Niveau : Deuxième bac sciences PC /SVT /STE

Résumé de cours

Continuité d'une fonction

Plan de chapitre 1 : Continuité d'une fonction

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection FMATHS

Prof fayssal 0681399067 www.elboutkhili.jimdofree.com

1) Continuité d'une fonction en un point

Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

- La fonction f est continue à droite de a $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- La fonction f est continue à gauche de a $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

la fonction f est continue en a $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche du point a

2) Continuité d'une fonction sur un intervalle

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

- La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

Exemple des fonction usuelles continue sur un intervalle

1) Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$
2) Les fonctions rationnelles sont continus en tout intervalles inclus dans leurs domaines de définitions
3) La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$
4) Les fonctions $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$ sont continus sur $\mathbb{R}$
5) La fonction $x \to \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans l'ensemble $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$
6) La fonction $x \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions continues

Somme -produit-quotient-composée

- La fonction $f = (u + v)$ est continue sur l'intervalle I ssi les fonctions u et v sont continue sur l'intervalle I
- La fonction $f = (\alpha.u)$ est continue sur I ssi la fonction u est continue sur I
- La fonction $f = (u.v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = \left(\frac{u}{v}\right)$ est continue sur I ssi u est continue *sur I* et v continue sur I et $(\forall x \in I)\ ;\ v(x) \neq 0$
- La fonction $f = \sqrt{u}$ est continue sur I ssi la fonction u est continue sur I et $(\forall x \in I\ ); u(x) \geq 0$

3) Image d'un intervalle -Théorème des valeurs intermédiaire

Image d'un intervalle par une fonctions continue

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$et m est le minimum de f sur $[a, b]$. Alors $f([a, b]) = [m, M]$

Image d'un intervalle par fonction continue et str monotonne

f est strictement croissante sur I	f strictement décroissante
$f([a;b]) = [f(a);f(b)]$	$f([a;b]) = [f(b);f(a)]$
$f([a;+\infty[) = \left[f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$f([a;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)\right]$
$f([a;b[) = \left[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ $f(]a;b]) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$	$f([a;b[) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$ $f(]a;b]) = \left[f(b); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$f(]-\infty;b]) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); f(b)\right]$	$f(]-\infty;b]) = \left[f(b); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f une fonction continue sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$

En d'autres termes : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a,b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Corollaire 01

Si f une fonction continue sur $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$; alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]a;b[$

- De plus si f est strictement monotone sur $[a;b]$ alors α est unique

Corollaire 02

Si la fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I et $k \in f(I)$

Alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans I

4) Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Si f une fonction continue et strictement monotone sur I ; Alors la fonction f admet une fonction réciproque , notée f^{-1} définit sur l'intervalle $J = f(I)$

Propriétés de fonction réciproque f^{-1}

Si f est continue et strictement monotone sur un I alors :

- $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$
- f^{-1} est continue sur f (I) et a même sens de variation que f
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, sont symétriques par rapport la droite d'équation y=x
- $(\forall x \in I);\ f^{-1}of(x) = x$; $(\forall x \in J);\ fof^{-1}(x) = x$

5) Fonction racine n-ième

La fonction $x \to x^n$ est continue et strictement monotone sur $[0;+\infty[$ donc admet une fonction réciproque sur $[0;+\infty[$ Cette fonction est appelé la fonction racine n-ième , et elle est notée par : $x \to \sqrt[n]{x}$

Propriété : Soient x et y dans $[0;+\infty[$ et m et n dans IN^* :

1) $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$	5) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n\times m]{x^m}$
2) $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ et $\sqrt[1]{x} = x$	6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\times n]{x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$	7) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
4) $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$	8) $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$

Puissances rationnelles d'un nombre réel str positif :

Soient a un réel strictement positif et $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$