Université Hassan II- Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Année 2016/2017
Parcours: **MIP**
Module: **M136**

Partiel d'analyse 4 (M 136)
Session mai 2017 S3 (Durée:2 H)

Exercice 0.1

Dans cet exercice les queestions 1) et 2) sont indépendantes.

1. *On considère l'équation différentielle suivante :* $(E) : y" + 2xy' + 2y = 0$.

   et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sa solution développable en série entière au voisinage de* 0.

   (a) *Déterminer* a_{n+2} *en fonction de* a_n *pour* $n \geq 0$. *(1 pts)*

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   $$,f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \ ,$$

   $$f"(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

   (b) *Endéduire que* $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!} a_0$ *et* $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} a_1$. *(2 pts)*

   (c) *Exprimer* f *à l'aide de fonction usuelle sachant que* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = 0$. *(1 pts)*

2. *Soit la fonction* $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$.

   (a) *Montrer que la fonction* u *est continue sur* $\mathbb{R}$. *(1.5 pt)*

   (b) *Calculer* $\lim_{x \to 0} \left(u(x) - \dfrac{1}{x^2} \right)$ *(justifier votre réponse).* *(1.5 pt)*

Exercice 0.2

Soit la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ *définie sur* $[-\pi,\pi]$ *par* $f_n(x) = \dfrac{\sin(x/n)}{\sqrt{n}+x^2}$.

1. *Étudier la convergence uniforme sur* $[-\pi,\pi]$ *de la suite* $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ *vers une fonction* f *que l'on détermiera.* *(1 pt)*
2. *Étudier la contnuité des fonctions* h *et* g *définies sur* $[-\pi,\pi]$ *par*

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x); \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{n}.f_n(x).$$

(2+2 pts)

Exercice 0.3

Rappel: $\int e^{i.\alpha.x}dx = \frac{e^{i.\alpha.x}}{i.\alpha}$, $e^{i.\alpha.x} = \cos(\alpha.x) + i.\sin(\alpha.x)$.

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = e^x, \quad si\ -\pi \leq x < \pi.$$

1. *Donner l'expression de $f(x)$ sur l'intervalle $[\pi,2\pi]$.* *(1 pt)*
2. *Tracer la courbe de sur $]-2\pi,3\pi]$.* *(1.5 pt)*
3. *Donner la nature de la convergence de la série de Fourier associée à f, en justifiant votre réponse.* *(1 pt)*
4. *Soient a_n et b_n les coefficients de Fourier en* cos *et* sin *réspectivement.*
   (a) *Calculer a_0.* *(0.5 pt)*
   (b) *Montrer que, pour $n \geq 1$.* *(1.5 pts)*

$$a_n + ib_n = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}(-1)^n\big(1 - i.n\big).$$

5. *Donner le développement en série de Fourier de f.* *(1 pts)*
6. *En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$.* *(1.5 pts)*