

# PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

Amina ELJABRI

FSTM

Département Informatique

## 1 INTRODUCTION

## 2 METHODE C.P.M (GRAPHE POTENTIEL TACHE)

## 3 METHODE PERT (GRAPHE POTENTIELS-ETAPES)

## 4 EXEMPLE D'APPLICATION

# Introduction

Le problème d'ordonnancement consiste à trouver un planning d'exécution d'un ensemble de tâches formant un projet donné. Les projets sont en général de grande envergure et peuvent être de différentes natures : fonctionnement d'une chaîne de production, construction d'un barrage, d'un avion, réalisation d'un projet informatique etc. . . L'objectif essentiel de la résolution de tels problèmes est d'éviter les pertes de temps.

Certaines tâches sont soumises à des contraintes de cohérences, d'autres sont dites indépendantes. D'autres contraintes sont liées à la disponibilité des ressources nécessaires pour la réalisation des tâches. On suppose connu pour chaque tâche sa durée.

L'ordonnancement recherché doit être compatible avec les contraintes imposées et doit être optimal par rapport à un ou plusieurs critères.

# Position du problème

Dans ce présent chapitre, nous étudierons le cas particulier le plus important :

Le problème d'ordonnancement central ou simple.

Les seules contraintes sont les contraintes de succession dans le temps.

Les contraintes de ressources sont ignorées. En pratique, cela implique que les ressources (machines et mains d'oeuvre) sont toujours disponibles en quantité suffisante.

Le critère à optimiser est le temps de réalisation du projet.

# Diagramme de Gantt

La première méthode qui fut employée pour la résolution de ces problèmes utilise le diagramme de Gantt. Cet outil permet :

- de déterminer les dates de réalisation d'un projet.
- d'identifier les marges existantes sur certaines tâches.
- de visualiser d'un seul coup d'œil le retard ou l'avancement des travaux.

# Diagramme de Gantt

Dans un diagramme de Gantt on représente :

- en abscisse les unités de temps (exprimées en mois, en semaine ou en jours).
- en ordonnée les différentes tâches.

Mais le diagramme de Gantt ne résout pas tous les problèmes surtout quand le projet est d'une grande envergure et est constitué d'une multitude de tâches. Il reste néanmoins un moyen pratique de visualisation de la réalisation des tâches au cours du temps.

Dans ce cas, il est nécessaire de faire appel à des algorithmes plus complexes tels que ceux de la recherche opérationnelle.

# Méthodes PERT et CPM

La Technique d'évaluation et de révision de programme ou méthode PERT (program evaluation and review technique) et la méthode du chemin critique ou C.P.M (critical path method) sont deux méthodes qui se basent sur une modélisation à l'aide d'un graphe.

La méthode CPM a été développée dans les années 1950 par Morgan R. Walker (de la société Dupont) et James E. Kelley (de Remington Rand) dans des but industriels pour contrôler les coûts et l'ordonnancement de la production.

La méthode PERT a vu le jour en 1956 à la demande de la marine américaine, pour le projet de construction de missiles balistiques nucléaires miniaturisés Polaris nécessitant l'intervention de 250 fournisseurs et de 9000 sous-traitants afin de rattraper le retard pris sur l'URSS. L'utilisation de cette méthode a permis de réduire la durée totale du projet de 7 à 4 ans.

# Généralités

## Définition

Un projet  $P$  est constitué de :

- Un ensemble de tâches à réaliser  $A_i$  avec pour chaque tâche une date de commencement au plus tôt  $t_i$  et une date de commencement au plus tard  $T_i$  et une durée  $d_i$ .
- Un ensemble de contraintes sur les tâches du projet : contraintes qui peuvent s'exprimer par des inégalités faisant intervenir les dates et les durées.

Trouver un ordonnancement optimal pour le projet consiste à calculer à partir des durées  $d_i$ , les dates de commencement  $t_i$  et  $T_i$  qui soient compatibles avec les contraintes du projet et tel que la durée totale du projet soit minimum.



# Généralités

## Proposition (type de contraintes):

On traduira les différentes contraintes en inégalités de la manière suivante :

Contraintes au plutôt "Aj commence au plutôt  $\delta$  après le début de Ai"

$$t_j - t_i \geq \delta \text{ en général } \delta = d_i$$

Contraintes au plus tard "Aj commence au plus tard  $\delta$  après le début de Ai"

$$t_j - t_i \leq \delta \text{ ( dans notre cas } \delta \text{ n'est pas précisé )}$$

Contraintes implicites "toute tâche Ai doit démarrer au plutôt au début du projet et finir au plus tard à la fin du projet"

$$t_i - t_s \geq 0 ; t_n - t_i \geq d_i$$

$t_n$  désigne la durée du projet

# Méthode C.P.M (Graphe Potentiel-Tâche)

## Définition

On associe à un problème d'ordonnancement un réseau  $(X,U,d)$  tel que :

- Chaque tâche du projet sera représentée par un sommet du graphe.
- Chaque contrainte du projet sera représentée par un arc  $u = (i,j)$  de poids  $d(u) = d_i$  : durée de la tâche  $i$ .

Le graphe ainsi défini est sans circuit et admet un certain nombre de sommets sans prédécesseurs et d'autres sans successeurs.

On ajoutera deux sommets l'un qu'on notera  $s$  et qu'on reliera aux sommets sans prédécesseurs et l'autre qu'on notera  $p$  et qu'on reliera aux sommets sans successeurs.

# Ordonnancement au plutôt

L'ordonnancement au plutôt du projet consiste à trouver les dates de commencement au plutôt  $t_i$  de chaque tâche telles que le projet soit fini le plus rapidement possible.

## Formules de calcul des dates de début au plutôt

La formule de calcul du potentiel  $t_i$  d'un sommet  $x_i$  est :

$$t_s = 0$$

$$\forall i \neq s \quad t_i = \max_{k \in \Gamma^-(i)} \{t_k + d(k, i)\} = \max_{k \in \Gamma^-(i)} \{t_k + d_k\}$$

(une tâche ne peut commencer que si toutes les tâches qui la précèdent sont finies).

# Ordonnancement au plutôt

Pour calculer cet ordonnancement, il suffit de calculer les chemins les plus longs dans le graphe  $G$  depuis le sommet  $s$  à chaque sommet du graphe.

Les potentiels obtenus donnent les dates de commencement au plutôt de chaque tâche.

Le potentiel du sommet  $p$  est la durée minimale du projet.

Puisque le graphe ne contient pas de circuit, on peut utiliser l'algorithme de Bellman modifié (on remplace min par max). Les sommets sont pris par ordre croissant de la fonction Rang.

# Ordonnancement au plus tard

L'ordonnancement au plus tard consiste à trouver pour chaque tâche  $A_i$  la date de début au plus tard  $T_i$  de sorte que la durée du projet ne soit pas affectée.

## Formules de calcul des dates de début au plus tard

Pour le calcul des dates de début au plus tard, on pose :

- $T_p = t_p$
- $\forall i \neq p \quad T_i = \min_{l \in \Gamma^+(i)} \{T_l - d(i, l)\} = \min_{l \in \Gamma^+(i)} \{T_l - d_i\}$

C'est la durée du projet – la longueur du plus long chemin de  $i$  à  $p$ .

Puisque le graphe ne contient pas de circuit, il suffit d'adapter l'algorithme de Bellman en utilisant les formules ci-dessus.

les sommets  $i$  sont pris par ordre décroissant de la fonction Rang.

# marges et chemin critique

## Chemin critique

Le chemin le plus long du sommet s au sommet p est appelé chemin critique.

Les tâches de ce chemin sont appelées tâches critiques.

Tout retard sur la réalisation d'une tâche critique entrainera un allongement de la durée du projet.

On définit la marge d'une tâche  $A_i$  (on dit aussi marge totale) par :  
date de début au plus tard - date de début au plutôt de la tâche.

$$\text{marge}(A_i) = T_i - t_i.$$

La marge d'une tâche critique est nulle.

# Réseau PERT

Dans cette méthode, à un problème d'ordonnancement, on associe un réseau PERT de la manière suivante :

Chaque tâche est représentée par un arc du graphe de longueur égale à la durée de la tâche.

Si une tâche  $j$  doit succéder à une tâche  $i$ , l'extrémité initiale de l'arc  $u_j$  (correspondant à la tâche  $j$ ) doit coïncider avec l'extrémité terminale de l'arc  $u_i$  (correspondant à la tâche  $i$ ).

Des arcs fictifs de longueur nulle peuvent être ajoutés dans certains cas pour représenter des contraintes d'antériorité entre tâches.

Le début et la fin d'une tâche seront des étapes du projet.

# Réseau PERT

Une étape sera donc définie par le début et/ou la fin de plusieurs tâches et sera représentée par un seul sommet.

On définira une étape début du projet et une étape fin du projet et des étapes intermédiaires.

Comme pour C.P.M, un sommet  $s$  qui représente l'étape début du projet sera relié à tous les sommets sans prédécesseurs et un sommet  $p$  qui représente l'étape fin du projet succédera tous les sommets sans successeurs.

Le graphe ainsi défini doit être sans circuit.

Les sommets sont des étapes, c'est pourquoi l'on parle de graphe potentiel-étapes car les potentiels calculés sont rattachés aux étapes et non aux tâches.



## Réseau PERT : Calcul des potentiels

On calcule les dates de début au plutôt et les dates de début au plus tard des sommets (ou étapes) de la même manière que pour la méthode C.P.M.

La durée minimale du projet sera la longueur du plus long chemin de s à p.

La marge d'une tâche ainsi que ses dates de début au plutôt et au plus tard sont déduites à partir du calcul des potentiels des extrémités de l'arc représentant la tâche dans le réseau et de la durée de la tâche.

Le chemin critique est le chemin le plus long du réseau de s à p. Les arcs le constituant représentent des tâches critiques.

# Formules de calcul des dates

## Formules de calcul des dates de début au plutôt

La formule de calcul du potentiel  $t_i$  d'un sommet  $x_i$  est :

$$t_s = 0$$

$$\forall i \neq s \quad t_i = \max_{k \in \Gamma^-(i)} \{t_k + d(k, i)\}$$

(une étape ne peut commencer que si toutes les étapes qui la précèdent sont finies).

## Formules de calcul des dates de début au plus tard

Pour le calcul des dates de début au plus tard, on pose :

- $T_p = tp$
- $\forall i \neq p \quad T_i = \min_{l \in \Gamma^+(i)} \{T_l - d(i, l)\}$

C'est la durée du projet – la longueur du plus long chemin de  $i$  à  $p$ .

# Projet de construction de maison

code de la tâche	Désignation	Durée	Tâches antérieures
A	Travaux de maçonnerie	7	—
B	Charpente de la toiture	3	A
C	Toiture	1	B
D	Installation sanitaire et électrique	8	A
E	Façade	2	D, C
F	Fenêtres	1	D, C
G	Aménagement du jardin	1	D, C
H	Travaux de plafonnage	3	F
I	Peinture	2	H