Abdelghafour Rahmouni 20246224
Marc Olivier Jean Paul 20241763

Devoir 1 – IFT2125

1- Notation asymptotique

Question 1

1- $\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \in O(\sqrt{n})$

$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leq c \cdot \sqrt{n}$

On sait que $\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leq \frac{n}{10} \leq \left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil$

Donc on va vérifier si $\frac{n}{10} \leq c \cdot \sqrt{n}$:

$$\frac{n}{10} \leq c \cdot n^{1/2}$$

$$\frac{n}{n^{1/2}} \leq c \cdot 10$$

$$n^{1-\frac{1}{2}} \leq c \cdot 10$$

$$n^{1/2} \leq c \cdot 10$$

$$\sqrt{n} \leq 10c$$

$$n \leq 10c\sqrt{n} \implies\!\!\!\!\!\times$$

C'est une contradiction car n est bornée supérieurement.

donc $\frac{n}{10} \notin O(\sqrt{n})$. Ce qui signifie que $\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \notin O(\sqrt{n})$

2- $n\sqrt{n}\log(n!) \in O(n^3 \log(n))$

$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $\forall n \geq n_0$, $n\sqrt{n}\log(n!) \leq c \cdot n^3 \log(n)$

On a que :

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \log(1 \times 2 \times \ldots \times n) \\ &= \log(1) + \log(2) + \ldots + \log(n) \\ &\leq \log(n) + \log(n) + \ldots + \log(n) \\ &\leq n\log(n) \end{aligned}$$

Donc on va montrer que :

$$n^2\sqrt{n}\log(n) \leq c \cdot n^3 \log(n)$$

$$\sqrt{n} \leq c \cdot n$$

$$1 \leq c \cdot \sqrt{n}$$

Si on prend $c = 1$ et $n_0 = 1$:

$$1 \leq 1 \cdot \sqrt{n} \quad \forall n \geq 1$$

Alors $n^2\sqrt{n}\log(n) \in O(n^3\log(n))$. Donc $n\sqrt{n}\log(n!) \in O(n^3\log(n))$

Question 2

1- $f(n) = \frac{n}{\sqrt[3]{n}}$; $g(n) = \ln(\sqrt{n})$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{n}}}{\ln(\sqrt{n})} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1-\frac{1}{3}}}{\ln(n^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2/3}}{\frac{1}{2}\ln(n)}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ Forme indéterminée.}$$

Nous allons utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2/3}}{\frac{1}{2}\ln(n)} \overset{R.\hat{H}}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{2n^{-1/3}}{3}}{\frac{1}{2n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{2n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{4n}{3\sqrt[3]{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{4n^{1-\frac{1}{3}}}{3}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{4n^{2/3}}{3}$$

$$= \infty$$

Donc $\ln(\sqrt{n}) \in O(\frac{n}{\sqrt[3]{n}})$

2- $f(n) = 2^{bn}$, $g(n) = 3^n$ où $b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{bn}}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^b}{3}\right)^n$$

On sait que $b \geq 2$, donc $\frac{2^b}{3} > 1$. Alors:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^b}{3}\right)^n = \infty$$

Donc $3^n \in O(2^{bn})$

Question 3

$f(n) = 2n^2 - n\sin(n)$

$(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $\forall n \geq n_0$, $f(n+1) \geq f(n)$

Pour montrer que la fonction est É.N.D, on la divise:

a) $g(n) = 2n^2 \Longrightarrow g(n+1) = 2(n+1)^2$

$2(n+1)^2 \geq 2n^2$

$(n+1)^2 \geq n^2$

$n^2+2n+1 \geq n^2$

$2n+1 \geq 0$

$n \geq \frac{-1}{2}$

Donc $g(n) = 2n^2$ est É.N.D $\forall n \geq \frac{-1}{2}$

b) $h(n) = n \cdot \sin(n) \Longrightarrow (n+1)\cdot\sin(n+1)$

$(n+1)\sin(n+1) \geq n \cdot \sin(n)$

$(n+1)\sin(n+1) - n\sin(n) \geq 0$

On a que :

$-1 \leq \sin(n+1) \leq 1$

$-(n+1) \leq (n+1)\sin(n+1) \leq n+1$ ①

et que :

$-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$-n \leq n\sin(n) \leq n$ ②

Cela signifie alors qu'en faisant ①-② on obtient

$-(n+1)+n \leq (n+1)\sin(n+1) - n\sin(n) \leq n+1-n$

$-n-1+n \leq (n+1)\sin(n+1) - n\sin(n) \leq n+1-n$

$-1 \leq (n+1)\sin(n+1) - n\sin(n) \leq 1$

2- Récurrences

Question 1

On a : $t_n = 4t_{n-1} - 4t_{n-2} + 4(n+1)4^n$

$$t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 4(n+1)4^n$$

$$t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = (n+1)4^{n+1} \quad (*)$$

La récurrence n'est pas homogène.

On va l'homogénéiser :

1- On va multiplier par 4 :

$$4t_n - 16t_{n-1} + 16t_{n-2} = (n+1)4^{n+2}$$

2- On remplace n par $n-1$:

$$4t_{n-1} - 16t_{n-2} + 16t_{n-3} = n4^{n+1} \quad (\square)$$

En faisant $(*) - (\square)$, on trouve :

$$\begin{array}{rl} & t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} \qquad\qquad = (n+1)4^{n+1} \\ - & \underline{\qquad 4t_{n-1} - 16t_{n-2} + 16t_{n-3} = n4^{n+1}} \\ & t_n - 8t_{n-1} + 20t_{n-2} - 16t_{n-3} = 4^{n+1} \quad (\triangle) \end{array}$$

La récurrence est toujours non-homogène.

1- On multiplie par 4 :

$$4t_n - 32t_{n-1} + 80t_{n-2} - 64t_{n-3} = 4^{n+2}$$

2- On remplace n par $n-1$

$$4t_{n-1} - 32t_{n-2} + 80t_{n-3} - 64t_{n-4} = 4^{n+1} \quad (\circ)$$

En faisant $(\triangle) - (\circ)$ on trouve :

$$\begin{array}{rl} & t_n - 8t_{n-1} + 20t_{n-2} - 16t_{n-3} \qquad\qquad = 4^{n+1} \\ - & \underline{\qquad 4t_{n-1} - 32t_{n-2} + 80t_{n-3} - 64t_{n-4} = 4^{n+1}} \\ & t_n - 12t_{n-1} + 52t_{n-2} - 96t_{n-3} + 64t_{n-4} = 0 \quad (\diamond) \end{array}$$

Nous avons une récurrence homogène.

On remplace t_n par x^n

$$x^n - 12x^{n-1} + 52x^{n-2} - 96x^{n-3} + 64x^{n-4} = 0$$

On divise ensuit par x^{n-4}

$$x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64 = 0$$

On va diviser par x^2 :

$$x^2 - 12x + 52 - \frac{96}{x} + \frac{64}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{64}{x^2}\right) - 12\left(x + \frac{8}{x}\right) + 52 = 0$$

On pose $p = \left(x + \frac{8}{x}\right)$

On a donc:

$$x^2 + \frac{64}{x^2} = \left(x + \frac{8}{x}\right)^2 - 16$$
$$= p^2 - 16 = p^2 - 4^2$$

L'expression peut se réécrire:

$$p^2 - 16 - 12p + 52 = p^2 - 12p + 36$$

On peut donc chercher les racines:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-12)^2 - 4(1)(36)$$
$$= 144 - 144$$
$$= 0 = \sqrt{\Delta}$$ Il n'y a qu'une seule racine

$$p = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow p = \frac{12}{2} = 6$$

Question 2

Il y a 3 "t.forward(length)" tracés pour un certain level

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 3t(n-1) + 1^n & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose que $t(n) = t_n$

$t_n = 3t_{n-1} + 1$

$t_n - 3t_{n-1} = 1$ $(*)$

On remplace n par $n-1$

$t_{n-1} - 3t_{n-2} = 1$ $(\square)$

On soustrait $(*) - (\square)$

$$\begin{array}{rrrl} & t_n - 3t_{n-1} & & = 1 \\ - & & t_{n-1} - 3t_{n-2} & = 1 \\ \hline - t_n & & -4t_{n-1} + 3t_{n-2} & = 0 \quad (\triangle) \end{array}$$

Donc $-t_n - 4t_{n-1} + 3t_{n-2} = 0$ est

une récurrence homogène

On change t_n par x^n :

$-x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0$

On divise par x^{n-2} :

$-x^2 - 5x + 6 = 0$

On cherche les racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4(-1)(6)$

$= 25 + 24$

$= 1$

Donc :

$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$r_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{-2}$	$r_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{-2}$
$r_1 = \frac{4}{-2}$	$r_2 = \frac{6}{-2}$
$r_1 = -2$	$r_2 = -3$

Le polynôme caractéristique est

$P(x) = (x + 2)(x + 3)$

Donc la forme générale de $(\triangle)$ est

$$\boxed{t_n = -c_1 2^n - c_2 3^n}$$

On va trouver les constantes à l'aide de (*)

On a la condition initiale $t_0 = 0$

$t_n = 3t_{n-1} + 1^n$

$n_1 = 1 \Longrightarrow t_1 = 3t_0 + 1$

$t_n = -c_1 2^n - c_2 3^n$

Donc $t_0 = -c_1 2^0 - c_2 3^0$

$= -c_1 - c_2$

$\Longrightarrow c_2 = -t_0 - c_1$

$t_1 = -2c_1 - 3c_2$

$3t_0 + 1 = -2c_1 - 3c_2$

$3t_0 + 1 = -2c_1 - 3(-t_0 - c_1)$

$3t_0 + 1 = -2c_1 + 3t_0 + 3c_1$

$\boxed{c_1 = 1}$

$c_2 = -t_0 - c_1$

$\boxed{c_2 = -1}$

La solution exacte est donc:

$\boxed{t_n = 3^n - 2^n}$

Donc $\boxed{t_n \in \Theta(3^n)}$

Question 3

1- $t(n) = t\left(\frac{n}{2}\right) + 4n$

On a $l = 1$; $b = 2$; $c = 4$; $k = 1$

On a: $1 < 2^1$

Alors $\boxed{t(n) \in \Theta(n)}$

2- $t(n) = 2t\left(\frac{n}{2}\right) + 2n$

On a $l = 2$; $b = 2$; $c = 2$; $k = 1$

On a: $2 = 2^1$

Alors $\boxed{t(n) \in \Theta(n \log_2 n)}$

3 - $t(n) = 3t\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^3$

On a $l = 3$; $b = 3$; $c = 3$; $k = 3$

On a: $3 < 3^3$

Alors $\boxed{t(n) \in \Theta(n^3)}$

4 - $t(n) = 4t\left(\frac{n}{3}\right) + 2n$

On a $l = 4$; $b = 3$; $c = 2$; $k = 1$

On a: $4 > 3^1$

Alors $\boxed{t(n) \in \Theta(n^{\log_3(4)})}$

5 - $t(n) = 4t\left(\frac{n}{2}\right) + 2n^2$

On a $l = 4$; $b = 2$; $c = 2$; $k = 2$

On a: $4 = 2^2$

Alors $\boxed{t(n) \in \Theta(n^2 \log_2(n))}$