Mme El Kyal
Université Ibn Zohr
Ensa, 1ère année G.Ind, G. Elec , G.Info et F.I.D.

Vendredi 11 juin 2021
10h30 à 12h
Devoir surveillé

Equations Différentielles, Problèmes de Cauchy

Durée 1h 30mn

Exercice 1 Soit A une matrice carrée d'ordre n, et $X : I\!R \to I\!R^n$ une solution de

$$X'(t) = AX(t), t \in I\!R$$

1. Montrer que $X(t) = 0\ \forall t \in I\!R$ si et seulement si $X(0) = 0$.
2. En déduire que e^{tA} est inversible.

Exercice 2 Etant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer e^{tA}.
2. Que représente e^{tA} pour le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x_1'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_2'(t) & = & 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) & = & 2x_3(t) \end{array} \right.$$

3. En déduire la solution de ce système avec $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 2, 1)$

Exercice 3 Etant donnée l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) + x(t) - tx^2(t) = 0$$

1. Cette équation différentielle porte quel nom ?
2. S'agit t-il d'un problème de Cauchy ?
3. Soit $t_0 \in I\!R$. Déterminer la (ou les) solution(s) maximale(s) de cet équation telle que $y(t_0) = 0$.
4. Soit y une solution de l'équation qui ne s'annule pas sur $I\!R$. Résoudre l'équation.
5. Soit la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} I\!R & \to & I\!R \\ t & \mapsto & (1+t)e^{-t} \end{array}$$

   (a) Dresser un tableau de variation de g.
   (b) Soit $K \in I\!R$. Déterminer, suivant la valeur de K, le nombre de solution(s) de l'équation $g(t) = K$.

6. Déterminer toutes les solutions maximales de l'équation.

Exercice 4
Résoudre l'équation différentielle

$$x^{(6)}(t) - 3x^{(5)}(t) + 3x^{(4)}(t) - x^{(3)}(t) = 0$$