Simulation de la loi Gamma et du χ^2 décentré

ED-DAHMOUNI Abdessamad & BAHIAOUI Ahmed

le 23 Juin 2016

1 La méthode du rejet

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}((\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_i \notin A)) \cap (X_n \in A)) \\ &= \mathbb{P}(X_n \notin A)\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_i \notin A) \\ &= p(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T < +\infty) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T = n) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le fait que T soit intégrable (admet une espérance).

2. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_T \in B, T = n) &= \mathbb{P}((X_n \in A \cap B) \cap (\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_i \notin A))) \\ &= \mathbb{P}(X_n \in A \cap B)\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_i \notin A)\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(X_T \in B, T = n) = \mathbb{P}(X_n \in A \cap B)(1-p)^{n-1}$

3. En utilisant la question précédent, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_T \in B) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_T \in B, T = n) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_T \in A \cap B)(1-p)^{n-1} \\
\text{D'où : } \mathbb{P}(X_T \in B) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 \in A \cap B)}{p} = \mathbb{P}_{(X_1 \in A)}(X1 \in B)
\end{aligned}$$

2 Simulation de la loi Gamma

4. soit $\delta > 0$. Montrons que si $Z \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ alors $\delta Z \sim \Gamma(\alpha, \frac{\beta}{\delta})$:
Soit F la fonction de répartition de Z et G celle δZ, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}^+ : G(x) = F(\frac{x}{\delta})$ D'où G est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout x :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \frac{1}{\delta} F'(\frac{x}{\delta}) \\
&= \frac{1}{\delta \Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\delta}x} (\frac{x}{\delta})^{\alpha-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\frac{\beta}{\delta})^{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\delta}x} x^{\alpha-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}}
\end{aligned}$$

D'où $\delta Z \sim \Gamma(\alpha, \frac{\beta}{\delta})$.
En particuler, pour $\delta = \beta : Z \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow \delta Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$

On obtient la réciproque avec $\beta = 1$, $Z' = \beta Z$ et $\delta = \frac{1}{\beta}$:
$Z' \sim \Gamma(\alpha, 1) \Rightarrow \frac{1}{\beta} Z' \sim \Gamma(\alpha, \frac{1}{1/\beta})$
C'est-à-dire : $\beta Z \sim \Gamma(\alpha, 1) \Rightarrow Z \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

Conclusion : $Z \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \beta Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$

5. On a : $A = \{(x_1, x_2) \in]0,1[^2, \frac{2}{\alpha-1} \log(x_1) - \log(\frac{\lambda x_2}{x_1}) + \frac{\lambda x_2}{x_1} - 1 \leq 0\}$
On Pose : $D = \{(x_1, v) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in]0,1[\text{ et } v \in]0, \frac{\lambda}{x_1}[\}$
Et on considère Φ l'application définie de D dans $]0,1[^2$ par :

$$\forall (x_1, v) \in D : \Phi(x_1, v) = (x_1, \frac{x_1 v}{\lambda})$$

Φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, et ça matrice Jacobienne est :

$$J(x_1, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{\lambda} & \frac{x_1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Donc le déterminant de cette matrice est $\frac{x_1}{\lambda}$, on a aussi :
Pour tout $(x_1, x_2) \in]0,1[^2$ on considère $v = \frac{\lambda x_2}{x_1}$, on a donc $\Phi(x_1, v) = (x_1, x_2)$ et :

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in A &\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha - 1} \log(x_1) \leq 1 + \log(v) - v \\
&\Leftrightarrow x_1 \leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1+\log(v)_v)} \\
&\Leftrightarrow x_1 \leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)} v^{\frac{\alpha-1}{2}}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(\frac{\lambda(X_T)_2}{(X_T)_1})) &= \int_0^1\int_0^1 f(\frac{\lambda x_2}{x_1})\frac{1}{p}\mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in A\}}dx_2dx_1 \\
&= \frac{1}{p}\int_0^1\int_0^{\frac{\lambda}{x_1}} f(v)\mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}|det(J(x_1,v))|dvdx_1 \\
&= \frac{1}{p}\int_0^1\int_0^{\infty} f(v)\mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}\mathbf{1}_{\{v<\frac{\lambda}{x_1}\}}\frac{x_1}{\lambda}dvdx_1 \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} f(v)(\int_0^1 \mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}\mathbf{1}_{\{x_1<\frac{\lambda}{v}\}}\frac{x_1}{\lambda}dx_1)dv \text{ (Fubini)}
\end{aligned}$$

6. Soit $v\in]0,+\infty[$, on a :

$$(e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}})' = \frac{\alpha-1}{2}v^{\frac{\alpha-3}{2}}e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}(1-v)$$

Ainsi une étude simple du signe de cette dérivée montre que :

$$\max_{v\geq 0} e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}} = e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-1)}1^{\frac{\alpha-1}{2}} = 1$$

de même :

$$(e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha+1}{2}})' = \frac{\alpha-1}{2}v^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-v)$$

D'où :

$$\max_{v\geq 0} e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha+1}{2}} = e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}))}(\frac{\alpha+1}{\alpha-1})^{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{1}{e}(\frac{\alpha+1}{\alpha-1})^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

Donc si $\lambda\geq\underline{\lambda}=\frac{1}{e}(\frac{\alpha+1}{\alpha-1})^{\frac{\alpha+1}{2}}$ on a :

$$x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}} \Rightarrow x_1\leq\frac{1}{v}\max_{v\geq 0} e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha+1}{2}}\leq\frac{\lambda}{v}$$

Donc :

$$\mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}\mathbf{1}_{\{x_1<\frac{\lambda}{v}\}} = \mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}$$

sauf peut-être en $x=\frac{\lambda}{v}$.
Ceci nous permet de calculer l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(\frac{\lambda(X_T)_2}{(X_T)_1})) &= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} f(v)(\int_0^1 \mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}\mathbf{1}_{\{x_1<\frac{\lambda}{v}\}}dx_1)dv \\
&= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} f(v)(\int_0^1 \mathbf{1}_{\{x_1\leq e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}}\}}\frac{x_1}{\lambda}dx_1)dv \\
&= \frac{1}{2\lambda p}\int_0^{\infty} f(v)(e^{\frac{\alpha-1}{2}(1-v)}v^{\frac{\alpha-1}{2}})^2dv \\
&= \frac{1}{2\lambda p}\int_0^{\infty} f(v)e^{(\alpha-1)(1-v)}v^{\alpha-1}dv \\
&= \frac{e^{\alpha-1}}{2\lambda p}\int_0^{\infty} f(v)e^{-(\alpha-1)v}v^{\alpha-1}dv \\
&= \frac{e^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{2\lambda p(\alpha-1)^{\alpha}}\int_0^{\infty} f(v)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)^{\alpha}e^{-(\alpha-1)v}v^{\alpha-1}dv
\end{aligned}$$

En particuler, pour $f = \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{1}(\frac{\lambda(X_T)_2}{(X_T)_1})) &= \frac{e^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{2\lambda p(\alpha-1)^\alpha}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)^\alpha e^{-(\alpha-1)v}v^{\alpha-1}dv\\ &= \frac{e^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{2\lambda p(\alpha-1)^\alpha} = 1\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}(f(\frac{\lambda(X_T)_2}{(X_T)_1})) = \int_{\mathbb{R}} f(v)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)^\alpha e^{-(\alpha-1)v}v^{\alpha-1}\mathbf{1}_{\{v>0\}}dv$$

D'après le théorème d'identification :

$$\frac{\lambda(X_T)_2}{(X_T)_1} \sim \Gamma(\alpha, \alpha-1)$$

7. En posant $x = \frac{\alpha-1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned}\lambda^{CF} \geq \underline{\lambda} &\Leftrightarrow \frac{6(2x+1)^2-1}{12x(2x+1)} \geq \frac{1}{e}(1+\frac{1}{x})^{x+1}\\ &\Leftrightarrow \log(\frac{6(2x+1)^2-1}{12x(2x+1)}) - (x+1)\log(1+\frac{1}{x}) + 1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow g(x) \geq 0\end{aligned}$$

Où g est la fonction définie pour tout $x > 0$ par :

$$g(x) = \log(\frac{6(2x+1)^2-1}{12x(2x+1)}) - (x+1)\log(1+\frac{1}{x}) + 1$$

montrons donc que g est positive, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = -\frac{24x^2+20x+5}{x(2x+1)(24x^2+24x+5)} - \log(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}$$

$$g''(x) = \frac{104x^2+104x+25}{x(x+1)(2x+1)^2(24x^2+24x+5)^2}$$

Comme g'' est positive, g' est croissante, d'où pour tout $x > 0$ on a $g'(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$
Donc g est décroissante et par suite :

$$\forall x > 0 \quad g(x) \geq \lim_{x\to+\infty} g(x) = log(\frac{24}{24}) - 1 + 1 = 0$$

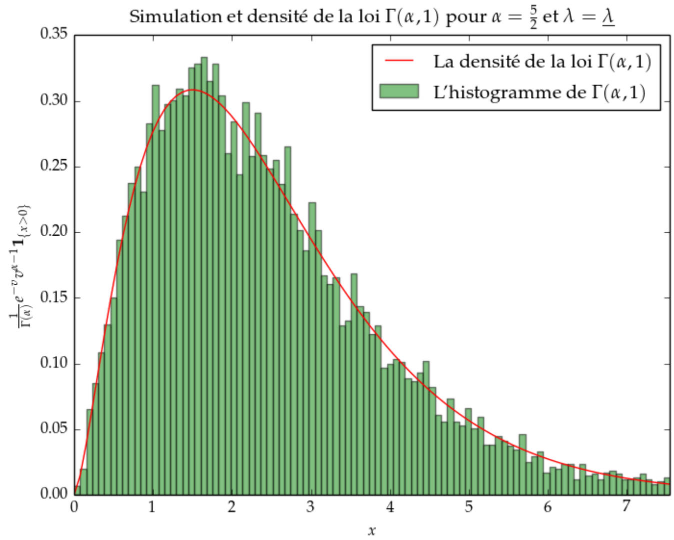
Donc g est positive.
Conclusion :

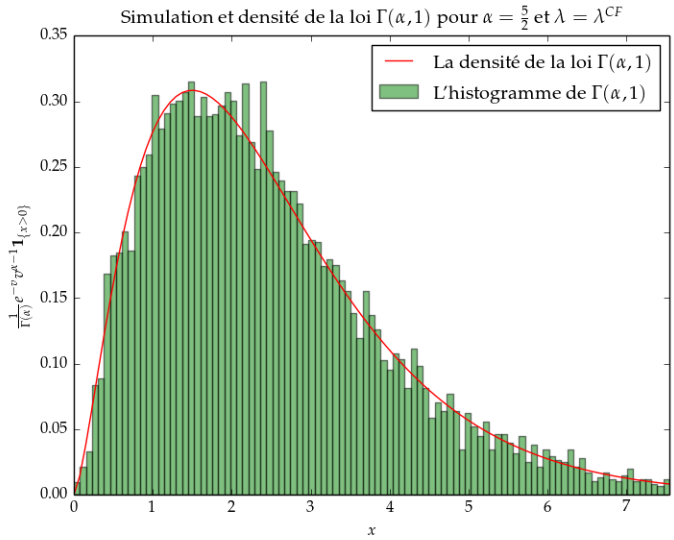
$$\lambda^{CF} \geq \underline{\lambda} \quad \text{pour tout } \alpha > 1$$

Calcul des probabilités de rejet : On utilise la relation :

$$\frac{g(Y_1) + \cdots + g(Y_n)}{n} \xrightarrow{p.s} \int_{]0,1[^2} g(x)dx$$

Où les Y_i sont des variables aléatoires i.i.d de même loi que X_T et g est la fonction $\mathbf{1}_{\{x\notin A\}}$. Pratiquement, n valeurs de la fonction qui simule X_T sont considérées comme des valeurs de n variables aléatoires i.i.d de même loi que X_T.
Simulations :





8. Soit $(x_1, x_2) \in]0,1[^2$, en utilisant l'inégalité $\log(x) \leq x - 1$ vérifiée par tout $x > 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in B &\Rightarrow \frac{2}{\alpha - 1}(x_1 - 1) + (\frac{x_1}{\lambda x_2} - 1) + \frac{\lambda x_2}{x_1} - 1 \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{2}{\alpha - 1}\log(x_1) + \log(\frac{x_1}{\lambda x_2}) + \frac{\lambda x_2}{x_1} - 1 \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{2}{\alpha - 1}\log(x_1) - \log(\frac{\lambda x_2}{x_1}) + \frac{\lambda x_2}{x_1} - 1 \leq 0 \\
&\Rightarrow (x_1, x_2) \in A
\end{aligned}$$

D'où $B \subset A$.

L'intervalle de confiance de $\mathbb{P}(\mathbf{X_i} \in \mathbf{B})$:

On cherche à estimer la probabilité $p = \mathbb{P}(X_i \in B)$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo, la valeur donnée par cette méthode pour un entier n assez grand correspond à l'estimateur $\hat{p}_n$.
Un intervalle de confiance (95%) est donc :

$$[\hat{p}_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{p}_n + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

(En effet, $\frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$)
Comparaison du temps de calcul de chaque méthode pour 10^6 simulations :
les résultats de la simulation avec Python montrent que la méthode qui teste directement si $X_i \in A$ est plus lente que celle qui teste d'abord l'appartenance de X_i à B puis à A : 18 secondes contre 15.

9. Soit h une fonction test mesurable bornée.
En appelant Y la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{\lambda(X_T)_1\leq 1\}}(\lambda(X_T)_1)^{1/\alpha} - \mathbf{1}_{\{\lambda(X_T)_1>1\}}\log(\lambda(1-(X_T)_1)/\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(Y))) &= \frac{1}{p}\int_0^1\int_0^1 h(\mathbf{1}_{\{\lambda x_1\leq 1\}}(\lambda x_1)^{1/\alpha} - \mathbf{1}_{\{\lambda x_1>1\}}\log(\lambda(1-x_1)/\alpha))\mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in A\}}dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{p}\int_0^1\int_0^{1/\lambda} h((\lambda x_1)^{1/\alpha})\mathbf{1}_{\{x_2\leq \exp((-\lambda x_1)^{1/\alpha})\}}\mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in]0,1[^2\}}dx_1dx_2 \\
&+ \frac{1}{p}\int_0^1\int_{1/\lambda}^1 h(\log(\lambda(1-x_1)/\alpha))\mathbf{1}_{\{x_2\leq(-\log(\lambda(1-x_1)/\alpha))^{\alpha-1}\}}\mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in]0,1[^2\}}dx_1dx_2 \\
&= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2
\end{aligned}$$

Calculons chacune des intégrales séparément:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{p}\int_0^{1/\lambda}\int_0^{\exp(-(\lambda x_1)^{1/\alpha})} h((\lambda x_1)^{1/\alpha})\mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in]0,1[^2\}}dx_2dx_1$$

En changeant x_1 en $u = (\lambda x_1)^{1/\alpha}$ et en gardant x_2 (Jacobienne diagonale):

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{p}\int_0^1\int_0^{\min(\exp(-u),1)} h(u)dx_2.(\frac{\alpha}{\lambda}u^{\alpha-1}du)$$

Soit :

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\alpha}{\lambda p}\int_0^1 e^{-u}h(u)u^{\alpha-1}du$$

D'une autre part, la calcul de $\mathbf{I}_2$ mène au résultat suivant:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{p}\int_{1/\lambda}^1\int_0^{(-\log(\lambda(1-x_1)/\alpha))^{\alpha-1}} h(\log(\lambda(1-x_1)/\alpha))\mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in]0,1[^2\}}dx_2dx_1$$

En posant de la même façon $v = -\log(\lambda(1-x_1)/\alpha)$ ou $x_1 = 1 - \frac{\alpha}{\lambda}e^{-v}$:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{p}\int_{-\log((\lambda-1)/\alpha)}^{+\infty}\int_0^{v^{\alpha-1}} h(v)\mathbf{1}_{\{x_2\in]0,1[\}}dx_2(\frac{\alpha}{\lambda}e^{-v}dv)$$

Soit :

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\alpha}{p\lambda}\int_1^{+\infty} v^{\alpha-1}h(v)e^{-v}.dv$$

(En effet, en utilisant $\lambda = \frac{\alpha+e}{e}$, on trouve $v \geq -\log((\lambda-1)/\alpha) \geq 1$, et par suite, $v^{\alpha-1} \leq 1$ car $\alpha \leq 1$).

Finalement en sommant $\mathbf{I}_1$ et $\mathbf{I}_2$ on obtient l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ entièrement :

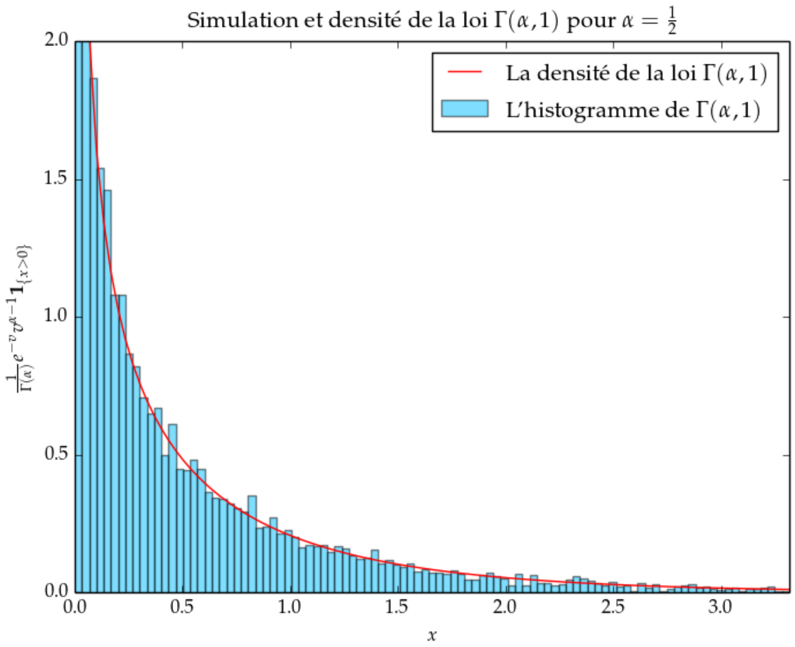
$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\alpha}{\lambda p} \int_0^{+\infty} h(u) e^{-u} u^{\alpha-1} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} h(u) e^{-u} u^{\alpha-1} du$$

D'après le théorème d'identification, Y suit bien une loi $\Gamma(\alpha, 1)$ avec $p = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda}$

10. **L'intervalle de confiance de la probabilité de rejet :**
On cherche à estimer la probabilité de rejet en utilisant la méthode de Monte-Carlo, la valeur donnée par cette méthode pour un entier n assez grand correspond est un estimateur de $\mathbb{P}(X_i \notin A)$ qu'on notera $\hat{q}_n$.
Un intervalle de confiance (95%) est donc comme dans la question 8 :

$$[\hat{q}_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{q}_n + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

Simulation :



Comparaison du temps de calcul de chaque méthode pour 10^6 simulations :
Les résultats de la simulation avec Python montrent que le temps de calcul se situe entre celui des deux méthodes de la question 8 : environ 16 secondes.

11. Vérifions que la loi χ^2 sans paramètre de décentralité n'est autre qu'une loi Γ en calculant sa densité: Pour z positif donné :

$$\begin{aligned} p_{\frac{\nu}{2},0}(z) &= \frac{1/2}{\Gamma(\nu/2)} (\frac{z}{2})^{\nu/2-1} . e^{-z/2} + \sum_{i=1}^{\infty} 0 . \frac{1/2}{\Gamma(i+\nu/2)} (\frac{z}{2})^{i+\nu/2-1} . e^{-z/2} \\ &= \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} z^{\nu/2-1} e^{-z/2} \end{aligned}$$

Ce qui correspond exactement à la densité d'une loi $\Gamma(\nu/2, 1/2)$;
Si en plus ν est entier non nul, on procède en utilisant les fonctions caractéristiques des lois concernées qu'on notera $\Phi_X(t)$. Pour ν entier non nul donné, montrons que $\Phi_{\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}(t) = (\Phi_{\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(t))^\nu$ ce qui permettra de conclure immédiatement (la somme de variables aléatoires indépendantes se traduisant par le produit de leurs fonctions caractéristiques):

$$\begin{aligned}
\Phi'_{\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}(t) &= \mathbb{E}(iXe^{itX}) \\
&= \frac{i(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \int_{\mathbb{R}_+} z^{\nu/2} e^{z(it-1/2)} dz \\
&= \frac{i(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \left(\left[\frac{z^{\nu/2} e^{z(it-1/2)}}{it-1/2} \right]_0^{+\infty} - \frac{\nu/2}{it-1/2} \int_{\mathbb{R}_+} z^{\nu/2-1} e^{z(it-1/2)} dz \right) \\
&= \frac{i\nu}{1-2it} \Phi_{\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}(t)
\end{aligned}$$

On a aussi $\Phi_{\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}(0) = 1$.
Ainsi $\Phi_{\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}$ vérifie le même problème de Cauchy linéaire de premier ordre que la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-2it)^{\nu/2}}$ sur $\mathbb{R}$, d'où par unicité de la solution :

$$\Phi_{\Gamma(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2})}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\nu/2}} = (\frac{1}{(1-2it)^{1/2}})^\nu = (\Phi_{\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(t))^\nu$$

La forme de $\Phi_{\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(t)$ se déduisant du résultat lui même en remplaçant ν par 1.

12. Par définition, la loi marginale de Y s'obtient en sommant sa loi conditionnelle par rapport à toutes les valeur de N possible. On écrit :
Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mesurable et bornée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(Y)|N)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(g(Y)|N=k)\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int g(y)\mathbb{P}(N=k) f_{Y|N=k}(y) dy \\
&= \int g(y) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k) f_{Y|N=k}(y) dy
\end{aligned}$$

D'où la densité de la loi de Y est :

$$f_Y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k) f_{Y|N=k}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{(d/2)^k}{k!} e^{-d/2}).(\frac{1}{\Gamma(k+\nu/2)} (\frac{1}{2})^{k+\nu/2} z^{k+\nu/2-1} e^{-z/2}) = p_{\frac{\nu}{2},d}(z)$$

Soit la formule formule de densité du χ^2 à ν degrés de liberté avec d comme paramètre de décentralité.

Calcul de $\mathbb{E}(e^{-uY})$ **:** Pour $u \geq 0$, nous pourrons calculer l'espérance demandée grâce à une interversion somme-intégrale :

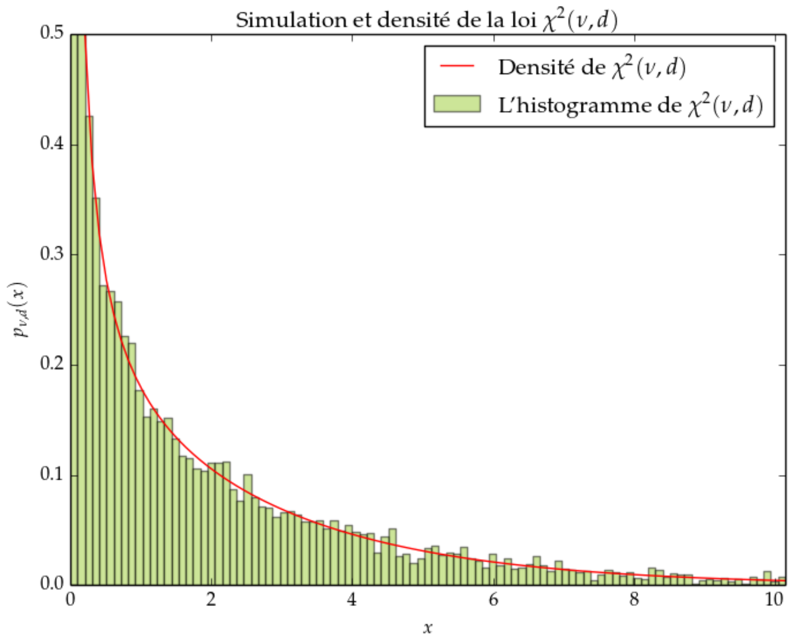
En effet $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}+}|\frac{(d/2)^k}{k!}e^{-d/2}\frac{1}{\Gamma(k+\nu/2)}(\frac{1}{2})^{k+\nu/2}z^{k+\nu/2-1}.e^{-z/2}e^{-uz}|dz$ est convergente vu que les termes sont positifs et que $e^{-uz}\leq 1$, soit :
$\int_{\mathbb{R}+}|\frac{(d/2)^k}{k!}e^{-d/2}\frac{\frac{1}{2}}{\Gamma(k+\nu/2)}(\frac{z}{2})^{k+\nu/2-1}.e^{-z(1/2+u)}|dz \leq \int_{\mathbb{R}+}\frac{(d/2)^k}{k!}e^{-d/2}\frac{\frac{1}{2}}{\Gamma(k+\nu/2)}(\frac{z}{2})^{k+\nu/2-1}.e^{-z/2}dz$
qui est le terme général d'une série convergente (de somme 1 vue que c'est la loi $\chi^2(\nu,d)$).
Ainsi l'interversion donne après simplification des fonctions Γ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-uY}) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(d/2)^k}{k!}e^{-d/2}\frac{1}{\Gamma(k+\nu/2)}(\frac{1}{2})^{k+\nu/2}\int_{\mathbb{R}+}z^{k+\nu/2-1}.e^{z(-u-1/2)}dz \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(d/2)^k}{k!}e^{-d/2}(\frac{1}{2u+1})^{k+\nu/2}\end{aligned}$$

(En effet, $\int_{\mathbb{R}+}z^{k+\nu/2-1}.e^{z(-u-1/2)}dz = (\frac{1}{u+1/2})^{k+\nu/2}\int_{\mathbb{R}+}z^{k+\nu/2-1}.e^{-z}dz = \Gamma(k+\nu/2)(\frac{1}{u+1/2})^{k+\nu/2}$)
Soit aussi :

$$\mathbb{E}(e^{-uY}) = (\frac{1}{2u+1})^{\nu/2}e^{-\frac{d}{2}+\frac{d}{4u+2}}$$

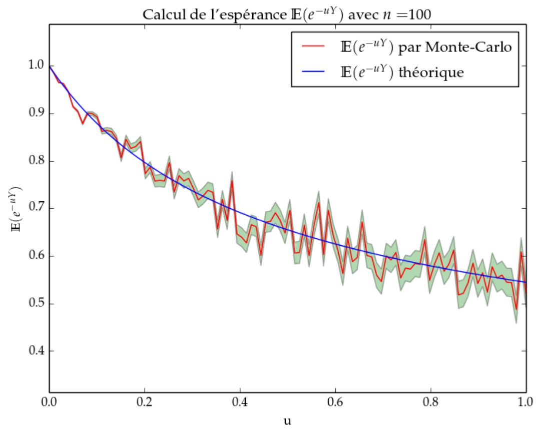
13. **Simulations :** Pour $\nu = \frac{1}{2}$:

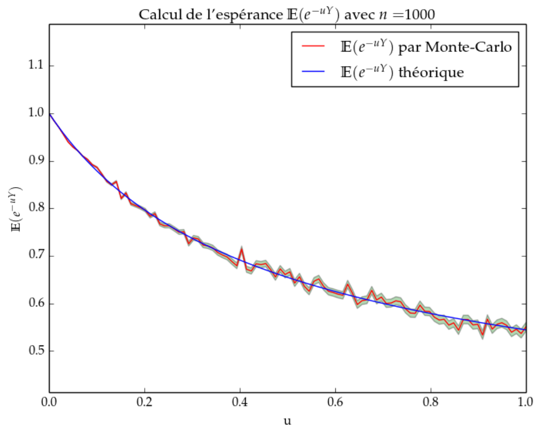


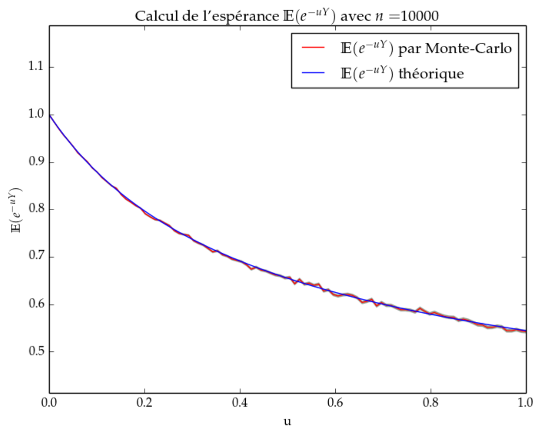
L'intervalle de confiance à (95%) est :

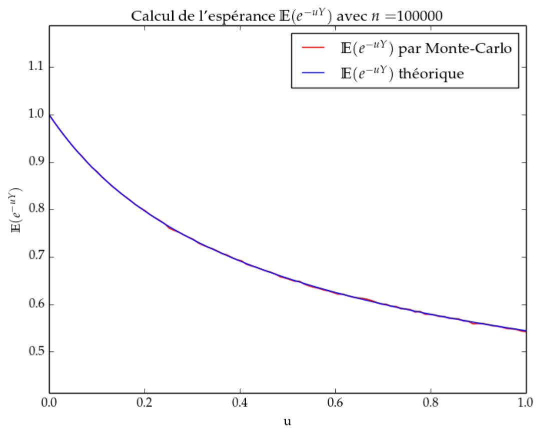
$$[\hat{p}_n - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{p}_n + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Où $\sigma = \mathbb{E}((e^{-uY})^2) - (\mathbb{E}(e^{-uY}))^2 = \mathbb{E}(e^{-2uY}) - (\mathbb{E}(e^{-uY}))^2$ qu'on peut donc calculer en utilisant la formule précédemment trouvée.









14. La variable aléatoire $G + \sqrt{d}$ suit une loi normale réduite de densité :

$$f_{G+\sqrt{d}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-\sqrt{d})^2}{2}}$$

donc son carré est aussi une variable aléatoire à densité de façon à ce que :

$$\begin{aligned}
f_{(G+\sqrt{d})^2}(z) &= \frac{1}{2\sqrt{z}}(f_{G+\sqrt{d}}(\sqrt{z}) + f_{G+\sqrt{d}}(-\sqrt{z}))\mathbf{1}_{\{z>0\}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi z}}(e^{\frac{-(\sqrt{z}-\sqrt{d})^2}{2}} + e^{-\frac{(\sqrt{z}+\sqrt{d})^2}{2}})\mathbf{1}_{\{z>0\}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} e^{-d/2} (e^{\sqrt{dz}} + e^{-\sqrt{dz}})\mathbf{1}_{\{z>0\}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} e^{-d/2} \cosh(\sqrt{dz})
\end{aligned}$$

Le développement en série entière de du cosh permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} f_{(G+\sqrt{d})^2}(z) &= \mathbf{1}_{\{z>0\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} e^{-d/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(dz)^k}{(2k)!} \\ &= \mathbf{1}_{\{z>0\}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{2}} \frac{d^k e^{-d/2}}{(2k)!} z^{k-1/2} e^{-z/2} \end{aligned}$$

L'obtention de $\Gamma(k+1/2)$ se fait par la multiplication par tous les demi-entiers entre $k+1/2$ et $1/2$.

$$\begin{aligned} f_{(G+\sqrt{d})^2}(z) &= \mathbf{1}_{\{z>0\}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} \frac{1}{\Gamma(k+1/2)\sqrt{2}} \frac{d^k e^{-d/2}}{(2k)!} z^{k-1/2} e^{-z/2} \\ &= \mathbf{1}_{\{z>0\}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1/2}{\Gamma(k+1/2)} \frac{(\frac{d}{2})^k e^{-d/2}}{(k)!} (\frac{z}{2})^{k-1/2} e^{-z/2} \\ &= p_{\frac{1}{2},d}(z) \end{aligned}$$

Il faut montrer pour la partie suivante que la somme d'une variable aléatoire de loi $\chi^2(1,d)$ et d'une variable aléatoire de loi $\Gamma((\nu-1)/2, 1/2)$ (ou d'après l'a question 11, $\chi^2(\nu-1,0)$, il a une erreur dans l'énoncé, $\chi^2(\nu,d)$ est de densité $p_{\frac{\nu}{2},d}$ et non pas $p_{\nu,d}$, il faut donc supposer que $\nu \geq 1$ et non pas $\nu \geq 1/2$) est une V.A. de loi χ^2 à ν degrés de liberté et à coefficient de décentralité d. En utilisant $u = -it$ la formule de l'espérance de la question 12 reste valable vu que $|e^{itz}| \leq 1$ aussi, l'interversion donc reste valable et :

$$\begin{aligned} \Phi_{X+(\mathbf{G}+\sqrt{d})^2}(t) = \Phi_X(t).\Phi_{(\mathbf{G}+\sqrt{d})^2}(t) &= ((\frac{1}{1-2it})^{\nu/2-1/2}.1)((\frac{1}{1-2it})^{1/2} e^{-\frac{d}{2}+\frac{d}{-4it+2}}) \\ &= (\frac{1}{1-2it})^{\nu/2}.e^{-\frac{d}{2}+\frac{d}{-4it+2}} = \mathbb{E}(e^{itY}) \end{aligned}$$

Où Y est une V.A. suivant une loi χ^2 à ν degrés de liberté avec d comme paramètre de décentralité.

15. **Comparaison du temps de calcul de chaque méthode pour 10^5 simulations :**
    On remarque que la nouvelle méthode est plus lente que celle de la question 13, ce qui n'est pas normal, elle met environ 0.3 secondes de plus que l'autre : 2.9 secondes contre 2.6.

16. (Içi on doit supposer $\nu \in]0,1[$ et non pas $\nu \in]0,1/2[$)
    Pour montrer la formule demandée, il faut faire déjà attention au fait qu'on dérive par rapport à d non pas à z, ainsi par rapport à $e^{d/2} p_{\nu,d}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(d/2)^i}{(i)!}.\frac{1/2}{\Gamma(i+\nu)}(\frac{z}{2})^{i+\nu-1}.e^{-z/2}$, on considère la suite de fonctions $f_{z,n,\nu}(d) = \frac{(d/2)^n}{n!}.\frac{1/2}{\Gamma(n+\nu)}(\frac{z}{2})^{n+\nu-1}.e^{-z/2}$. Ainsi pour n non nul :

$$\begin{aligned} f'_{z,n,\nu}(d) &= \frac{(d/2)^{n-1}}{2(n-1)!}.\frac{1/2}{\Gamma(n+\nu)}(\frac{z}{2})^{n+\nu-1}.e^{-z/2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(d/2)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1/2}{\Gamma(n-1+(\nu+1))}(\frac{z}{2})^{n-1+(\nu+1)-1}.e^{-z/2} \\ &= \frac{1}{2} f_{z,n-1,\nu+1}(d) \end{aligned}$$

La série des dérivées converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ ce qui induit d'après le théorème de dérivation terme à terme que $\partial_d(e^{d/2}p_{\nu,d}(z))$ existe et que sa valeur en tout point est :

$$\begin{aligned}
\partial_d(e^{d/2}p_{\nu,d}(z)) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} f_{z,n-1,\nu+1}(d) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} f_{z,n,\nu+1}(d) \\
&= \frac{1}{2}e^{d/2}p_{\nu+1,d}(z)
\end{aligned}$$

En intégrant cette égalité entre 0 et d :

$$e^{d/2}p_{\nu,d}(z) - p_{\nu,0}(z) = \int_0^d e^{t/2}p_{\nu+1,t}(z)dt$$

La forme du résultat demandé inspire le changement de variable $t = 2\log(u) + d$ soit $u = e^{\frac{t-d}{2}}$ et $dt = du/u$

$$\begin{aligned}
e^{d/2}p_{\nu,d}(z) - p_{\nu,0}(z) &= \int_{e^{-d/2}}^1 (ue^{d/2})p_{\nu+1,2\log(u)+d}(z)\frac{du}{u} \\
&= e^{d/2}\int_{e^{-d/2}}^1 p_{\nu+1,2\log(u)+d}(z)du
\end{aligned}$$

Après une multiplication des deux membres par $e^{-d/2}$ on conclut que :

$$p_{\nu,d}(z) = e^{-d/2}p_{\nu,0}(z) + \int_{e^{-d/2}}^1 p_{\nu+1,2\log(u)+d}(z)du$$

17. On considère U une v.a de loi uniforme sur $[0,1]$ et conditionnellement à U, Z de loi $\chi^2(\nu,0)$ si $U \leq e^{-d/2}$ et $\chi^2(\nu+2, 2\log(U)+d)$ si $U > e^{-d/2}$.
Montrons que Z suit la loi $\chi^2(\nu,d)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(Z)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(Z)|U)) \\
&= \int_0^{e^{-d/2}} \mathbb{E}(g(Z)|U=u)du + \int_{e^{-d/2}}^1 \mathbb{E}(g(Z)|U=u)du \\
&= \int_0^{e^{-d/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)p_{\nu/2,0}(z)dzdu + \int_{e^{-d/2}}^1\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)p_{\nu/2+1,2\log(u)+d}(z)dzdu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)(\int_0^{e^{-d/2}} p_{\nu/2,0}(z)du + \int_{e^{-d/2}}^1 p_{\nu/2+1,2\log(u)+d}(z)du)dz \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)p_{\nu/2,d}(z)dz \quad \text{(d'après la question 16.)}
\end{aligned}$$

Comparaison du temps de calcul de chaque méthode pour 10^5 simulations :
Toujours le même problème : la nouvelle méthode est plus lente que la méthode de la question 13. : environ 2.5 contre 3.5 je n'est pas réussi à trouver l'erreur.