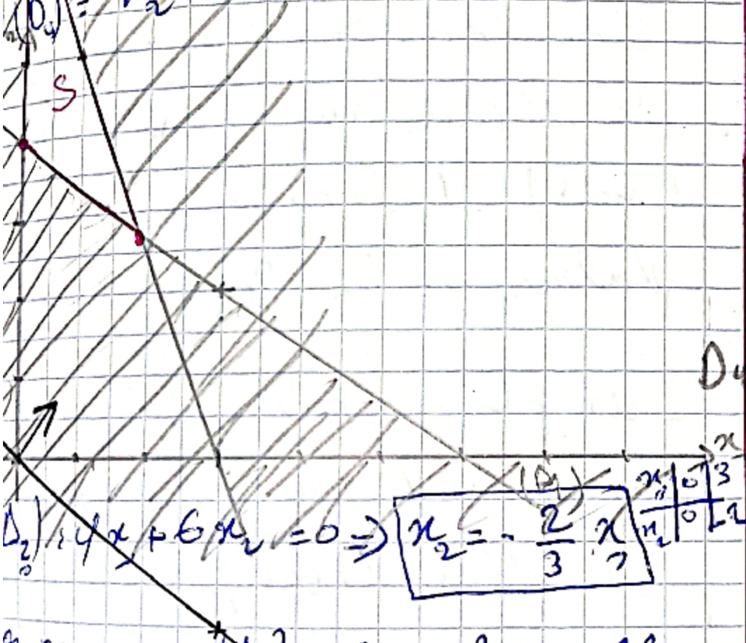
x_1	3	0
x_2	2	4

(D_2) : $5x_1 + 2x_2 = 15$

x_1	3	1
x_2	0	5

(D_3) : $x_1 = 0$

(D_4) : $x_2 = 0$



(D_{z_0}) : $4x_1 + 6x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{3} x_1}$

x_1	0	3
x_2	0	-2

On remarque (D_1) : $2x_1 + 3x_2 = 12$ a la même c.d que (D_{z_0}) qui est $a = -\frac{2}{3}$ $X^* = (0, \frac{15}{2})$

$Z^* = 45$

$Z = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \min$

(D_1) : $x_1 + x_2 = 4$

x_1	2	1
x_2	2	3

(D_2) : $6x_1 + 2x_2 = 8$

x_1	0	1
x_2	4	1

(D_3) : $x_1 + 5x_2 = 4$

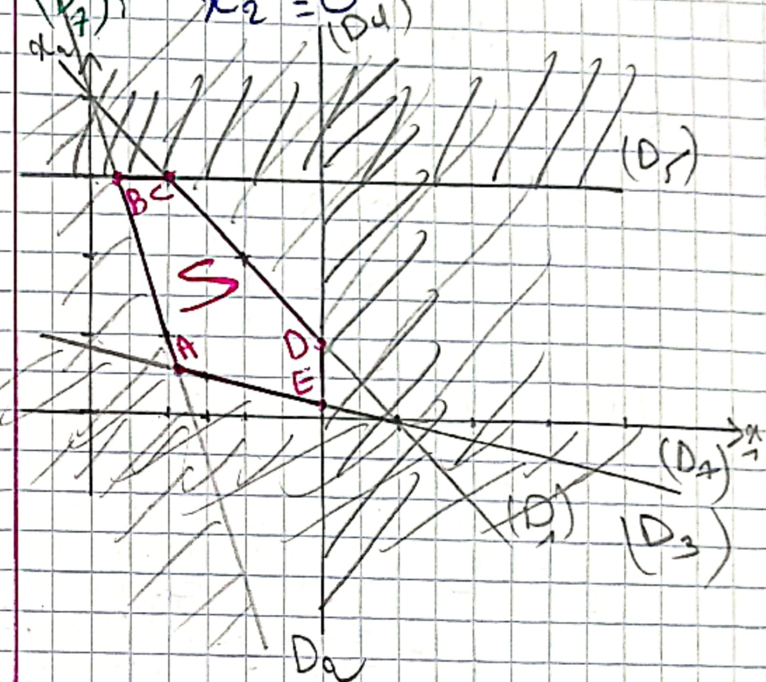
x_1	4	3/2
x_2	0	1/2

(D_4) : $x_1 = 3$

(D_5) : $x_2 = 3$

(D_6) : $x_1 = 0$

(D_7) : $x_2 = 0$



A : $6x_1 + 2x_2 = 8$

$x_1 + 5x_2 = 4$

$-28x_2 = -16$

$x_2 = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

$6x_1 + \frac{8}{7} = 8 \Rightarrow x_1 = 8 - \frac{8}{7}$

$\boxed{x_1 = \frac{8}{7}}$

$A\left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right)$ $Z = \frac{39}{7}$

$B(D_2) \cap (D_5)$

$6x_1 + 2x_2 = 8$

$6x_1 + 6 = 8$

$x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow Z = \frac{29}{3}$

$B\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

$C : (D_1) \cap (D_5)$

$x_1 + 3 = 4$

$x_1 = 1 \quad C(1, 3)$

$Z = 11$

$D : (D_1) \cap (D_4)$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1$

$D(3, 1)$

$Z = 9$

$E : (D_4) \cap (D_3)$

$x_1 + 5x_2 = 4$

$x_2 = \frac{1}{5} \quad E\left(3, \frac{1}{5}\right)$

$Z = \frac{33}{5}$

Chapitre 3 - Méthode et Algorithme de symplexe.

Introduction

Soit l'un Problem de p.L

$Z = C^t x \to \max$ — ①

$S.C \begin{cases} AX = b \to ② \ (x_j \geq 0) \\ X \geq 0 \to ③ \end{cases}$ (contraint)

la method de symplexe est un tecnique algebrique qui permet de trouver la solution opt d'un pL d'un façon ordoner et consitve. C'est un method iterative qui ce Base sur le fate de partire d'un solution de Base realisable (solution de départe nul) et d'ogment (max) et de munie (min) la valeur de la fonction objett.

- un pL genéral peut être formul comme suit on

on désire trouvez la valeur de n variable de désition non négative satisfison n équation ou inéquation linéaire (contrainte)

Déf ①: tout Vecteur x vérifiant les contraintes ② et ③ est appeler solution réalisable (admissible) du problème.

Déf 2: une solution réalisable x^0 est optimale si $c^t x^0 = \max(c^t x)$, pour toute solution réalisable.

Déf 3: une solution réalisable x est dite de base si $(n-m)$ de ces composante sont nulle, et aux autre $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ corespondant à m Vecteur $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}$ de la matrice de condition A sont linéairement indépendant.

Déf 4: L'ensemble $J_B = \{J_1, \dots, J_n\}$ est appeller ensemble des indices de base

$J_H = J_N$ non base / Hors base

$J = J_B \cup J_H$

J_B = ensemble d'indice de Base

J_H = // /// Hors Base

avec $J_B \cap J_H = \emptyset$

Déf 5 une solution réalisable $x = x(j)$ est une solution de Base si $x_H = x(J_H) = 0$

$\det A_B \neq 0$

telle que A_B est la matrice de la Base.

Déf 6: Une solution de Base x est dite non dégénérée si $x_j > 0 \ \forall j \in J_B$.

Exemple Soit une système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

trouver la solution basique liée a la Base $\{3, 4\}$

Sol

$J = J_B \cup J_H$

$J = \{1, 2, 3, 4\}$

$J_B = \{3, 4\}$, $J_B \cap J_H = \emptyset$

$J_H = \{1, 2\}$

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$J_B = \{3, 4\}$, $J_H = 1, 2$

$$A_B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \quad \det A_B = 4 \neq 0$$

$$A_H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ A = [A_B \mid A_H]$$

$x = (x_B \mid x_H)$

$x_B = (x_3, x_4)$; $x_H = (x_1, x_2) = (0, 0)$

$A_B x_B = b$

$x = (0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$

expl 2

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$x_2 + x_4 = 3$

Determiner les Base et le Base réalisable de system

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B_1 = [A^1, A^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_{B_1} = B_1^{-1} \cdot b$

$\det B_1 = 1 \neq 0 \Rightarrow B_1^{-1} \exists$

$B_1 = \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$

$B_1 = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$ $B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_{B_1} = B_1^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0$

$x_{B_1} \geq 0$

B_1 est un Base réalisable

② $B_2 = [A^1 A^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det B_2 = 0$

$\Rightarrow B_2$ n'est pas base

3) $B_3 = [A^1 A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det B_3 = 1 \neq 0 \Rightarrow B_3^{-1} \exists$

$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$

$B_3^{-1} = B_3$.

$x_{B_3} = B_3^{-1} \cdot b = b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0$

4) $B_4 = [A^2 A^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(B_4) = -1 \neq 0 \Rightarrow$

$B_4^{-1} \exists$

$\left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$

$= \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right]$

$= \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right]$

$= \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right]$

$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

1) si un problème de pl admet au moins une sol réalisable optimale fini, il existe au moin un sol réalisable optimale de base.

2) puisque le nombre de sol réalisable de base est fini, comme le nombre de base elle même et que l'on ait savoir calculer ces sols, le probleme est entièrement résolu du point de

Vue théorique :

3) ou pratique la méthode qui considérait à résoudre tous les systems donnant une sol de base est à exclue car elle conduit à un volume considérable de calcul.

Interet de la méthode de semplexe

1) converger vers une solution de base réalisable optimale si elle existe.

2) Verifier la comptabilité de équations ou la redondance des système

3) savoir si le problème est possible ou non et dans l'affirmative

4) Metre en evidence d'absence de sol réalisable optimale finie

Dévelopement de l'algorithme

Exemple Resoudre par la méthode de semplexe le P.L suit :

$$Z = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\text{s.c} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 3000 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ x_1 + 3x_2 \leq 1800 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2 \end{cases} \quad (1)$$

Etape 1 (1) ⇔ (2)

Ecrire le p.L sous la forme standard :

$$Z = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\text{s.c} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 3000 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 2400 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 1800 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases} \quad (2)$$

x_3, x_4, x_5 sont des variables d'ecarts

V.b \ V.ht	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	limitation / Rapport L/R
x_3	5 (pivot)	3	1	0	0	3000	$\frac{3000}{5}=600$
x_4	2	3	0	1	0	2400	$\frac{2400}{2}=1200$
x_5	1	3	0	0	1	1800	$\frac{1800}{1}=1800$
Z	8	6	0	0	0	$\boxed{0}$	—
x_1	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	600	1000
x_4	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	1200	$\frac{2000}{3}$
x_5	0	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	1200	500
Z	0	$\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	$\boxed{-4800}$	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	300	
x_4	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	300	
x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	500	
Z	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-5400}$	

Cette base ne donne pas une sol opt psq les variables de Z n'est pas nega ou nul

divise la ligne de pivot sur pivot

On ait à l'optime car tous les coeffisont de Z sont négative ou nulle Alors la solution optimale

$$X^* = (300, 500, 0, 300, 0) \quad Z^* = 5400$$

tout les coefficient de Z doit être négative ou null c'est-à-dire on est bien a l'optimalité

changement de bas

V. entrer de la base

V. sorter " "

V.e.b : on choisit le coeff de la fct economique le plus positif

V.s.b : on effectue les Rapport contraints (limitation Rapport) sur le coeff correspendant de la colon de pivot.

- la ligne de pivot correspond le plus petit Rapport positif.

- le pivot va se trouver à l'intersection de la colonne de pivot et la ligne de pivot / on détermine la var entrant la base et la var sortante qui deviendra hors base donc nulle.

- tous les element de la colonne de pivot autre le pivot sont mets a "0".

- règle de simplificatio si la ligne de pivot une colone en 0 colonne reste inchanger

- chaque fois que la colone pivot croise une ligne de pivot en 0 copie la ligne

- pour les autres elements est le plus rapide d'appliquer la methode de rectangle.

TD [illegible]

Exo 1

Résoudre par la méthode de simplexe le p.L suivi :

$Z = 35x_1 + 45x_2 + 42x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 1,5x_2 + 1,5x_3 \leq 240 \\ 0,5x_1 + x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 240 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

la forme standard pL

$Z = 35x_1 + 45x_2 + 42x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 1,5x_2 + 1,5x_3 + x_4 = 240 \\ 0,5x_1 + x_3 + x_5 = 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 240 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \ldots 6 \end{cases}$$

VHB / VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	R
x_4	1	1,5	1,5	1	0	0	240	240/1,5 = 160
x_5	0,5	0	1	0	1	0	120	/
x_6	2	1	1	0	0	1	240	240
Z	35	45	42	0	0	0	$\boxed{0}$	
x_2	2/3	1	1	2/3	0	0	160	240
x_5	0,5	0	1	0	1	0	120	240
x_6	4/3	0	0	-2/3	0	1	80	60
Z	5	0	-3	-30	0	0	$\boxed{-7200}$	
x_2	0	1	1	1	0	-1/2	120	
x_5	0	0	1	1/4	1	-3/8	90	
x_1	1	0	0	-1/2	0	3/4	60	
Z	0	0	-3	-55/2	0	-15/4	$\boxed{-7500}$	

$X^* = (60, 120, 0, 0, 90, 0)$

$Z^* = 7500$ Optimal

10-12. 2023

Chapitre : Methode de Simplexe

Variable artifficielle

Methode de Big-M

Dans un programme Standard provenant d'un programme canonique de type

$$Z = 25x_1 + 18x_2 \rightarrow \max$$

$$s.c \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 50 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

F.S $Z = 25x_1 + 18x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 + 5x_2 + e_1 = 35$$

$$3x_1 + 4x_2 + e_2 = 50$$

$$x_i \geq 0, \; e_i \geq 0 \quad i = \{1, 2\}$$

Si on fixe $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow e_1 = 35$, $e_2 = 50$ Variable de base

$\Rightarrow$ améliorer le process $\rightarrow$ améliorer la Valeur de Z

$\Rightarrow$ jusqu'a tou le ~~les~~ coifficient de Z sont négative ou null pour un program de Max, ou tou les Coefficient de Z doivet positive ou null pour un programme de Min.

exemple

$$Z = x + y \rightarrow \min$$

$$s.c \begin{cases} 7x + 5y \geq 40 \\ x + 4y \geq 9 \\ x \geq 0, \; y \geq 0 \end{cases}$$

F.S

$$Z = x + y + 0e_1 + 0e_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 7x + 5y - e_1 = 40 \\ x + 4y - e_2 = 9 \\ x \geq 0, y \geq 0, \; e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si on fixe $x = 0, y = 0 \Rightarrow$ $e_1 = -40$, $e_2 = -9$

Cette Sol n'est pas admissible car elle ne respecte pas les Contraintes de positivitées.

$\Rightarrow$ introduire les Variable artifficielle afin d'obtenir un programme Standare de type précedente.

Ces Variable (V.a) jou le mém role que les Variable decard de programme précedent elle sont afecter de coeffecient positive. elle sont trété comme les autre Variable dans les calculs. notre programme devient

$Z = x + y + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_2 \to Min$

$-Ma_1 - Ma_2 \to max$

$$\begin{cases} 7x + 5y - e_1 + a_1 = 40 \\ x + 4y - e_2 + a_2 = 9 \\ x \geq 0, y \geq 0, e_1, e_2 \geq 0, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

M est un Valeur positive trés trés grand ($M \to +\infty$)

enatan a loptimon l'orsque le coefficient de Z) positive ou nul dans le cas de progame de min.

// négative ou null dans le cas de progame de max

les Variable artifficielle entervient exclusife dans les contrainte de type egalité ou bien inegalité de type superieur au egale trouvé dans le second de segon nombre étant positife. est suri andépondament de la natur de l'objectif. recharches d'un maximon ou minimom.

- si l'objectife est un max les V.A doive être pinalizé dans la fonction objectife par un coefficiant de Valeur absulu trésélvé mais précidé d'un signe (-) ou on le noté (-M) avec M trés grand (M >>>)

- si l'objectife est de min les V.A doive etre pinalisé dans la fct economique par coefficient de Valeur absulu trésélve main précé d'un signe (+) ou on le noté (+M)

- M est tré grand pour que l'ôn soi sur quelle V.A soi exclu de la solution optimal

$Z = x + y + 0e_1 + 0e_2 + Ma_1 + Ma_2 \to Min$

$$\begin{cases} 7x + 5y - e_1 + a_1 = 40 \\ x + 4y - e_2 + a_2 = 9 \\ x_i \geq 0, e_i \geq 0, a_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$$

C_j	1	1	0	0	M	M	b	R
V_b \ V.H	x	y	e_1	e_2	a_1	a_2		
$M\ a_1$	7	5	-1	0	1	0	40	$\frac{40}{5} = 8$
$M\ a_2$	1	4	0	-1	0	1	9	$\frac{9}{4} = 2,4$
Z_j $Ma_1 + Ma_2$	$8M$	$9M$	$-M$	$-M$	M	M		
$C_j - Z_j$	$1-8M$	$1-9M$	M	M	0	0		
$M\ a_1$	$\frac{23}{4}$	0	-1	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{115}{4}$	5
$1\ y$	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	9
Z_j	$\frac{1}{4} + \frac{23M}{4}$	1	$-M$	$-\frac{1}{4} + \frac{5M}{4}$	M	$\frac{1}{4} - \frac{5M}{4}$		
$C_j - Z_j$	$\frac{3}{4} - \frac{23M}{4}$	0	M	$\frac{1}{4} - \frac{5M}{4}$	0	$-\frac{1}{4} + \frac{9M}{4}$		
$1\ x$	1	0	$-\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{5}{23}$	5	
$1\ y$	0	1	$\frac{1}{23}$	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{7}{23}$	1	
Z_j	1	1	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$		
$C_j - Z_j$	0	0	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$	$M - \frac{3}{23}$	$M - \frac{2}{23}$		

tout les coefficient de la ligne $c_j - z_j$ sont positife ou null alors l'optiment et atteint

$X^* = (5, 1)$

$z^* = 5 + 1 = 6$

$a_1 = 40 - (7x + 5y - e_1) = 40 - (7(5) + 5(1) - 0)$

$= 40 - (35 + 5) = 40 - 40 = 0$

$a_2 = 9 - (x + 4y - e_2)$

$= 9 - (5 + 4(1) - 0)$

$= 9 - 9 = 0$

Exemple Résoudre par la méthode de simplex le P. L.

$z = 40x + 30y \to Max$

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -2x + 3y \geq 12 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Sol

$z = 40x + 30y + 0e_1 + 0e_2 \to Max$

$$\begin{cases} x + y + e_1 = 5 \\ -2x + 3y - e_2 = 12 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$z = 40x + 30y + 0e_1 + 0e_2 - Ma_1$

$x + y + e_1 = 5$

$-2x + 3y - e_2 + a_1 = 12$

$x \geq 0,\ y \geq 0\ e_1 \geq 0\ e_2 \geq 0\ a_1 \geq 0$

C_j	40	30	0	0	$-M$	b	R
V.B \ V.H	x	y	e_1	e_2	a_1		
$0 \times e_1$	1	1	1	0	0	5	$5/1 = 5$
$(-M) \times a_1$	-2	3	0	-1	1	12	$12/3 = 4$
z_j	$2M$	$-3M$	0	M	$-M$		
$c_j - z_j$	$40-2M$	$10+M$	0	$-M$	0		
$0 \times e_1$	$5/3$	0	1	$1/3$	$-1/3$	1	$3/5$
$30 \times y$	$-2/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	4	-6
z_j	-20	30	0	-10	10	/	
$c_j - z_j$	60	0	0	10	$-M-10$		
$40 \times x$	1	0	$3/5$	$1/5$	$-1/5$	$3/5$	
$30 \times y$	0	1	$2/5$	$-1/5$	$1/5$	$22/5$	
z_j	40	30	36	2	-2	/	
$c_j - z_j$	0	0	-36	-2	$-M+2$		

tout les coficiant de la line $c_j - z_j$ sont négative ou null alors l'optiment et atteint

$X^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{22}{5}\right)$

$z^* = 40\left(\frac{3}{5}\right) + 30\left(\frac{22}{5}\right)$

$= 24 + 132 = 156$

$a_1 = 12 - (-2x + 3y - e_2)$

$= 12 - \left(-2\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{22}{5}\right) + 0\right)$

$= 12 - \left(\frac{-6}{5} + \frac{66}{5}\right)$

$= 12 - \frac{60}{5} = 12 - 12 = 0$

Exo Resoudre par la méthode de simplexe

$$z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 7/3 \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,2,3} \end{cases}$$

* La forme Standard

$$z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 0e_1 + 0e_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_1 = \frac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - e_2 = \frac{7}{3} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2,3}, \; e_i \geq 0 \; i = \overline{1,2} \end{cases}$$

La sol n'est pas réalisable

* Méthod de Big-M :

$$z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 0e_1 + 0e_2 - Ma_1 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_1 = \frac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - e_2 + a_1 = \frac{7}{3} \\ x_i \geq 0 \; i = 1,2,3 \quad e_1, e_2 \geq 0, \; M \geq 0 \end{cases}$$

c_j	3	4	1	0	0	$-M$	b	R
VB \ VH	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a_1		
$0 \times e_1$	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$	[illegible]
$(-M) \times a_1$	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$	[illegible]
z_j	$-M$	$-2M$	$-3M$	0	M	$-M$		
$c_j - z_j$	$3+M$	$4+2M$	$1+3M$	0	$-M$	0		
$0 \times e_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{3}$
$1 \times x_3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{3}$
z_j	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$c_j - z_j$	$\frac{8}{3}$	5	0	0	$\frac{1}{3}$	$-M-\frac{1}{3}$		
$0 \times e_1$	0	0	0	1	1	-1	$\frac{1}{3}$	
$4 \times x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	
z_j	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$c_j - z_j$	$\frac{5}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-M-\frac{1}{2}$		

Cas particulier :

1er cas solution non réalisable lorsque la méthode de symplex est utilisée et si une de variables artificielles se trouve parmi les variables de base dans le tableau final, on conclut que le modèle n'as pas de solution réalisable

Exemple

$$Z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow max$$

$$s^c \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$$

2ème cas si la troisième étape d'une itération q cq de la méthode du symplex, il n'y a pas de coefficient positifs dans la colonne de la variable qui doit rentrer dans la base cela implique que la solution optimale est au donne

Exemple

$$Z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3ème cas cas d'un solution multiple

Exemple

$$Z = 2x_1 - x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$$

dégénérée un solution de base d'un PL est dite dégénérée si une ou plusieurs des variables de base égale zéro.

Chapitre 04 : Dualité en P.L

Introduction dans ce chapitre on va voir quand on peut apparteir d'un P.L donné (qui sera appelé problème primal) construire une autre P.L appelé dual entre ces deux programme il y a des liens très important. à part l'intérêt mathématique ou numérique, pour l'étude des pbs dual un aspect très important est l'interprétation économique des variable dual. C'es variable représent des coûts marginaux et peut être considérer comme l'augmentation maximal de bénéfice par rapport à la sol opt qui résulterait de l'utilisation d'un unité supplémentaire de l'une des résource

Le tableau suivant résume la correspondance primal dual. comment cherche le dual de primal d'un PL.

Primal (dual)	dual (primal)
Max	Min
Vecteur x	Vecteur y
n Variable de decision	n contraints
m Contraints	m Variable de decision
Contrainte $\leq$	Contrts $\geq$
A	A^t
coeff-f^{ct} objectif c	Réssource B
si $\sum_{j=1} a_{ij} x_j = b_i$	y_i libre
si y_i est libre	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = c_j$

Méthode (Procédure)

$$Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

primal (P)

$$W = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3 \rightarrow min$$

$$\begin{aligned} & y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ & 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ & y_1 \leq 0,\ y_2\ qcq,\ y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

dual (D)

$= \rightarrow qcq$

① pour un prb max min inversé uniquement les opérateurs $=$ ou qcq

② inversé tout les opérateurs

Exemple 2

trouvé le dual de primal

$$Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \rightarrow Min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_3 \leq -10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\ qcq,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

pour un prb min max

① inversé tout les opérateurs

② inversé uniquement $=$ ou qcq

$$W = 12y_1 + 8y_2 - 10y_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 2y_1 - 3y_2 = 3 \\ y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2\ qcq,\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 3

$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$	$W = 18y_1 + 8y_2 + 14y_3 \rightarrow min$
$-x_1 + 3x_2 \leq 18$	$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$
$x_1 + x_2 \leq 8$	$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$
$2x_1 + x_2 \leq 14$	$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$
$x_i \geq 0,\ i = 1,2$	

$Z = 2x_1 + 2{,}5x_2 \rightarrow min$	$W = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \rightarrow max$
$x_1 + 5x_2 \geq 5$	$y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 2$
$x_1 + 2x_2 \geq 4$	$5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 2{,}5$
$3x_1 + 2x_2 \geq 6$	$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$
$x_i \geq 0\ i = 1,2$	

Théorème de dual (faible)

soit λ une solution admissible du dual et x une solution admissible de primal

Alors $Z = Cx \leq \lambda b = \omega$

Autrement dit.

chaque valeur admissible de critère dual est majorée pour chaque valeur admissible des critère primal

remarque Cette propriété se fait pour que X et λ soit optimal

c-à-d: $$\begin{cases} (c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}) x_j = 0 \quad j = \overline{1-p} \\ \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad \forall j = \overline{1-m} \end{cases}$$

sol réal dual

équation de écart complémentaire

exemple

$t = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

$$(P) \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1-2} \end{cases}$$

trouver le dual de (P)

(D): $\omega = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \rightarrow \max$

$$(D) \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

FS (P)

$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_5 = 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

FS. D

$\omega = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_5 = 3 \\ y_i \geq 0, \; i = \overline{1-5} \end{cases}$$

La sol $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ est-elle optimal ?

$y_1(2x_1 + x_2 - 3) = 0$

$y_2(2x_1 - x_2 - 5) = 0$

$y_3(x_1 + 4x_2 - 4) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 \neq 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(2 - 2y_1 - 2y_2 - y_3) = 0 \\ x_2(3 - y_1 + y_2 - 4y_3) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

cet sol n'est pas opt car on a y_3 négative et on note avant que $y_3 \geq 0$

$\begin{cases} x_1 = \frac{26}{9} \\ x_2 = \frac{7}{9} \end{cases}$? oui optimal

Corollaire

si X^* et λ^* sont respectivement des solution réalisable (admissible) de programme (P) et (D) et cas de plus

$Cx^* \geq \lambda^* b$ | x^* et λ^* sont respectivement des solutions optimales de (P) et
alors : Si $Cx^* = \lambda^* b$ | (D)

théorème de dualité

soient (P) et (D) de

_ si (P) et (D) on des solution réalisable alors il sont des solution optimal et on a $Z^* = Max(P) = min(D)$

_ si les entre au à un optimum non borné l'otre n'as pas de solution réalisable

Corollaire

le prb primal P a une sol optimal ssi le prb dual a un sol opt

Algorithme dual de symplex

il existe des programme linéaire ca forme canonique qui initialement ont tout leurs cout réduit non négative et qui ont quand même une sol de base non réalisable psq seten élément de coute droit sont négatif

Exeple

$$z = 15x_1 + 20x_2 + 12x_3 \to min$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \geq 3$$

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 \geq 2$$

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \geq 2{,}5$$

$$x_i \geq 0$$

Chapitre n° : 5

Application problème de transport

exemple problem de transport

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	offre	
U_1	100 / 5	20 / 4	11	5	11	8	120	20
U_2	7	190 (210) / 2	110 / 18	11	90 / 4	5	300	110 90
U_3	10	7	90 / 11	210 / 17	70 / 8	12	410	320
U_4	11	7	15	15	30 / 11	120 / 16	250	120
Demande	100	210	200	250	200	120	1080	
		190	90	0	130			

Le cout total est : $C = 100\times5 + 20\times4 + 190\times2 + 110\times18 + 20\times11 + 250\times17 + 70\times8 + 130\times11 + 120\times6$

$C = 12090$ (UM)