Table des matières

I Rappels :

1. Continuité :

Activité 1

1 a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$.

b) On admet que : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Déduire que : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.

2 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$.

Théorème

Soit a un réel non nul.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x} = a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est continue en a, si et seulement si, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Autrement dit : La fonction f est continue en a, si et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x-6}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Étudier la continuité de f en 1.

Activité 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x+7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Étudier la continuité de g en 0 et 2.

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Soit f est continue en a alors les fonctions $\alpha f, (\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et $f^n, (n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.

- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}, (n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est continue en a et f est positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue en a.

Théorème

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues en tout réel.

2. Prolongement par continuité :

Théorème

Sot f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a.
La fonction g est appelée le prolongement par continuité de f en a.

Activité 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{x}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

3. Continuité sur un intervalle :

Définition

- Une fonction continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- De façon analogue, on définit la continuité d'une fonction f sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.

Activité 5

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que la fonction f est continue sur $[0,\pi]$.

4. Opérations sur les limites :

Les résultats résumés dans le tableau ci-dessous concernent les opérations sur les limites des fonctions en un réel a, à droite en a, à gauche en b ou à l'infini. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

a - Limite d'une somme :

limite de f	limite de g	limite de $f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F.I

b - Limite d'un produit :

limite de f	limite de g	limite de $f\times g$
ℓ	ℓ'	$\ell\times\ell'$
$\ell \neq 0$	∞	(R.S) ∞
∞	∞	(R.S) ∞
0	∞	F.I

c - Limite d'un quotient :

limite de f	limite de g	limite de $\frac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	∞	0
∞	ℓ'	(R.S) ∞
$\ell \neq 0$	0	(R.S) ∞
0	0	F.I
∞	∞	F.I

Théorème

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de haut degré.

Activité 6

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - x + 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^2 + 5x - 4}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 2x - 3}}{2x + 5}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2 + 3} + x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$
7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$
9. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2}$

II Branches infinies :

Activité 7
Activité 1 page 9

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonl $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
  Lorsque $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

- Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonornal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
  Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ $(L \in \mathbb{R})$, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f.
  Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{|x-1|}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. Interpréter graphiquement.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement.

Exercice 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. On désigne par C_h la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan.
Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymtote oblique à la courbe C_h au voisinage de $+\infty$.

Théorème

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est infinie, alors la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$ dépend de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

1 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ est infinie, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de dierction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

2 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

3 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a, (a \in \mathbb{R}^*)$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.

- **a** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b, (b \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- **b** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Remarque

Les autres cas se déterminent d'une façon analogue.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x - 1}$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. On appelle C_g la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

Exercice 6

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = x - \sqrt{x}$. On désigne par C_h la courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - x)$. Interpréter graphiquement.

III Continuité et limite d'une fonction composée :

1. Composée de deux fonctions :

Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J telle que $u(I) \subset J$. La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$, est appelée fonction composée de u et v.

Activité 8

Activité 2 page 12

Théorème

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.
Soit v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.
Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$ alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

DEMONSTRATION

Théorème

La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.
Plus précisément : Si u est continue sur un intervalle I et v est continue sur un intervalle J telle que $u(I) \subset J$ alors la fonction $v \circ u$ est continue sur l'intervalle I.

Remarque

Si $J = \mathbb{R}$ alors la condition $u(I) \subset J$ devient unitile.

Activité 9

Activité page 12

2. Limite d'une fonction composée :

Théorème

Soient u et v deux fonctions et a, b et c finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$.

Activité 10

Les activités 1, 2, 3, 4 et 5 page 12

IV Limites et ordre :

Théorème

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle ouvert I suaf peut-être en un réel a de I.

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1 Si $u(x) \leq v(x)$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.

2 Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

3 Si $u(x) \leq f(x)$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

4 Si $f(x) \leq u(x)$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Remarque

Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à gauche en a, à droite en a ou à l'infini.

DEMONSTRATION

Exercice 7

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{x^2 + 1}$ et $g(x) = 2x - \sin x$.

1 Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{x^2+1}$, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2 Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \leq g(x) \leq 2x + 1$, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercice 8

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2 E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x - x^2 \leq g(x) \leq x$, en déduire $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

2 Déterminer alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

V Image d'un intervalle par une fonction continue :

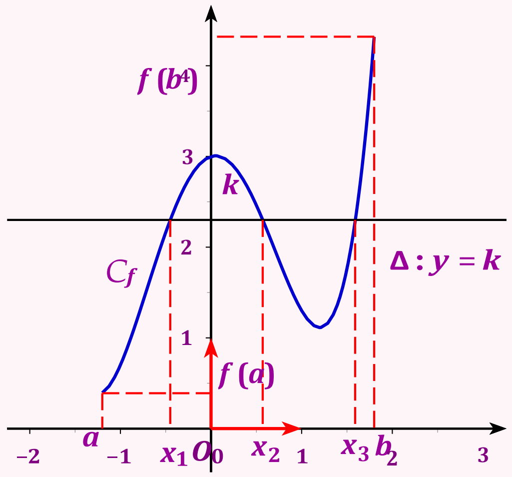
Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $[a, b]$.

En particulier si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.



Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Activité 11
Activité 5 page 17

Activité 12
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que ppur tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
Montrer qu'il existe au moins un réel β de $[0,1]$ tel que $f(\beta) = \beta$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun réel de I alors f gardre un signe constant sur I.

DEMONSTRATION

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$.
m est minimum de f sur $[a, b]$. Il existe un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $m = f(\alpha)$.
M est le maximum de f sur $[a, b]$. Il existe un réel $\beta \in [a, b]$ tel que $M = f(\beta)$.
On dit que f atteint des bornes en α et β.

Exercice 9

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$
Montrer que $f\left(\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

VI Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone :

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini)

1. Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
2. Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
3. Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
4. Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Activité 13
Activité 1 page 19

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est un intervalle de même nature.

Exemple :

Soient a et b deux réels.

Intervalle I	Si f est continue et strictement croissante sur I	Si f est continue et strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,f(a)]$
$I=[a,+\infty[$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)]$
$I=]a,b[$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f[$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.
Déterminer $f(]2,+\infty[)$.

Exercice 11

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur chacun des intervalles $]-\infty,3[$ et $]3,+\infty[$.

x	$-\infty$	-5	2	3	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-3 ↗	8 ↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	7

Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :

1. $]-\infty,-5]$
2. $]-\infty,3[$
3. $]3,+\infty[$