

Républiqu Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté des Sciences



MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Math et Informatique
Département: Informatique
Specialité: Informatique fondamentale et intelligence artificielle

Thème

Classification hybride (Hard et Soft) d'items éducatifs similaires

Présenté par :
Abdou Abarchi Aboubacar

Encadré par :
M^{eme} **Harbouche Khadidja**

Devant le jury composé de :

Président : *M^r* **Abdellatif HABES**
Examinatrice : *M^{me}* **Houda HAFI**

Juillet 2021

**M
A
S
T
E
R**

Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	x
Liste des Acronymes	x
Introduction Générale	1
I État de l’art	4
1 Educational data minig	5
1.1 Introduction	6
1.2 Data mining	6
1.2.1 Définition	6
1.2.2 Les méthodes du data mining	7
1.3 Intelligent Tutorial Systems (ITS)	7
1.3.1 Définition	7
1.3.2 ITS architecture	8
1.4 Educational Data mining	9
1.4.1 Définition	9
1.4.2 Processus d’application du DM en éducation	10
1.4.2.1 Les méthodes d’analyse et d’exploration appliquer dans EDM	11
1.4.2.1.1 L’induction de modèle supervisée	12
1.4.2.1.2 L’induction de modèle non supervisée	12
1.4.2.1.3 L’estimation des paramètres	13
1.4.2.1.4 L’exploration de relations (Relationship mining)	13
1.4.2.1.5 La distillation des données pour le jugement humain (Distillation of data for human judgment)	13
1.4.2.1.6 Discovery with models	14
1.5 Conclusion	14
2 Modèle de l’apprenant et découverte des prérequis	15
2.1 Introduction	16
2.2 Learner Model	16
2.2.1 Définition	16
2.2.2 Caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation de l’apprenant	16
2.2.3 Composantes du modèle de l’apprenant	18

2.2.3.1	Modèle cognitif	19
2.2.3.2	Modèle d'inférence	19
2.2.3.3	Modèle émotionnel	20
2.2.4	Utilitaire du modèle de l'apprenant	20
2.2.5	Types de modèles d'apprentissage	20
2.2.6	Contenu du modèle de l'apprenant	21
2.3	Modèle de compétence	21
2.3.1	Granularité	21
2.3.2	Relations pré-requises	23
2.4	Découverte des prérequis	24
2.5	Conclusion	25
3	L'approche items-to-skills mapping	26
3.1	Introduction	27
3.2	Knowledge	27
3.2.1	Définition	27
3.2.2	Knowledge component	27
3.2.3	Les types de composante de connaissance	28
3.3	Items-to-skills mapping	29
3.3.1	Définition	29
3.3.2	items-to-skills mapping Structure	29
3.3.2.1	Model-Based approach	30
3.3.2.1.1	Définition	30
3.3.2.1.2	Model Based Techniques	31
3.3.3	Similarity-based approach	32
3.3.3.1	Définition	32
3.3.3.2	Processus de similarité des items (éléments)	33
3.3.3.2.1	Input Data	34
3.3.3.2.2	Computed Data	34
3.3.3.3	Item-Similarity measures	35
3.4	Conclusion	36
4	Inférence bayésienne et la théorie de la réponse aux items	37
4.1	Introduction	38
4.2	Inférence bayésienne	39
4.2.1	Définition	39
4.2.2	probabilité conditionnelle et théorème de bayes	39
4.2.3	L'approche Bayésienne	40
4.2.4	Théorème de bayes dans la cadre de l'application de l'approche Bayésienne	40
4.2.4.1	Posterior distribution	41
4.2.4.2	Likelihood	42
4.2.4.3	Prior distribution	42
4.2.4.4	Chaine de Markov Monte Carlo (MCMC)	42
4.2.5	Model selection	43
4.3	La théorie des réponses aux items	44
4.3.1	Les Modèles TRI	45
4.3.1.1	Les modèles à un, deux ou trois paramètres	45
4.3.1.1.1	Le modèle Rasch	46

4.4	Un ajustement bayésien des réponses aux items avec Stan	48
4.4.1	IRT avec Stan	48
4.4.1.1	Déclaration des données	48
4.4.1.2	Les paramètres du model de Rasch (1PL)	49
4.4.1.3	Le model de Rasch	49
4.4.1.4	Les predictions	50
4.5	Conclusion	50
5	Clustering Hard et Soft	51
5.1	Introduction	52
5.2	Les métriques	53
5.3	Critère de liaison	53
5.3.1	Distance inter-cluster	54
5.3.1.1	Distance de liaison unique	55
5.3.1.2	Distance de liaison complète	55
5.3.1.3	Distance de liaison moyenne	56
5.3.1.4	Centroïde Linkage Distance	56
5.3.1.5	Distance de liaison moyenne du centre de gravité	56
5.3.2	Distance intra-cluster	56
5.3.2.1	Distance de diamètre complet	56
5.3.2.2	Distance de diamètre moyen	57
5.3.2.3	Diamètre barycentre Distance	57
5.4	Le clustering hiérarchique	57
5.4.1	Introduction	57
5.4.2	Clustering hiérarchique agglomératif	58
5.4.2.1	Exemple de clustering agglomératif	58
5.4.3	Clustering hiérarchique divisive	59
5.4.4	Procédures de fractionnement des clusters	60
5.4.5	Evaluations des bipartitions	60
5.4.6	Déterminations de niveaux de nœuds	60
5.4.7	Conclusion	61
5.5	Le clustering partitionnel	61
5.5.1	K-means clustering	61
5.5.1.1	Le fonctionnement de l'algorithme k-means	61
5.5.1.2	Les étapes de l'algorithme	61
5.5.1.3	Les lacunes de l'algorithme k-means	63
5.5.1.4	Les solutions aux lacunes de l'algorithme k-means	63
5.6	Fuzzy clustering	64
5.6.1	Introduction	64
5.6.2	Fuzzy C-means clustering :	65
5.6.2.1	Algorithme FCM :	66
5.6.3	Conclusion	66
5.7	Les autres méthodes de clustering	67
5.8	La différence entre le clustering hiérarchique, partitionnel et Fuzzy clustering	68
5.9	Indice de validité du clustering	68
5.10	Conclusion	70

II Contributions	71
6 Contribution and Results	72
6.1 Introduction	73
6.2 Approche proposée	73
6.3 Implémentations et résultats expérimentaux	73
6.3.1 Outils de développement	73
6.3.1.1 Matériels	73
6.3.1.2 Outils et packages	74
6.3.2 Collecte et préparation des données	76
6.3.3 IRT	76
6.3.4 Clustering	76
6.4 Conclusion	76
 Conclusion Générale	 76
Bibliographie	78

Table des figures

1.1	Les étapes de l'extraction de connaissances à partir de données	7
1.2	ITS architecture	8
1.3	Principaux domaines liés à l'exploration de données éducatives	10
1.4	Data mining application process applied in education	11
1.5	EDM techniques	12
2.1	Composantes du modèle de l'apprenant	18
2.2	Deux alternatives pour modéliser les relations d'agrégation.	22
2.3	Agrégation de modélisation de réseau bayésien et relations préalables simultanément	24
2.4	Modèles d'équations structurelles	25
3.1	Knowledge Component	28
3.2	Items-to-skills mapping Structure	30
3.3	Model based	31
3.4	Q-matrix	32
3.5	Illustration de l'approche générale de l'analyse des éléments basée sur la similarité des éléments.	33
3.6	L'approche générale du calcul et de l'application de la similarité des éléments.	34
4.1	La distribution à priori, à posteriori et celle de la fonction de vraisemblance.	41
4.2	43
4.3	46
4.4	47
5.1	Distances intracluster et intercluster.	54
5.2	La direction du clustering hiérarchique agglomérative et divisive.	59
5.3	Les étapes de l'algorithme k-means.	62
5.4	La méthode Elbow.	64

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation des apprenants partie[1]	17
2.2	Caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation des apprenants partie[2]	18
3.1	La matrice d'accord pour deux items.	35
3.2	Coefficients de mesures de similarités.	35
5.1	Les métriques	53
5.2	Les critères de liaison	54
5.3	Les autres méthodes de clustering	67
5.4	Indice de validité du clustering Hard	69
5.5	Indice de validité du clustering Soft	70
6.1	Caractéristiques du matériels utilisés	73
6.2	Indice de validité du clustering Hard	74
6.3	Indice de validité du clustering Hard	75
6.4	Indice de validité du clustering Hard	76

Liste des Acronymes

EDM	Educational Data Mining
ITS	Intelligent Tutorial Systems
IALT	Intelligent Computer Assisted Instruction
CAI	Computer Assisted Instruction
BKT	Bayesian Knowledge Tracing
AHC	Agglomerative Hierarchical Clustering
DIANA	Divisive Analysis Clustering
PDDP	Principal Directions Divisive Partitioning
FCM	Fuzzy C-means
IRT	Item Response Theory
TRI	Théorie des Réponses aux Items
MCMC	Markov Chain Monte Carlo

Introduction générale

Les systèmes informatisés conservent généralement des données détaillées des interactions utilisateur-système, plus précisément des interactions système-apprenant dans les systèmes éducatifs et les systèmes de tutorat intelligent (ITS) en particulier. Ces données détaillées qui sont généralement dans une grande base de données offre des opportunités pour étudier ces données récolter. Dans les systèmes éducatifs et les systèmes de tutorat intelligent (ITS), les données sont enregistrées dans une base de données à chaque transaction qui est une interaction entre l'apprenant (étudiant) et le système de tutorat. La transaction se définit comme chaque tentative correcte ou incorrect, ou encore quand l'apprenant demande d'aide ou conseil (généralement appelé « hint » en anglais) sur un « item » qui se définit comme une question ou une tâche que l'apprenant doit accomplir. Les opportunités qu'offre les données collecter à partir d'un ITS sont : étudier le comportement de l'apprenant face au système, extraction des modèles supervisés et non supervisé à partir des données, estimations des paramètres Bayesian Knowledge Tracing (BKT) et de capter plus de nuances dans le comportement humains et d'estimer la capacité de l'apprenant à réussir un item et aussi d'estimer la difficulté, la discrimination des items et le paramètre de pseudo-chance. En général plusieurs modèles peuvent être obtenus à partir des données des ITS : des « model-based approach » et « similarity-based approach » qui sont obtenus après avoir mapper les éléments (« items ») aux compétences (« skills »); des modèles Bayesian Knowledge Tracing (BKT); des modèles de la théorie des réponses aux items TRI 1PL, 2PL, 3PL (modèles à un, deux ou trois paramètres).

Problématique

L'évaluation pédagogique concerne l'inférence sur les connaissances, les compétences et les réalisations des élèves parce que les données ne sont jamais aussi complètes et sans équivoque qu'elles garantissent la certitude. La théorie des réponses aux items (Item Response Theory IRT) intervient dans cette situation pour faire un ajustement bayésien des réponses

aux items en améliorant potentiellement la notation des tests et d'éclairer une décision sur l'intérêt de collecter le jeu de données où IRT a été appliqué.

Aussi, dans les systèmes éducatifs, et en particulier dans les systèmes de tutorat intelligent (ITS), beaucoup d'aptitudes ont une forte relation causale dans laquelle une aptitude doit être présentée avant une autre (hiérarchie des compétences selon les pré-requis), ce qui incite à séquencer l'apprentissage afin que les apprenants maîtrisent les compétences préalables avant de passer aux compétences qui en dépendent. Dans ce cas plusieurs méthodes peuvent être utilisées comme les méthodes basées sur la similarité et ceux sur un modèle après avoir mapper les éléments aux compétences (Item-to skill mappings aussi appelé Q-matrix). Les méthodes basées sur la similarité, pour réaliser ce mappage, s'appuient sur l'hypothèse que les apprenants auront tendance à avoir des performances similaires sur des éléments qui nécessitent la même compétence. Ces méthodes cherchent d'abord à calculer une mesure ou un degré de similarité pour chaque paire d'items. Le calcul de mesure de similarité des éléments est effectué en utilisant certains coefficients de similarité (Pearson, Kappa, Yule, Jaccard, Sokal et Fisher), tout en prenant en compte en plus des informations correctes et incorrectes (obtenues par l'apprenant sur un item) d'autres caractéristiques comportementales telles que le temps de réponse, le comportement de l'apprenant, le nombre de tentative sur un item, le hasard, etc.

Objectif et le Travail réalisé

Nous avons utilisé IRT dans l'implémentation pour un ajustement bayésien des réponses aux items avant de décider si oui ou non le jeu de données vaille le coup. L'inférence bayésienne qui est une méthode d'apprentissage des valeurs des paramètres dans les modèles statistiques à partir de données, est utilisée avec le modèle de Rasch pour faire l'ajustement des réponses obtenues par les apprenants.

Après la validation du jeu de données, une matrice de similarité entre les items a été créée selon le critère suivant : chaque item a un nombre de réponse correct avec aide (hints) et sans aide, et incorrect avec aide et sans aide. Ensuite un clustering hard et soft a été effectué avec la matrice de similarité.

Plan du document :

Ce document est organisé en deux parties :

La première partie : La première partie : présente l'état de l'art sur les différents domaines entrant en jeu dans le cadre de ce mémoire. Elle est composée de trois chapitres à savoir educational data mining, modèle de l'apprenant et découverte des prérequis, l'approche items-to-skills mapping, l'inférence bayésienne et la théorie de la réponse aux items, et Clustering Hard et Soft.

Dans le premier chapitre nous présentons une définition des terminologies du data mining, du data mining éducatif et de leurs techniques, en précisant l'intégration du data mining dans l'éducation. Une présentation des concepts du modèle de l'apprenant, et une brève description des méthodes utilisées pour la modélisation de l'apprenant. Et comment les pré-requis de l'apprenant sont découverts dans le chapitre 2. Une définition des terminologies de la connaissance, composante de la connaissance et les approches pour le mappage des éléments aux compétences dans le troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre nous avons défini et présenté les concepts de l'inférence bayésienne, de la théorie des réponses aux items, de l'application de l'inférence bayésienne pour faire l'estimation des paramètres des modèles IRT. Et dans le cinquième chapitre, nous présentons le clustering hard et soft plus précisément le clustering hiérarchique, partitionnel, « fuzzy clustering » (clustering flou) et une brève introduction d'autre méthode de clustering.

La deuxième partie : présente les contributions essentielles apportées. Elle est composée d'un seul chapitre dans lequel nous présentons les étapes parcourus jusqu'à l'obtention des résultats.

Enfin, nous clôturons notre modeste travail par une conclusion générale ainsi que les différentes perspectives à développer dans l'avenir pour toute éventuelle amélioration de ce travail.

Première partie

État de l'art

CHAPITRE 1

Educational data minig

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Data mining	6
1.3	Intelligent Tutorial Systems (ITS)	7
1.4	Educational Data mining	9
1.5	Conclusion	14

1.1 Introduction

Du fait que les systèmes informatisés conservent des journaux détaillés des interactions utilisateur-système, ces journaux détaillés qui sont généralement dans une grande base de données ouvrent de nouvelles opportunités pour étudier ces données récolter.

L'EDM emprunte et étend des domaines connexes tels que l'apprentissage automatique (l'étude des programmes informatiques qui apprennent et s'améliorent avec des données empiriques), l'exploration de texte (approches pour trouver des modèles dans texte en langue) et statistiques. D'autres influences importantes sont la psychométrie (l'étude des instruments psychologiques pour mesurer les compétences et les traits humains) et l'analyse des journaux Web (approches pour identifier les profils d'utilisateurs et la navigation modèles d'utilisateurs du site Web).

Dans ce chapitre, nous présentons les techniques d'exploration de données, et un ensemble de technique d'analyse pour une variété de problèmes dans la recherche en éducation et développement technologique (Romero et al. 2010 ; International Working Group on Educational Data Mining, n. d.) [1].

1.2 Data mining

1.2.1 Définition

"L'exploration de données est un processus itératif et interactif dont l'objectif est la découverte de modèles de données valides, nouveaux, utiles et compréhensibles dans de grandes bases de données." (Talbi, 2015)

L'exploration de données, également appelée découverte de connaissances dans une base de données, fait référence à l'extraction de connaissances à partir de grandes quantités de données. Elle est utilisée pour extraire de grands volumes de données pour découvrir des modèles cachés et des relations utiles dans la prise de décision. Bien que l'exploration de données et la découverte de connaissances de base de données soient souvent traitées comme des synonymes, elles font en fait partie du processus de découverte des connaissances. La séquence des étapes identifiées lors de l'extraction des connaissances à partir des données est illustrée à la figure 1.1 [2].

L'exploration de données est un domaine interdisciplinaire utilisant à la fois des techniques

d'apprentissage automatique, de reconnaissance de formes et l'utilisation de statistiques, de bases de données et de visualisation pour déterminer les façons d'utiliser l'extraction d'informations à partir de très grandes bases de données (Cabena et al., 1998).

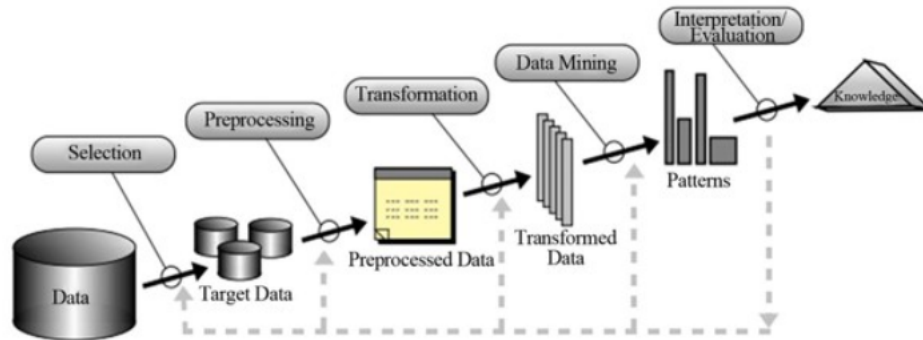


FIGURE 1.1 : Les étapes de l'extraction de connaissances à partir de données

1.2.2 Les méthodes du data mining

Le clustering et la classification sont deux tâches fondamentales dans l'exploration de données. La classification est principalement utilisée comme méthode d'apprentissage supervisé, le clustering pour l'apprentissage non supervisé (certains modèles de clustering sont pour les deux). Le but du clustering est descriptif, celui de la classification est prédictif (Veyssieres et Plant, 1998).

« Comprendre notre monde nécessite de conceptualiser les similitudes et les différences entre les entités qui le composent » (Tyron et Bailey, 1970) [3]. De ce fait, certains coefficients de corrélations sont utilisés pour calculer la similarité entre deux éléments ou plusieurs et, des métriques et les critères de liaison permettent qu'en ta eux de déterminer le lien entre plusieurs entités afin de les groupées dans une même classe (c'est le cas du clustering).

Certaines méthodes comme : rule of association, preaching, neural networks, decision trees sont utilisé aussi pour explorer et analyser des jeux de données.

1.3 Intelligent Tutorial Systems (ITS)

1.3.1 Définition

Les systèmes de tutorat intelligents (ITS) sont des environnements d'apprentissage informatisés issus de l'IALT (Intelligent Computer Assisted Instruction) qui visent à personnaliser la formation. En effet, ils ont été développés pour répondre aux limites du CAI (Computer

Assisted Instruction) en utilisant l'intelligence artificielle pour mettre en œuvre des systèmes plus flexibles et interactifs qui s'adaptent « aux besoins spécifiques de l'apprenant en évaluant et en diagnostiquant ses problèmes afin de fournir les assistances » (Buche C., 2005). L'objectif est de mimer le comportement d'un tuteur humain en sa qualité de pédagogue expert et d'expert dans le domaine. Ainsi, tout comme un tuteur, un logiciel de ce type a le potentiel d'amener l'apprenant à accomplir une tâche et à fournir un retour sur leurs actions. ITS répond ainsi à la nécessité de placer l'apprenant au centre du processus d'apprentissage [4].

Les ITS sont essentiellement un environnement de résolution de problèmes ou d'exercice. Ils favorisent l'apprentissage dans un domaine spécifique en guidant et en aidant l'apprenant. Parfois, ils exposent d'abord le contenu de la matière à l'apprenant ; parfois ils présentent directement les exercices qui permettront à l'apprenant d'assimiler les connaissances [5].

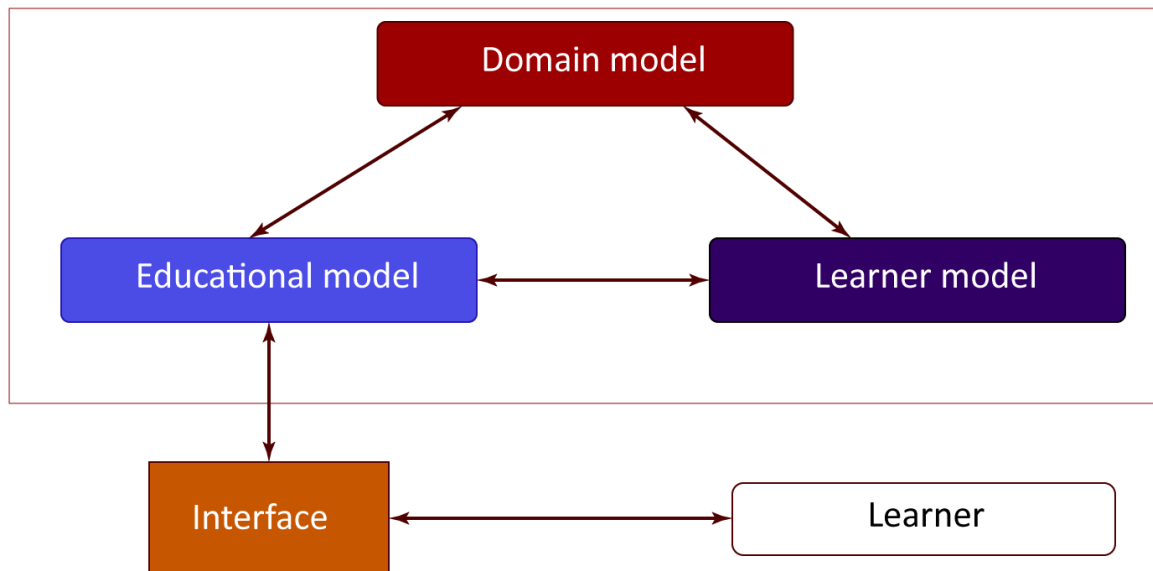


FIGURE 1.2 : ITS architecture

1.3.2 ITS architecture

L'architecture conceptuelle d'un ITS est illustrée à la figure 1.2 et comprend : [5]

- **Un modèle de l'interface** : qui représente la couche de communication entre l'apprenant et le système, c'est-à-dire les interactions entre l'apprenant et le système. Cette interface peut faire varier le type d'environnement d'apprentissage et l'objectif étant de privilégier une approche de conception qui ne gêne pas l'apprentissage. La qualité de l'interaction peut influencer les résultats d'apprentissage. Par conséquent, les principaux problèmes avec les interfaces d'apprentissage sont les problèmes d'inter-

action personne / machine. Pour surmonter ces problèmes, il faut prêter attention à la convivialité pour que la charge mentale associée à l'interface soit négligeable, ainsi qu'à l'utilité en facilitant l'accès, en permettant l'accès au domaine d'apprentissage et en soutenant la métacognition de l'apprenant. Les tendances actuelles s'orientent vers des dialogues tutoriels en langage naturel, l'intégration de la dimension affective dans l'interaction et les interfaces tangibles.

- **Modèle du domaine** : également appelé modèle expert, il représente l'expertise de l'enseignant dans le domaine, c'est-à-dire ce qui doit être enseigné. Elle peut être modélisée de trois manières : une approche « boîte noire » : appliquer toute méthode de raisonnement sur le domaine inexplicé, sans aucune transparence pour l'utilisateur ; un système expert peut expliquer son raisonnement et un modèle cognitif : simuler la manière dont les humains utilisent les connaissances.
- **Un modèle d'apprentissage** : qui peut personnaliser l'apprentissage en tenant compte des spécificités de l'apprenant.
- **Un modèle éducatif** : qui sait enseigner.

1.4 Educational Data mining

1.4.1 Définition

La communauté d'exploration de données appliquée dans l'éducation a défini ce terme comme suit : « L'exploration de données appliquée dans l'éducation est une discipline qui concerne le développement de méthodes permettant d'explorer les types uniques de données provenant des milieux éducatifs. Ces méthodes sont utilisées pour mieux comprendre le comportement des apprenants et environnement de leur apprentissage. » [6]

L'exploration de données éducatives (EDM) vise à développer, rechercher et appliquer des méthodes informatisées pour détecter des modèles dans de grandes collections de données éducatives qui seraient autrement difficiles ou impossibles à analyser en raison de l'énorme volume de données dans lesquelles elles existent [3].

Ce domaine est une forme d'intersection des trois domaines principaux tels que : l'informatique, l'éducation et les statistiques illustrés dans la figure 1.3.

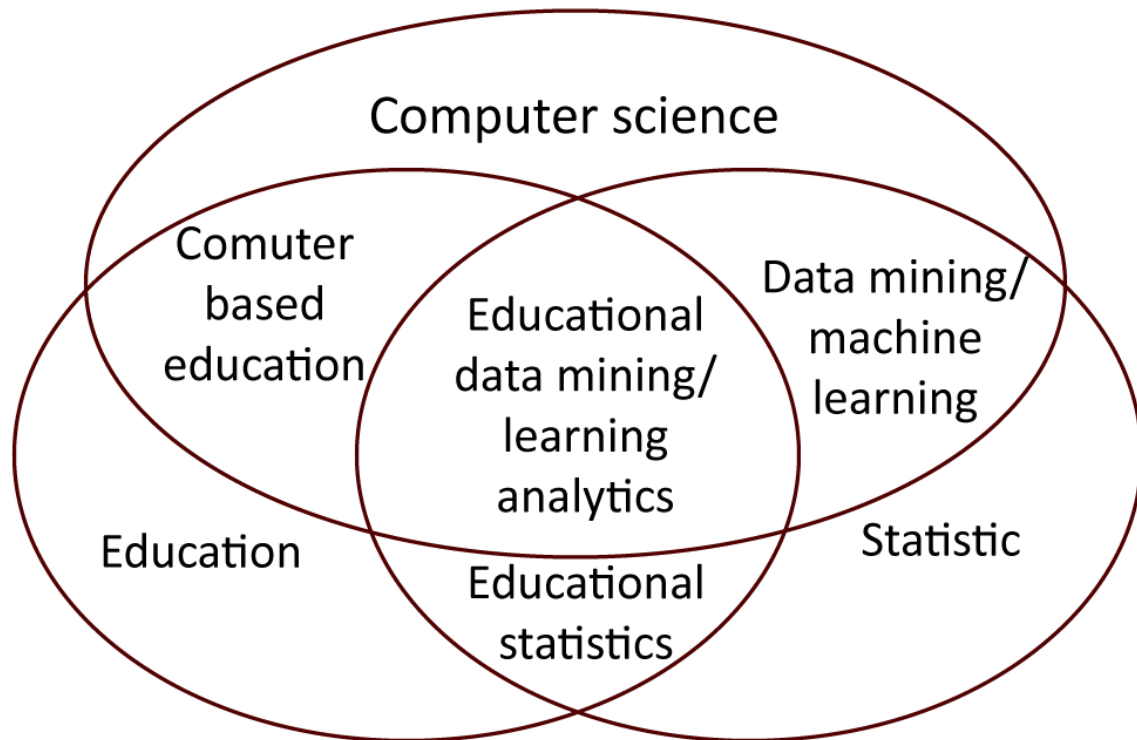


FIGURE 1.3 : Principaux domaines liés à l’exploration de données éducatives

Les techniques d’exploration de données (EDM) sont devenues plus importantes dans la recherche et le développement en raison du développement rapide de la technologie, de la croissance rapide des connaissances humaines et de l’augmentation du nombre de personnes détenant des systèmes d’enseignement informatisé.

1.4.2 Processus d’application du DM en éducation

Le processus d’application de l’exploration de données appliqué dans l’éducation peut être considéré comme un cycle itératif de formulation, de test et de raffinement d’hypothèses. Dans ce processus, l’objectif n’est pas seulement de transformer les données en connaissances, mais aussi de filtrer les connaissances extraites pour savoir comment les modifier.

L’environnement éducatif pour améliorer l’apprentissage des apprenants est présenté dans la figure 1.4. Des études ont montré que l’application de l’EDM est similaire au processus Knowledge from Data (KDD). Ce processus commence par la collecte de données à utiliser à partir de l’environnement éducatif.

Les données brutes obtenues nécessitent un nettoyage et un prétraitement tels que : fusion de données hétérogènes, traitement des données manquantes, conversion de données d’une

source de données à une autre, et données, etc. Cette phase nécessite souvent l'utilisation de certaines données techniques minières.

Le résultat de ce dernier est un modèle capable de structurer les données stockées. Enfin, la dernière étape est l'interprétation et l'évaluation des résultats obtenus [7].

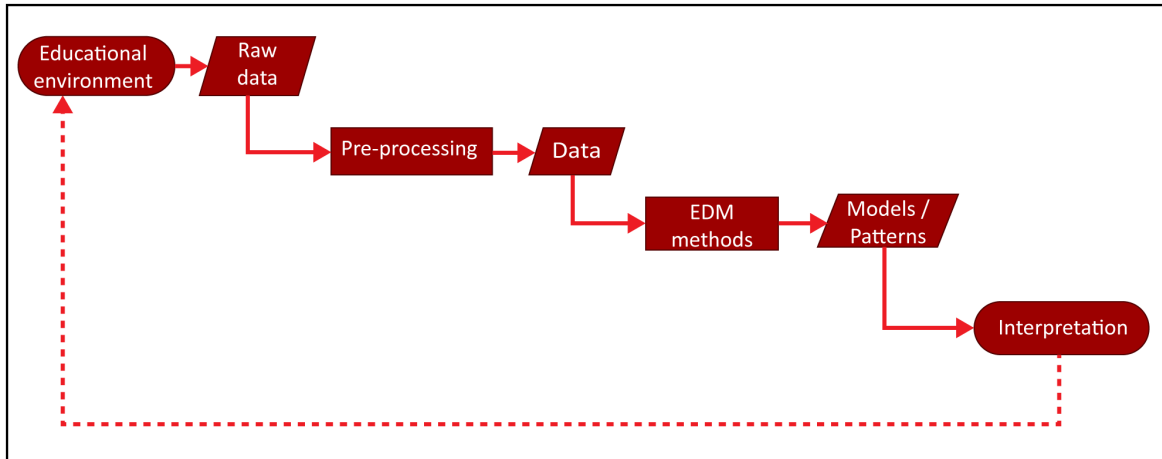


FIGURE 1.4 : Data mining application process applied in education

1.4.2.1 Les méthodes d'analyse et d'exploration appliquer dans EDM

Certaines méthodes du data mining ont été largement appliquées sur les données issues des systèmes éducatif afin d'obtenir des connaissances cachées et des modèles. Les méthodes du data mining ont été appliquées dans plusieurs domaines de recherche tels que : le e-learning, le système de tuteur intelligent, text mining, réseaux sociaux, web mining, etc. Les méthodes d'analyse et d'exploration de données éducatives sont tirées de diverses sources littéraires, notamment l'apprentissage automatique, la psychométrie et d'autres domaines de la modélisation informatique, des statistiques et de la visualisation de l'information.

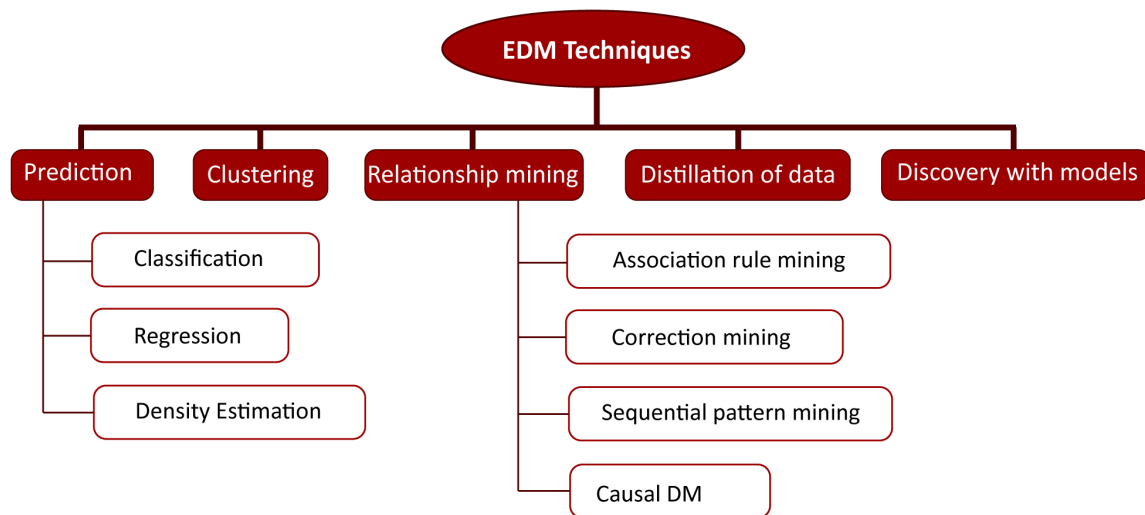


FIGURE 1.5 : EDM techniques

1.4.2.1.1 L’induction de modèle supervisée L’induction de modèle supervisée comprend des techniques d’apprentissage automatique qui déduisent des modèles de prédiction à partir de instances d’entraînement pour lesquelles les valeurs d’un attribut cible sont connues. Les modèles de prédiction acceptent instances en entrée (généralement décrites comme un vecteur d’attribut) et en sortie une prédiction pour la cible attribut. Les modèles qui prédisent des valeurs cibles catégorielles sont appelés modèles de classification; des modèles qui prédire les valeurs cibles continues sont appelés modèles de régression. Les modèles de prédiction peuvent être basés sur différentes représentations, par exemple, les arbres de décision, les machines à vecteurs de support (les deux classifications) et modèle de régression linéaire (régression) [1].

1.4.2.1.2 L’induction de modèle non supervisée L’induction de modèle non supervisée comprend des techniques d’apprentissage automatique qui déduisent des modèles à partir d’instances d’apprentissage pour lesquelles les valeurs d’un attribut cible ne sont pas connues. Les méthodes non supervisées utilisent une approche ascendante, c’est-à-dire que les modèles et les structures sont recherchés dans l’espace d’entrée sans catégories cibles explicitement définies ni exemples étiquetés. Une approche largement utilisée est le clustering, qui est utilisé pour identifier des groupes d’instances dans un ensemble d’apprentissage qui sont « similaires » à certains égards. En règle générale, une sorte de mesure de distance (par exemple, la distance euclidienne) est utilisée pour décider de la similitude des instances. Une fois un ensemble de clusters a été déterminé, de nouvelles instances peuvent être classées en déterminant le cluster le plus proche. Un algorithme de clustering bien connu est le clustering k-means [1].

1.4.2.1.3 L'estimation des paramètres L'estimation des paramètres comprend des techniques statistiques pour déduire des paramètres de modèles probabilistes à partir d'un jeu de données. Ces modèles peuvent être utilisés pour prédire la probabilité d'événements d'intérêt. L'approche est basée sur l'hypothèse que le modèle a une forme paramétrique donnée (par exemple, une distribution gaussienne avec les paramètres moyenne et variance). Un exemple d'application en EDM est l'estimation des paramètres Bayesian Knowledge Tracing (BKT). Le BKT est utilisé pour déterminer la probabilité qu'un élève maîtrise une compétence sur la base de l'historique des performances passées. Un modèle BKT peut être compris comme un réseau bayésien dynamique avec quatre paramètres (priorité, estimation, glissement et taux d'apprentissage). Ces paramètres peuvent être déterminés, par exemple, avec l'algorithme Espérance-Maximisation. Aussi l'utilisation de la théorie des réponses aux items (Item Response Theory IRT) permet de capter plus de nuances dans le comportement humain et d'estimer la capacité de l'apprenant à réussir un item et aussi d'estimer la difficulté, la discrimination des items [1].

1.4.2.1.4 L'exploration de relations (Relationship mining) L'exploration de relations concerne l'identification des relations entre les variables, des relations qui peuvent être de nature associative, corrélationnelle, séquentielle ou causale. Par exemple, une approche courante de l'exploration de règles d'association consiste à apprendre les règles SI-ALORS qui dépassent un seuil minimum de « support » et de « confiance ». La prise en charge indique la fréquence relative des transactions qui correspondent à la fois aux parties IF et ALORS de la règle. La confiance dénote la fréquence relative des transactions qui correspondent à la partie THEN de la règle dans l'ensemble de transactions qui correspondent à la partie IF. Apriori est, par exemple, un algorithme de règle d'association classique. Un exemple d'application en EDM est l'identification d'erreurs qui se produisent fréquemment ensemble (par exemple, les étudiants qui ont commis les erreurs A et B ont également souvent commis l'erreur C) [1].

1.4.2.1.5 La distillation des données pour le jugement humain (Distillation of data for human judgment) La distillation des données pour le jugement humain vise à représenter les données de manière intelligible à l'aide de statistiques, méthodes de visualisation et interfaces d'information interactives. Par exemple, les performances moyennes les scores peuvent être calculés pour chaque élève et présentés à un enseignant par ordre croissant dans un graphique à barres. Un autre exemple est les courbes d'apprentissage, qui tracent les performances d'un élève (par exemple, le temps de réponse) par rapport au nombre d'occasions de pratiquer une compétence. Une courbe d'apprentissage idéale montre que la

performance s'améliore en douceur et de façon monotone, suivant approximativement une loi de puissance ou une fonction exponentielle. D'un autre côté, les courbes d'apprentissage avec des pointes indiquent qu'une autre compétence pourrait interférer avec la compétence réellement modélisée, c'est-à-dire que le modèle de compétence pourrait être amélioré [1].

1.4.2.1.6 Discovery with models Discovery with models (découverte avec des modèles) comprend des approches qui amorcent des modèles déjà existants pour faire des découvertes plutôt que de calculer de nouveaux modèles à partir de zéro. Par exemple, un modèle de prédiction pourrait être appliqué à un ensemble de données pour prédire les valeurs d'une catégorie cible d'intérêt. Les prédictions elles-mêmes pourraient être utilisés à nouveau comme données dans d'autres analyses, par exemple, ils pourraient être corrélés avec une catégorie cible d'un autre modèle de prédiction. Un autre exemple consiste à scruter les différentes composantes d'un modèle de prédiction pour en savoir plus sur les facteurs qui influencent la prédiction [1].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue le domaine de l'exploration de données éducatives, en présentant brièvement ses applications et ses techniques. L'application des méthodes d'exploration de données dans le secteur de l'éducation est un phénomène intéressant. Les techniques d'exploration de données dans les organisations éducatives nous aident à en apprendre davantage sur les performances des apprenants, le comportement des apprenants, la conception des programmes et à motiver les apprenants sur divers paramètres.

CHAPITRE 2

Modèle de l'apprenant et découverte des prérequis

Sommaire

2.1	Introduction	16
2.2	Learner Model	16
2.3	Modèle de compétence	21
2.4	Découverte des prérequis	24
2.5	Conclusion	25

2.1 Introduction

Le terme "apprentissage" fait souvent référence à l'apprentissage électronique ou e-learning. L'apprentissage en ligne, l'apprentissage à distance et l'apprentissage en ligne. L'apprentissage en ligne est connu comme des activités d'étude avec le soutien d'un ordinateur et d'un réseau (Fröschl, 2005, p. 12).

Dans l'apprentissage en ligne, la communication entre les apprenants et les enseignants ou les apprenants et les apprenants se fait sur le réseau ou sur Internet, les supports d'apprentissage sont souvent des documents électroniques tels que des pages Web et des fichiers au lieu de livres traditionnels sur papier [8]. Dans ce chapitre, nous décrivons la modélisation de l'apprenant compte tenu de son importance dans tous les domaines de recherche. Nous commençons par une présentation des notions du modèle de l'apprenant et des caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation de l'apprenant. Puis nous terminons avec la Découverte des prérequis.

2.2 Learner Model

2.2.1 Définition

Winkels décrit le modèle de l'apprenant comme une structure de données qui reflète l'état des connaissances supposées de l'apprenant sur un domaine cible (le domaine d'apprentissage) [9]. Selon Self, le modèle de l'apprenant devrait inclure les informations suivantes : les connaissances et les idées fausses de l'apprenant, ses compétences et son comportement. Pour déterminer ce que l'apprenant a fait, Self souligne qu'il est nécessaire d'avoir un historique des interactions de l'apprenant avec le système [10].

Greer considère le modèle de l'apprenant comme une représentation abstraite des croyances, des connaissances et des compétences de l'apprenant dans le système, y compris l'historique des actions de l'apprenant qui peut être analysé et interprété [11].

2.2.2 Caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation de l'apprenant

Il existe plusieurs modèles existants classés selon la nature des informations extraites par le modèle et les méthodes utilisées pour les traiter 2.1 et 2.2. [12]

Méthodes	Applications	Avantage	Limites
Modèle de superposition	Modélisation des connaissances de l'apprenant à travers le modèle de connaissance.	-Haute expressivité des problèmes complexes et flexibilité du raisonnement humain.	-Impossible de détecter les erreurs de l'apprenant
Modèle différentiel	Identification des lacunes dans les connaissances des apprenants	- utilisation de la structure du modèle de connaissance.	-La complexité dépend de la structure du domaine. - Défaut de modéliser les erreurs de l'apprenant.
Modèle d'erreur	Identification des erreurs et fausses croyances de l'apprenant sur un domaine.	Identification des erreurs et fausses croyances de l'apprenant dans un domaine.	Difficulté à modéliser et à définir les erreurs.
Stéréotypes	Classification des apprenants selon des caractéristiques communes, les plus utilisées sont : le style d'apprentissage, le style cognitif, le niveau de connaissance et les préférences.	Initialisation de nouveau caractéristiques de l'apprenant.	
Les ontologies	-Modélisation du modèle de connaissance. -Réutilisation et partage des ressources.	-Ajout de sémantique aux relations entre concepts. -Réutilisation des ressources.	
Logique floue	-Expression linguistique du niveau de connaissance. -Évaluation des apprenants. -Identification du style de l'apprenant.	-Expression du degré d'incertitude. -Grande expressivité linguistique et logique.	-Consommation de ressources -Pas d'apprentissage.

TABLE 2.1 : Caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation des apprenants partie[1]

Méthodes	Applications	Avantage	Limites
Réseau Bayésien	<ul style="list-style-type: none"> -Apprendre et prédire le comportement et le raisonnement de l'apprenant. -Classement des apprenants. -Prédiction des performances des apprenants. 	<ul style="list-style-type: none"> -Apprendre et s'adapter à un environnement incertain. -Résoudre le problème « on-learning » -Fonction avec des données manquantes. 	<ul style="list-style-type: none"> -Consommation de ressources -Difficulté à comprendre les inférences (interprétation) -Grand nombre de variables utilisées.
Programmation génétique	<ul style="list-style-type: none"> -Recommandation d'un chemin de navigation optimal. -Prédiction des performances des apprenants. -Amélioration des algorithmes de classification. 	<ul style="list-style-type: none"> -Recherche globale -représentation flexible aux changements. -des recherches puissantes dans un espace de problèmes complexes et mal définis. 	<ul style="list-style-type: none"> -Temps d'exécution -Convergence vers les optima locaux
Réseau flou de neurones	<ul style="list-style-type: none"> -Évaluation et prédiction des performances des apprenants. 	<ul style="list-style-type: none"> -Grand Expressivement -Apprentissage -gestion des incertitudes. 	<ul style="list-style-type: none"> La complexité augmente avec le nombre d'entrées du réseau.

TABLE 2.2 : Caractéristiques des méthodes utilisées pour la modélisation des apprenants partie[2]

2.2.3 Composantes du modèle de l'apprenant

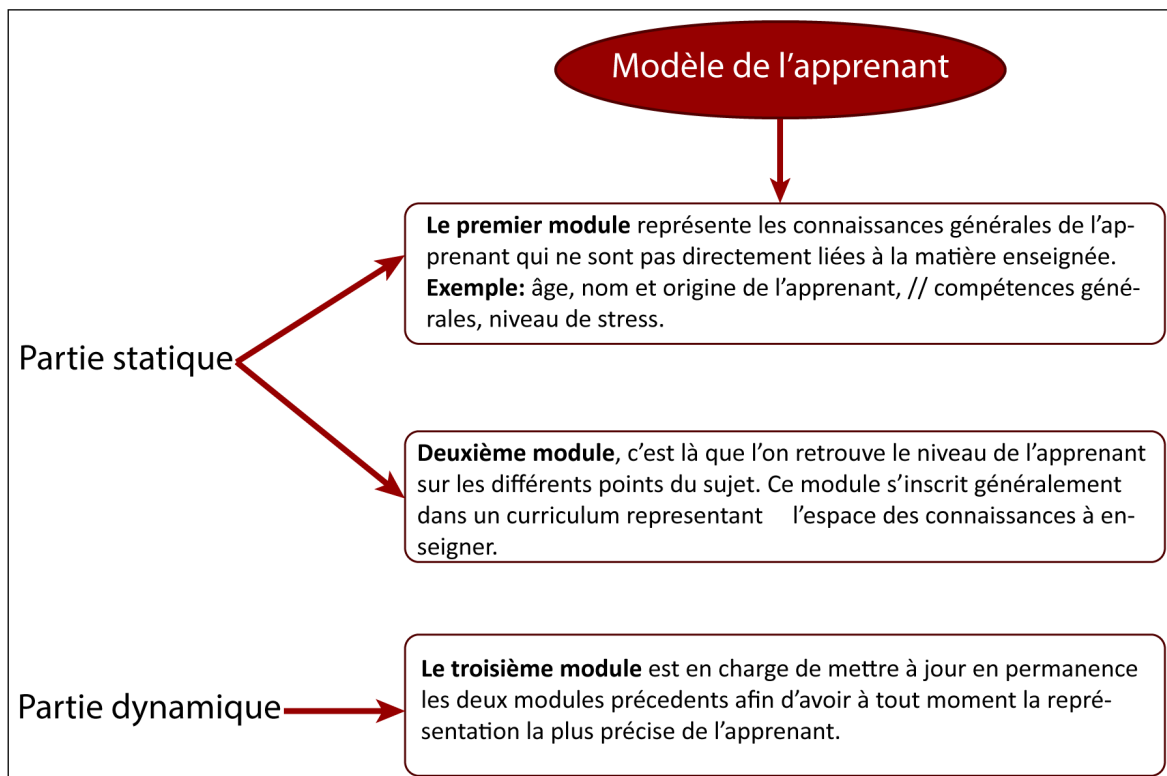


FIGURE 2.1 : Composantes du modèle de l'apprenant

Carr et Goldstein citent, par exemple, quatre informations nécessaires pour maintenir ce modèle : la difficulté du sujet, les questions directement posées par l'apprenant, la performance de l'apprenant et son expérience d'apprentissage [13]. Self définit le modèle de l'apprenant comme un 4-tuplet contenant les variables P (connaissance procédurale), C (connaissance conceptuelle), T (caractéristiques individuelles) et H (histoire) [14].

Un modèle de l'apprenant 2.1 comprend toujours des connaissances liées au domaine d'enseignement : ce que l'apprenant sait et ce que l'apprenant peut faire. Dans son état le plus complet, ce modèle comprend également des connaissances indépendantes du domaine enseigné. Certaines de ces connaissances sont liées à ses mécanismes d'apprentissage : comment fonctionne l'apprenant ? Comment découvre-t-il de nouveaux concepts ? De nouvelles techniques ? Etc. Les autres concernent les stratégies pédagogiques correspondantes : quels sont les types et modalités d'intervention les plus efficaces ? Etc.

Selon Nkambou, le modèle de l'apprenant est identifié en trois parties : [15]

2.2.3.1 Modèle cognitif

Description de l'état des connaissances de l'apprenant par rapport au sujet considéré par le bailleur de fonds. Ces informations concernent :

- **Capacités** : les informations sur les capacités reflètent le niveau de connaissances de l'apprenant. Robert M. Gagne a classé les capacités de l'apprenant en cinq catégories : l'information verbale, les compétences intellectuelles, les attitudes, la motricité et les stratégies cognitives.
- **Objectifs** : les informations sur les objectifs indiquent si l'apprenant a déjà atteint ou non un objectif.
- **Ressources** : les informations sur les ressources (exercices, problèmes, tests, etc.) reflètent le fait qu'une ressource a déjà été utilisée par un apprenant et le contexte dans lequel cette ressource a été utilisée.
- **Relations éventuelles** : les informations sur les relations indiquent si l'apprenant a réussi ou échoué à établir une relation (par exemple, analogie, abstraction, cas particulier, etc.) entre deux connaissances (et par conséquent, la connaissance d'une relation entre deux connaissances est aussi connaissance (méta-connaissance)).

2.2.3.2 Modèle d'inférence

Cette partie est une sorte de moteur d'inférence qui fonctionne en permanence pour ajuster le modèle de l'apprenant. Il contient des règles qui lui permettent de raisonner sur le

modèle cognitif et sur le modèle psychologique (modèle affectif) pour inférer de nouvelles connaissances dans le modèle de l'apprenant.

2.2.3.3 Modèle émotionnel

Ce modèle est un ensemble de données qui nous permet d'identifier la personnalité et les différentes facettes d'un apprenant. Il contient des connaissances sur les caractéristiques permanentes ou momentanées particulières de l'apprenant. Parmi ceux-ci, nous avons :

- Connaissance des conditions mentales PUX. Par exemple, l'apprenant est spatial ou verbal, réfléchi ou impulsif, etc.
- Connaissance des sentiments et de la personnalité. Par exemple, l'apprenant est calme ou anxieux. Il est attentif ou distrait. Etc.

2.2.4 Utilitaire du modèle de l'apprenant

Selon Ragnemalm, il y a quatre utilisations du modèle de l'apprenant : [16]

- Importance du modèle pour la planification de l'éducation : quel contenu faut-il enseigner ?
- Présentation du contenu pédagogique : quelles expériences sont appropriées pour le contenu d'apprentissage ?
- Le feedback du système doit prendre en compte les connaissances précédemment mobilisées par l'apprenant, ainsi que le contexte d'apprentissage actuel.
- Traiter les idées fausses : en les signalant à l'apprenant, en fournissant un contre-exemple ou en suscitant une discussion

2.2.5 Types de modèles d'apprentissage

- **Implicit** : lorsque des informations décrivant le comportement de l'apprenant et influençant le cours de l'interaction avec le système sont incorporées dans le système.
- **Explicit** : lorsque les informations sur l'apprenant sont intégrées et codées dans le système de manière explicite pour gérer l'interaction avec l'apprenant.
- **Static** : lorsque les connaissances de l'apprenant sont déterminées avant toute utilisation et ne peuvent pas être modifiées en cours de session.

- **dynamic** : lorsque des données peuvent être ajoutées ou modifiées pendant la session.
- **Specific** : quand il peut être adapté à une catégorie d'apprenants.
- **Surface** : lorsqu'elle contient des informations limitées qui ne peuvent expliquer l'état cognitif de l'apprenant.
- **Deep** : lorsqu'il contient des informations plus représentatives de l'état cognitif de l'apprenant. [17]

2.2.6 Contenu du modèle de l'apprenant

Le modèle de l'apprenant représente ce que le système « sait » de l'apprenant. Ces informations peuvent être de nature cognitive, comportementale ou psychologique. Les premiers modèles se sont concentrés sur les aspects cognitifs et ont mis l'accent sur les connaissances déclaratives, procédurales et heuristiques. Plus récemment, des modèles ont émergé pour représenter des aspects psychologiques : émotions et motivations. La modélisation de l'apprenant peut concerner un ou plusieurs aspects de l'apprenant : concepts, règles ou procédures de résolution maîtrisés, idées fausses, rapidité de résolution de problèmes, motivation à apprendre, capacité à réfléchir sur les connaissances apprises, aspects métacognitifs, etc. Le choix du contenu dépendra essentiellement du domaine d'enseignement, des objectifs didactiques et pédagogiques du système, des types d'interactions possibles avec l'apprenant, etc [18].

2.3 Modèle de compétence

Un modèle de compétences auquel il est fait référence ici ne concerne que les couches cachées du graphe des « couches de modélisation de l'apprenant » [19].

2.3.1 Granularité

La hiérarchie de granularité est une représentation courante d'un modèle d'apprenant [20]. Il décrit comment un domaine est décomposé en composants. Les composants de connaissance dans un modèle de domaine sont généralement décrits à différents niveaux de granularité. Une hiérarchie de granularité capture différents niveaux de détail dans un type de réseau sémantique. Les relations d'agrégation sont utilisées pour décrire les relations entre les composants de connaissances à différents niveaux. Les relations d'agrégation peuvent être utilisées pour diviser un composant de connaissance composite en plusieurs composants

de connaissance à une granulométrie plus fine. Les observateurs sont généralement liés aux éléments de connaissance à un niveau plus fin. Les informations observées sont propagées par agrégation des liens vers les composants de connaissances aux niveaux plus grossiers. Le schéma de clustering AND-OR est proposé par Collins et al pour capturer les relations d'agrégation et les groupes équivalents dans leur hiérarchie de granularité [21].

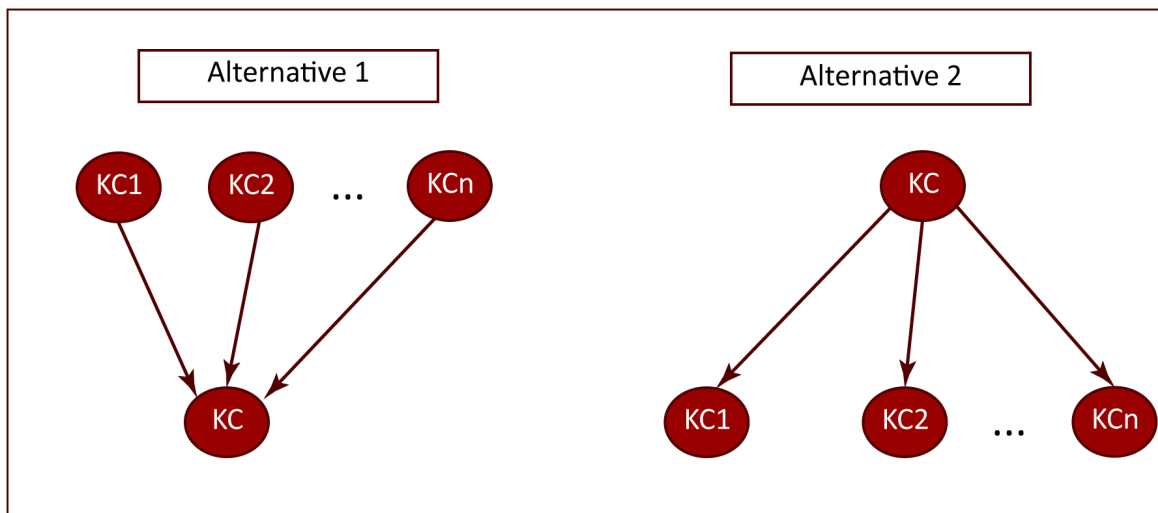


FIGURE 2.2 : Deux alternatives pour modéliser les relations d'agrégation.

Tchétagni et Nkambou ont proposé d'évaluer les connaissances des apprenants en logique propositionnelle à plusieurs niveaux de granularité. Ils ont utilisé le modèle alternatif 2 de la figure 2.2 pour représenter les relations d'agrégation dans leur hiérarchie. Ils ont souligné que dans cette architecture, il existe des restrictions sur la façon dont les preuves se propagent dans tout le réseau. Cela est dû au fait que deux nœuds enfants peuvent influencer leur parent, sans s'influencer mutuellement : ils sont séparés [22].

Carmona et Conejo ont utilisé dans la figure 2.2 le modèle alternatif 1 pour représenter les relations d'agrégation dans leur modèle d'apprenant utilisé dans MEDEA, un système ouvert pour le développement de systèmes de tuteurs intelligents. Certaines approches récentes ont abordé la granularité du modèle de compétences d'un point de vue statistique.

Dans ces approches, les modèles de compétences n'impliquent que les éléments de connaissance les plus fins, qui expliquent directement les comportements des apprenants. Un problème permanent dans un modèle d'apprenant est de savoir à quel niveau de granularité les compétences des apprenants doivent être modélisées [23]. Pardos et Heffernan ont exploré des modèles avec différents niveaux de granularité (modèles de compétences 1, 5, 39 et 106) et mesuré la précision de ces modèles en prédisant la performance des apprenants dans leur SIT, c'est-à-dire ASSISTment, ainsi que dans un test. Leurs résultats ont montré que plus la granularité du modèle de compétence est fine, meilleure est la prédiction des performances

de l'apprenant [24].

2.3.2 Relations pré-requises

Des relations préalables existent généralement entre les éléments de connaissance de certains domaines.

Reye a analysé comment utiliser les réseaux bayésiens pour modéliser les relations antérieures. Ils ont déclaré que les probabilités conditionnelles dans un réseau bayésien devraient remplir certaines conditions. Par exemple, si la composante de connaissance A est une condition préalable de la composante de connaissance B, l'équation II.1 doit être satisfaite. Cependant, ils ont également déclaré que la relation préalable n'est pas toujours stricte, de sorte qu'ils permettent une incertitude pour les probabilités conditionnelles. Les valeurs d'incertitude pour ces probabilités conditionnelles sont spécifiées par des experts dans leur méthode [25].

$$\begin{aligned} P(\text{learnerKnows}(A) \vee \text{learnerKnows}(B)) &= 1 \\ P(\text{learnerKnows}(B) \vee \text{learnerKnows}(A)) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Carmona et al. ont présenté les relations préalables à un modèle générique d'apprentissage du BN pour MEDEA, afin d'améliorer l'efficacité des mécanismes d'adaptation et le processus d'inférence. Ils ont utilisé une porte ET bruyante modifiée ou une porte OU bruyante modifiée pour modéliser les relations de prédicat [26].

Ferguson et al ont utilisé l'algorithme EM pour apprendre les paramètres cachés dans les BN et ont comparé le modèle de compétence plat (les compétences sont mutuellement indépendantes) avec le modèle de compétence hiérarchique (relations a priori entre des compétences données a priori) selon le critère d'information bayésien (BIC). Leurs résultats montrent qu'un modèle hiérarchique correspond mieux à leurs données que le modèle plat. [20==> a chercher]

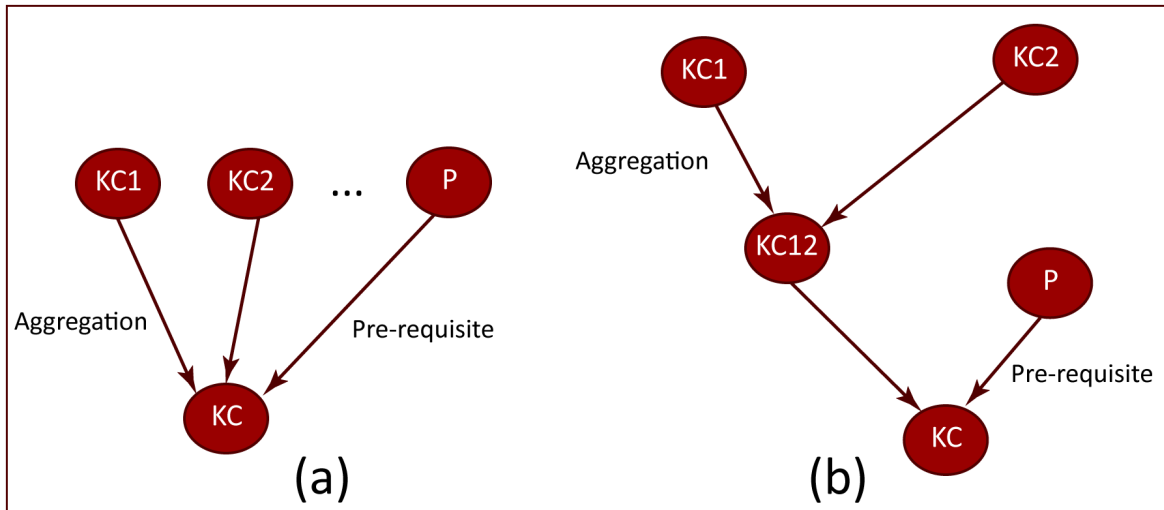


FIGURE 2.3 : Agrégation de modélisation de réseau bayésien et relations préalables simultanément

Millan et coll. discuté d'un problème courant dans la modélisation des apprenants, à savoir modéliser simultanément les relations de pré-requis et de granularité. Si les deux sont inclus dans le même modèle, les relations avec des interprétations différentes sont mélangées et il est alors difficile de construire et de comprendre le modèle. Par exemple, si une compétence KC composite est composée de deux sous-compétences, KC1 et KC2, il existe également une compétence P qui est un prérequis pour KC. Les probabilités conditionnelles de K données à ses parents sont difficiles à préciser (figure 1.3 (a)). Ils ont proposé une solution qui consiste à regrouper des variables de même type en introduisant des variables intermédiaires (figure 1.3 (b)) [20].

2.4 Découverte des prérequis

Nous modélisons les compétences comme des variables continues qui représentent le degré auquel un apprenant a maîtrisé ou est conscient d'une compétence particulière. Nous traitons les éléments comme des variables continues qui reflètent le degré auquel un apprenant a correctement terminé une tâche. En pratique, la mesure de l'achèvement des tâches est souvent une variable binaire avec des valeurs = correct / incorrect. Un élément binaire peut cependant être considéré comme une projection d'un élément continu, et les corrélations entre éléments continus idéalisés peuvent être estimées en calculant la matrice de corrélation tétrachorique parmi les éléments binaires mesurés [27].

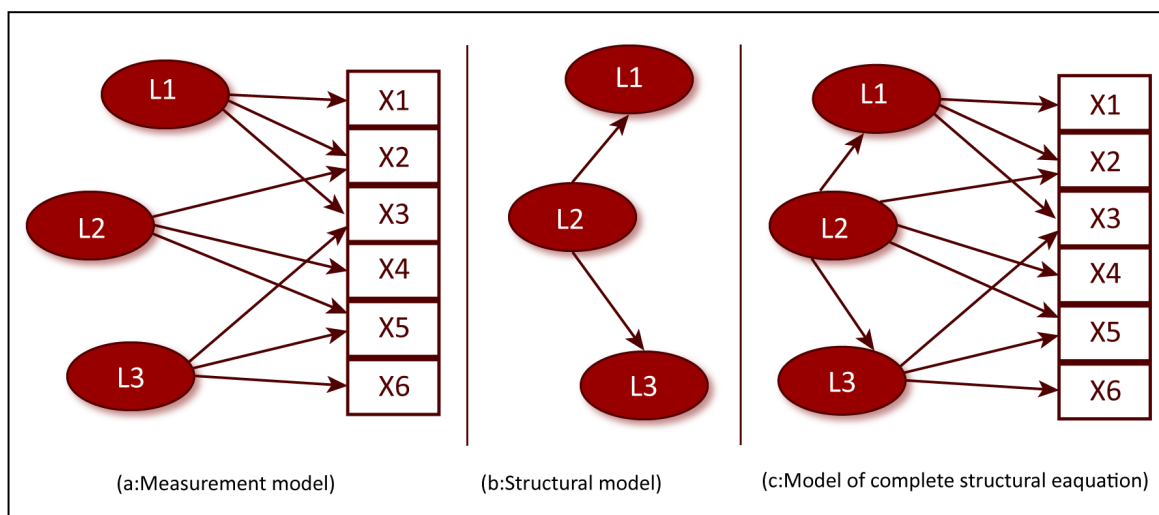


FIGURE 2.4 : Modèles d'équations structurelles

L'utilisation de la matrice Q consiste généralement à définir quels éléments « chargent » sur quelles compétences latentes. Nous pouvons définir un « modèle de mesure » qui relie les compétences latentes aux items mesurés 2.4. En modélisant les relations entre les compétences comme un modèle analytique causal du chemin entre les variables latentes 2.4, appelé « modèle structurel », nous pouvons combiner le « modèle de mesure » et le « modèle structurel » pour former un modèle d'équation structurelle linéaire complet 2.4 [28].

En supposant que le modèle de mesure est connu, nous pouvons rechercher le modèle structurel avec l'algorithme de découverte causale PC, dans lequel les entrées sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui figurent parmi les variables latentes. Nous calculons ou testons les relations d'indépendance entre les latents en construisant un modèle structurel séparé et en l'ajustant aux données pour chaque test d'indépendance particulière requis. Notre méthode de construction de modèle produit un test cohérent et éprouvé de chaque relation d'indépendance conditionnelle [27].

2.5 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté les principaux concepts liés au modèle de l'apprenant dans l'environnement de l'apprentissage basé sur le Web, qui permet aux apprenants de travailler en collaboration sur un projet ou de coconstruire le sens des concepts en utilisant la technologie comme un tuyau pour le développement des connaissances partagées, aussi, la modélisation des compétences est importante pour découvrir les prérequis d'un apprenant en représentant le degré auquel il a maîtrisé. Le prochain chapitre sera consacré à la présentation de l'exploration de données éducatives.

CHAPITRE 3

L’approche items-to-skills mapping

Sommaire

3.1	Introduction	27
3.2	Knowledge	27
3.3	Items-to-skills mapping	29
3.4	Conclusion	36

3.1 Introduction

Les systèmes d'apprentissage personnalisé ont généralement un grand nombre d'items à résoudre par les apprenants qui sont des problèmes, questions, devoirs, etc. Avec un grand nombre d'items, il est utile de mesurer la similarité des éléments afin de les utiliser de manière efficace et de pouvoir y naviguer. Cette mesure de similarité est ensuite utilisée dans les systèmes d'apprentissage adaptatif et les systèmes de recommandations automatiques [29]. Elle permettra aussi de classer les items les plus similaires.

Nous présentons donc les approches pour mapper les éléments aux compétences, les concepts de l'approche de similarité avec ses différentes catégories, et les différentes mesures de similarité utilisée.

3.2 Knowledge

3.2.1 Définition

"Le terme « connaissance » peut faire référence à une compréhension théorique ou pratique d'un sujet. Elle peut être implicite (comme avec une compétence ou une expertise pratique) ou explicite (comme avec la compréhension théorique d'un sujet) ; formel ou informel ; systématique ou particulier" [30]. En éducation, la « connaissance » est constituée de faits de base alors que les composants de connaissance peuvent être des procédures, des schémas d'intégration, des stratégies de raisonnement complexes, des compétences métacognitives, etc. La "connaissance" en philosophie est une "vraie croyance justifiée" alors que notre utilisation des composants de la connaissance comprend à la fois une connaissance incorrecte (fausse) et une connaissance implicite (pas de croyance ou de justification explicite) [31].

3.2.2 Knowledge component

Une Composante de connaissance est une description d'une structure mentale ou d'un processus qu'un apprenant utilise, seul ou en combinaison avec d'autres éléments de connaissance, pour accomplir les étapes d'une tâche ou d'un problème (Koedinger, Corbett & Perfetti, 2012). Les items qui requièrent la même compétence pour différents apprenants constituent une composante de connaissance (KC) [32].

Composante de connaissance est un terme qui est utilisée comme concept, principe, fait ou compétence, et des termes de sciences cognitives comme schéma, règle de production, idée fausse ou facette. [33] La description de la composante de connaissance est présentée dans

la figure 3.1.

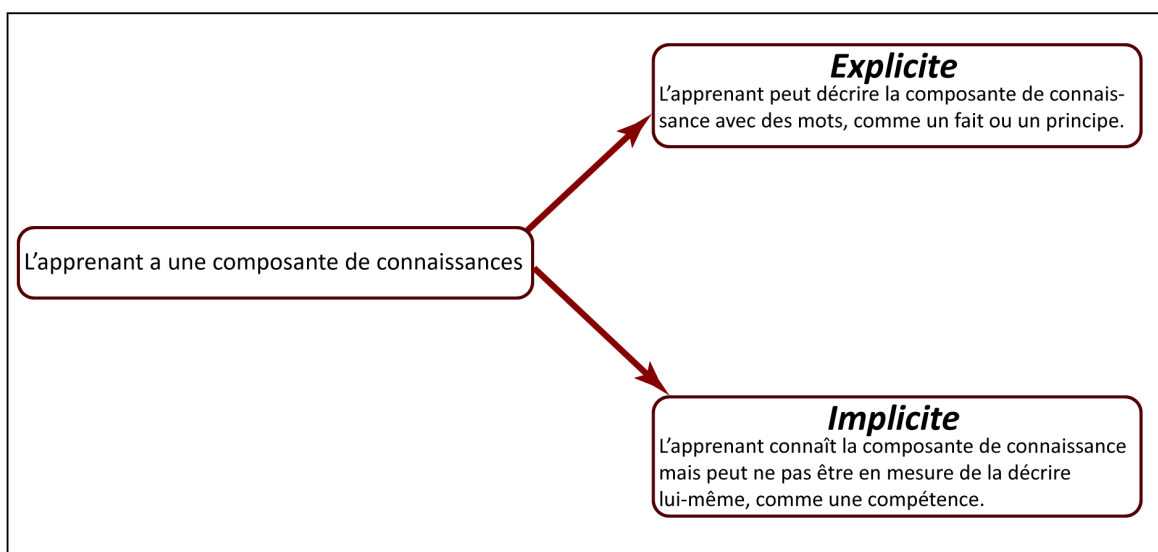


FIGURE 3.1 : Knowledge Component

Exemple : "Si l'angle $A = 60$ et ($A = B$, $C = 60$) Alors triangle équilatéral."

L'élève peut dessiner un triangle équilatéral sans être capable de décrire la règle. Une grande partie de ce que les apprenants de première langue savent de leur langue maternelle implique des éléments de connaissances implicites. Pertinence : la plupart des composants de connaissance explicites impliquent de nombreux composants de connaissance tacites (compétences innées ou acquises, le savoir-faire et l'expérience). La réponse et la fonctionnalité sont liées par la composante de connaissance, où les deux peuvent être externes, dans le monde, comme des signaux dans un stimulus et une réponse motrice ou interne, dans l'esprit, comme des fonctionnalités inférées et un nouvel objectif[33].

3.2.3 Les types de composante de connaissance

La composante de connaissance est une représentation mentale de : [34]

- **Connaissance du domaine** : faits, concepts, principes, règles, procédures, stratégies.
- **Connaissances préalables** : connaissance de l'encodage des fonctionnalités.
- **Connaissance intégrative** : schémas ou procédures qui connectent d'autres KC.
- **Connaissances métacognitives** : sur les connaissances, le contrôle de l'utilisation ou l'acquisition des connaissances.
- **Croyances et intérêts** : ce que l'on aime, croit.

- **Toute représentation externe des connaissances :** (comme les descriptions de manuels ou un exemple) ou les structures cognitives génériques (mémoire de travail), soit, les paramètres continus sur les représentations des connaissances (force, niveau d'engagement, valeur implicite d'un objectif, affect) ne sont pas des composants de connaissances.

3.3 Items-to-skills mapping

3.3.1 Définition

Les compétences (Skills) déterminent le résultat d'un individu sur une tâche dans une période donnée, à savoir si le résultat obtenu par l'individu est un succès ou un échec. La tâche à laquelle un individu est évalué peut-être une question, un exercice, ou tout autre défi qui nécessitera certaines compétences. Les systèmes de tutorat intelligent cherchent donc à mapper ces compétences aux questionnaires ou (items) afin d'amener l'apprenant à obtenir un niveau de maîtrise sur un ensemble de compétences et aussi recommander les tâches ou « items » (ou exercices) les plus appropriés compte tenu de la dernière tâche effectuée par l'apprenant [35]. Ce « mapping » est aussi appelée Q-matrix en EDM [36].

3.3.2 items-to-skills mapping Structure

Il existe deux approches pour mapper les éléments aux compétences présentées dans la figure 3.2 :

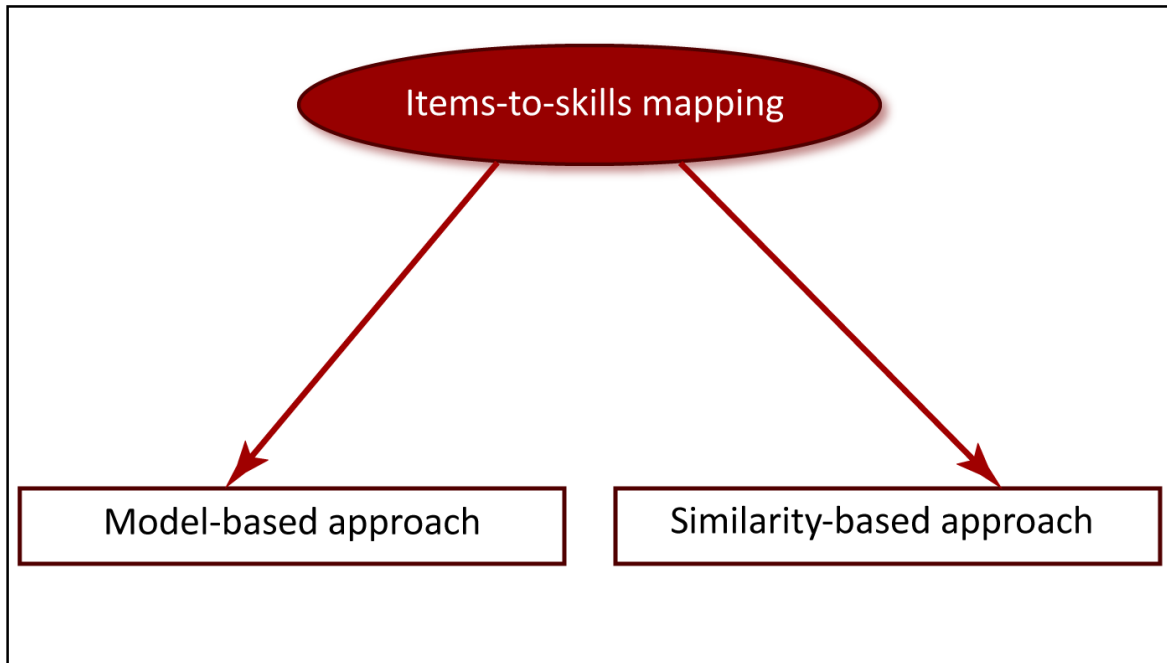


FIGURE 3.2 : Items-to-skills mapping Structure

3.3.2.1 Model-Based approach

3.3.2.1.1 Définition Cette approche est un modèle simplifié qui explique les données observées. Basé sur une matrice de réponses des apprenants aux éléments (ou items), le modèle prédit les réponses de l'apprenant. Le modèle attribue plusieurs compétences latentes aux apprenants et utilise le mappage des éléments aux facteurs latents correspondants. Ce type de modèle peut souvent être exprimé naturellement à l'aide de la multiplication matricielle, c'est-à-dire que l'ajustement d'un modèle conduit à une factorisation matricielle. Une fois que nous obtenons le résultat après avoir ajusté le modèle aux données, nous avons désigné les items avec la même valeur d'un facteur latent comme « similaires ». Cette approche conduit naturellement à plusieurs composantes de connaissance par compétence [29]. L'approche basé sur le modèle présenté dans la figure 3.3 développe un modèle de notation des utilisateurs, les algorithmes de cette catégorie adoptent une approche probabiliste en calculant la valeur attendue de la prédiction de l'utilisateur et en tenant compte des notes de l'utilisateur sur d'autres éléments [37].

Cette approche peut donc être produit par différents algorithmes d'apprentissage automatique tels que le réseau bayésien, le clustering et l'approche basée sur des règles [38].

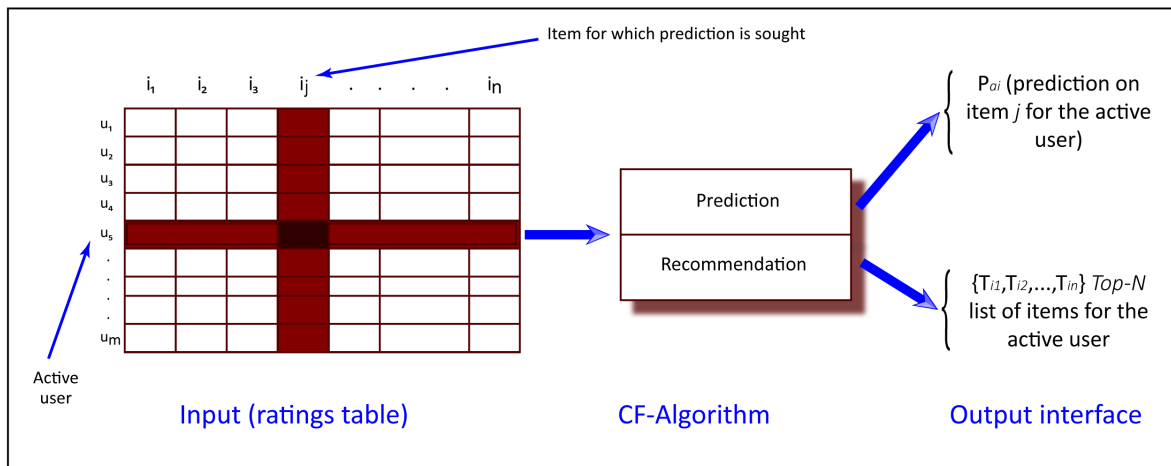


FIGURE 3.3 : Model based

Cette approche produit des composantes de connaissances différents et multiples par compétence. Le modèle est généralement calculé à l'aide d'une technique d'optimisation qui ne mène qu'à des optima locaux (par exemple, une descente de gradient).

Dans les systèmes recommandés, cette approche est utilisée pour la mise en œuvre du filtrage collaboratif; elle est souvent appelée "Singular Value Decomposition" (SVD) [39].

3.3.2.1.2 Model Based Techniques Dans le contexte pédagogique, de nombreuses variantes de l'approche basée sur les modèles ont été proposées :

- **Q-matrix** : Est une matrice binaire illustrée à la figure 4 montrant la relation entre les éléments de test et les attributs ou concepts latents ou sous-jacents (Birenbaum, et al., 1993). Les états de connaissance ont été attribués aux apprenants en fonction de leurs réponses aux tests et de la matrice q construite [40].

	Questions				
		Q1	Q2	Q3	Q4
Concepts	Con 1	1	0	0	1
	Con 2	1	1	0	1
	Con 3	1	0	1	0
	Con 4	1	1	0	1
	Con 5	1	1	1	0

}

1 If a question Q_i is related to the concept con_j

0 If not.

FIGURE 3.4 : Q-matrix

3.3.3 Similarity-based approach

3.3.3.1 Définition

En statistiques et en mathématiques, la mesure de similarité ou la fonction de similarité est une fonction qui mesure la similarité entre deux éléments. Les valeurs de similarité entre les éléments sont quantifiées par l'observation de la performance des utilisateurs sur les éléments, qu'il s'agisse de négatif ou non [41]. La mesure des similarité est une étape très importante dans une analyse plus approfondie telle que le clustering des items [29].

Dans cette approche, on calcule directement une mesure de similarité pour chaque paire d'éléments. Ces mesure de similarités sont ensuite utilisées pour faire le clustering, pour faire la visualisation en projetant ces éléments dans un plan a 2 ou 3 dimensions, ou pour faire d'autre analyse en essayant de récupérer les éléments les plus similaire. Cette approche est illustrée à la figure 3.5.

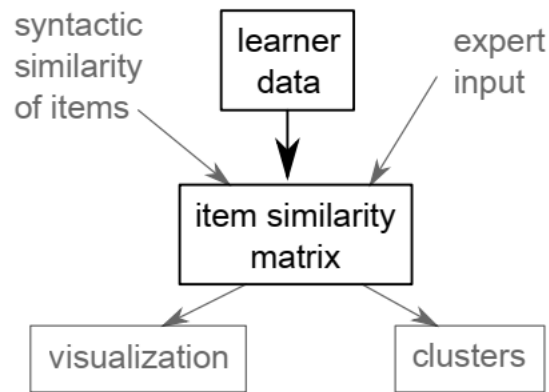


FIGURE 3.5 : Illustration de l'approche générale de l'analyse des éléments basée sur la similarité des éléments.

Dans l'apprentissage éducatif, la définition de la similarité des éléments a été analysée en utilisant la corrélation des réponses des apprenants et les temps de résolution des problèmes, ainsi qu'en utilisant les mauvaises réponses des apprenants. [29]

3.3.3.2 Processus de similarité des items (éléments)

Une étape importante de l'approche basée sur les items consiste à calculer le degré de similarité entre chaque paire d'items, puis à sélectionner les éléments les plus similaires. Il peut être décrit comme l'opération de calcul de similarité entre deux éléments i et j , où il s'agit d'abord de définir les utilisateurs qui ont évalué ces deux éléments, puis d'appliquer une technique de calcul de similarité pour déterminer le score de similarité entre i et j . [37] La figure 3.6 ci-dessous montre l'approche générale du calcul et de l'application de la similarité des items.

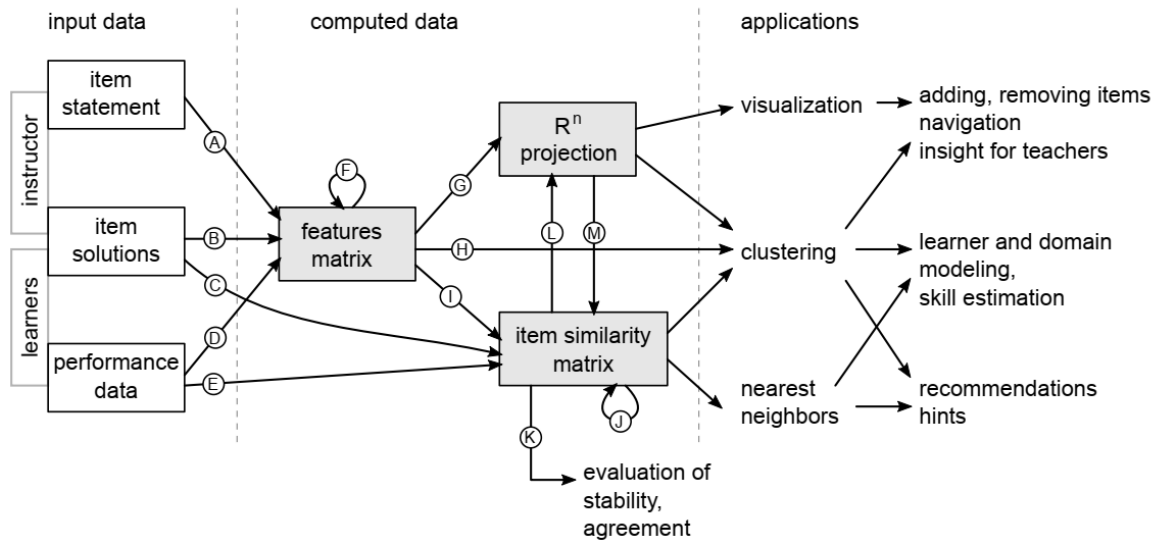


FIGURE 3.6 : L'approche générale du calcul et de l'application de la similarité des éléments.

Nous allons brièvement parcourir les trois étapes input data, computed data, applications illustrées dans la figure 3.6.

3.3.3.2.1 Input Data

- Item statement (Flèche A) : Un item est la spécification de la tâche que l'apprenant doit résoudre donnée en langage naturel, ou des exemples d'entrée-sortie, et a construction de la « features matrix » nécessite d'abord un prétraitement à des items.
- Item solution : est simplement la solution donnée par l'apprenant ou la solution commune des apprenants.
- Performance data : informations sur la performance des apprenants lors de la résolution des items par exemple : exactitude de la réponse, temps de réponse, nombre d'indices utilisés et nombre de tentative faite sur un seul item.

3.3.3.2.2 Computed Data

- Features matrix : c'est la matrice qui contient les éléments et leurs caractéristiques qui peuvent être par exemple une solution d'élément ou des mots-clés apparaissant dans une déclaration d'élément.
- Item similarity matrix : est une matrice bidimensionnelle m , où $m[i,j]$ désigne la similarité des items i et j . Le calcul de la matrice de similarité basée sur la matrice de

caractéristiques (flèche I) ou sa projection dans R_n (flèche M) est une opération courante en apprentissage automatique, avec de nombreux choix disponibles, par exemple la similarité cosinus, le coefficient de corrélation de Pearson et la distance euclidienne (transformé en mesure de similarité par soustraction).

3.3.3.3 Item-Similarity measures

Pour calculer le score de similarité entre deux items, il faut tout d'abord créer la matrice d'accord entre item i et item j. Cette matrice d'accord appelée aussi matrice de confusion ou (confusion matrix en anglais) est illustrée par le tableau 3.1.

	Item i (Correct)	Item i (Incorrect)
Item j (Correct)	a	b
Item j (Incorrect)	c	d

TABLE 3.1 : La matrice d'accord pour deux items.

Où,

- a : nombre d'apprenants qui ont répondu correctement à la fois à l'item i et j.
- b : nombre d'apprenants ayant répondu incorrectement à l'item i et l'item j correctement.
- c : nombre d'apprenants ayant répondu incorrectement à l'item j et l'item i correctement.
- d : nombre d'apprenants ayant répondu à la fois à l'item i et j de manière incorrecte.

Ensuite cette matrice d'accord est utilisée pour calculer la similarité entre l'item i et j. Les coefficients de calcul de similarité qui peuvent être utilisés sont les suivants 3.2 :

Mesures	Equation
Yule	$S_y = (ad - bc)/(ad + bc)$
Pearson	$S_p = (ad - bc)/\sqrt{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}$
Cohen	$S_c = (P_o - P_e)/(1 - P_e)$ $P_o = (a + d)/n$ $P_e = ((a + b)(a + c) + (b + d)(c + d))/n^2$
Sokal	$S_s = (a + b)/(a + b + c + d)$
Jaccard	$S_j = a/(a + b + c)$
Ochiai	$S_o = a/\sqrt{(a + b)(a + c)}$

TABLE 3.2 : Coefficients de mesures de similarités.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit les concepts de base du Knowledge component, Items-to-skills mapping, en spécifiant différents coefficients de similarité qui peuvent ensuite être utilisées dans une analyse plus approfondie des relations entre les items, telles que le clustering des items ou la visualisation de ces derniers.

CHAPITRE 4

Inférence bayésienne et la théorie de la réponse aux items

Sommaire

4.1	Introduction	38
4.2	Inférence bayésienne	39
4.3	La théorie des réponses aux items	44
4.4	Un ajustement bayésien des réponses aux items avec Stan	48
4.5	Conclusion	50

4.1 Introduction

Lors du 25e anniversaire de la Psychometric Society en 1961, Harold Gulliksen a décrit « le problème de la théorie des tests » comme « la relation entre la capacité de l'individu et son score au test" (Gulliksen, 1961). Vingt-cinq ans plus tard, Charles Lewis a observé qu'« une grande partie des progrès récents de la théorie des tests a été réalisée en traitant l'étude de la relation entre les réponses à un ensemble d'items de test et un trait hypothétique (ou traits) d'un individu comme un problème d'inférence statistique" (Lewis, 1986), apportant ainsi des solutions à des problèmes autrefois insolubles tels que l'adaptation des tests aux candidats individuels (par exemple, Lord, 1980, chap. 10), le tri des relations dans les modèles de réussite dans les systèmes scolaires hiérarchiques (par exemple, Aitkin & Longford, 1986) et l'estimation des paramètres des modèles IRT. Et les concepts et outils d'inférence statistique aider à expliquer les relations entre les preuves et l'inférence sur les connaissances, l'apprentissage et les réalisations des élèves que ce qui est traditionnellement associé à la théorie des tests standard et aux résultats standardisés [42].

L'inférence peut être défini comme un raisonnement à partir de ce que nous savons et de ce que nous observons jusqu'aux explications, conclusions ou prédictions parce que nous raisonnons toujours en présence d'incertitude et les informations avec lesquelles nous travaillons sont généralement incomplètes, peu concluantes, se prêtent à plus d'une explication. L'utilisation de l'inférence bayésienne permet donc d'estimer à partir d'observations les paramètres d'écrivant la distribution de probabilité en tenant compte des informations supplémentaire appelé aussi des informations apriori. Par exemple dans le cas où on cherche à estimer les paramètres θ_1 et θ_2 venant du problème où 30% des machines à sous ont une probabilité θ_1 de donner 1EUR, le reste a une probabilité θ_2 .

L'évaluation pédagogique concerne l'inférence sur les connaissances, les compétences et les réalisations des élèves, c'est-à-dire qu'il existe un intérêt pour l'étude des variables latentes [43], utilisé surtout dans La théorie de la réponse aux items (TRI). Parce que les données ne sont jamais aussi complètes et sans équivoque qu'elles garantissent la certitude, la théorie des tests a évolué en partie pour répondre aux questions de poids, de couverture et d'importation des données. Les concepts et techniques qui en résultent peuvent être considérés comme des applications de principes plus généraux d'inférence en présence d'incertitude. Comme le dit Glen Shafer (cité dans Pearl, 1988) « La probabilité n'est pas vraiment une question de nombres ; il s'agit de la structure du raisonnement. ».

Dans cette partie nous verrons l'inférence bayésienne appliquer à la théorie des réponses aux items et la plateforme Stan qui permet d'appliquer cette inférence à partir des données.

4.2 Inférence bayésienne

4.2.1 Définition

L'inférence bayésienne est une méthode d'apprentissage des valeurs des paramètres dans les modèles statistiques à partir de données. L'inférence bayésienne est une approche entièrement probabiliste, dont les résultats sont des distributions de probabilité. Une autre caractéristique distinctive de l'inférence bayésienne est l'utilisation d'informations a priori dans les analyses. L'inférence bayésienne ne concerne pas un modèle statistique particulier, en fait, une multitude de modèles statistiques et de machine learning (que ce soit : la régression linéaire, la régression logistique, les réseaux de neurones artificiels, ...) peuvent être « entraîné » de manière bayésienne ou non bayésienne. L'inférence bayésienne peut être résumée comme étant une méthode d'apprentissage à partir de données.

4.2.2 probabilité conditionnelle et théorème de bayes

Les probabilités conditionnelles jouent un rôle central dans le processus d'inférence sur le monde incertain. La probabilité conditionnelle est définie comme la probabilité qu'un événement ou un résultat se produise, sur la base de l'occurrence d'un événement ou d'un résultat précédent. La probabilité conditionnelle fait référence aux chances qu'un résultat se produise étant donné qu'un autre événement s'est également produit. Il est souvent indiqué comme la probabilité de B étant donné A et s'écrit $P(B|A)$, où la probabilité de B dépend de celle que A se produise. La formule de la probabilité conditionnelle est :

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B)}{Pr(A)} \quad (4.1)$$

Le théorème de Bayes, du nom du mathématicien britannique du XVIIIe siècle Thomas Bayes, est une formule mathématique permettant de déterminer la probabilité conditionnelle. Le théorème fournit un moyen de réviser les prédictions ou théories existantes (probabilités de mise à jour) compte tenu de preuves nouvelles ou supplémentaires. Dans de nombreux problèmes d'analyse de données, le théorème de bayes fourni la possibilité de déduire la valeur des paramètres d'un modèle à partir de données. Le théorème de bayes est défini par la formule suivante :

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B) * Pr(B)}{Pr(A)} \quad (4.2)$$

Ou $Pr(B|A)$ est la probabilité de l'évènement B sachant A. L'équation 4.2 peut être interpréter comme suit :

$$Pr(hypothesis|data) = \frac{Pr(data|hypothesis) * Pr(hypothesis)}{Pr(data)} \quad (4.3)$$

$Pr(hypothesis|data)$ est la probabilité d'une hypothèse qu'on cherche sachant les données. En appliquant le théorème de Bayes, $Pr(hypothesis|data)$ est le produit de la probabilité des données sachant l'hypothèse $Pr(data|hypothesis)$ qui peut être aussi un modèle et la probabilité de l'hypothèse $Pr(hypothesis)$ ensuite divisé par la probabilité des données $Pr(data)$. Cette hypothèse est généralement quelque chose d'inobservé ou inconnu qu'on cherche à obtenir à partir des données. Par exemple pour les modèles de régression linéaire, c'est les paramètres du modèle qu'on cherche à estimer. Le théorème de bayes permet donc d'obtenir la probabilité de l'hypothèse sachant les données récolter.

4.2.3 L'approche Bayésienne

L'approche Bayésienne se base sur l'idée d'avoir certaines croyances préalables sur le système et puis mettre à jour ces croyances sur la base des données observées. C'est-à-dire avoir des connaissances a priori sur les paramètres inconnus. Ces connaissances prennent la forme d'une loi sur l'espace des paramètres qui s'appelle la loi a priori. L'approche bayésienne cherche donc à combiner d'une part l'information empirique obtenu sur les paramètres et l'interprétation des valeurs plus subjective (il y'a certaines idées sur les valeurs que les paramètres pourrait avoir). Cette procédure de mise à jour est basée sur le théorème de Bayes.

4.2.4 Théorème de bayes dans la cadre de l'application de l'approche Bayésienne

En remplaçant hypothèse (hypothesis) par θ de l'équation 4.3 comme étant le paramètre à estimer on obtient donc :

$$Pr(\theta|data) = \frac{Pr(data|\theta) * Pr(\theta)}{Pr(data)} \quad (4.4)$$

Où,

- $Pr(\theta|data)$ (Posterior distribution) : est la distribution à posteriori du paramètre θ . C'est l'estimation de θ a posteriori (après avoir vu les données).

- $Pr(data|\theta)$ (Likelihood) : c'est la vraisemblance qui est capturer à partir des données sachant le model utiliser pour faire l'inférence.
- $Pr(\theta)$ (prior distribution) : c'est la distribution a priori sur le paramètre θ .
- $Pr(data)$: qui est la probabilité des données.

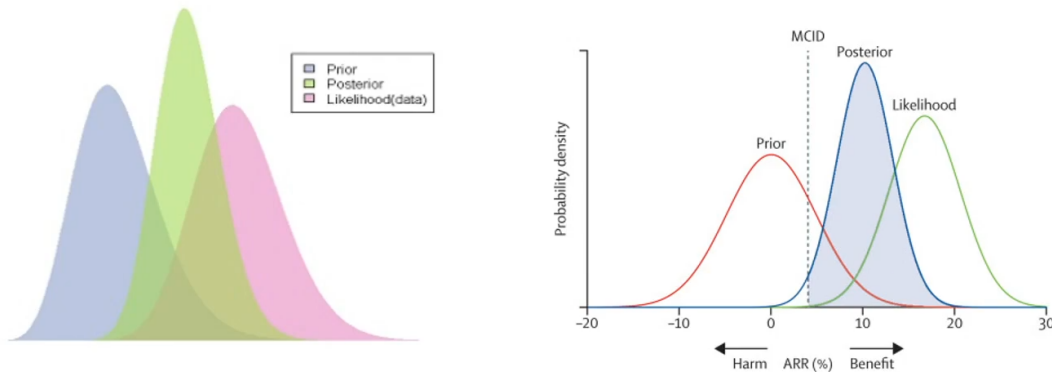


FIGURE 4.1 : La distribution à priori, à posteriori et celle de la fonction de vraisemblance.

4.2.4.1 Posterior distribution

La probabilité postérieure est la probabilité qu'un événement se produise après que toutes les informations sur le système étudié aient été prises en compte. Elle est étroitement liée à la probabilité antérieure, qui est la probabilité qu'un événement se produise avant la prise en compte de nouvelles preuves. Elle est comme un ajustement sur la probabilité antérieure.

$$\begin{aligned} \text{Posterior probability} &= \text{prior probability} + \text{new evidence.} \\ \text{Posterior Distribution} &= \text{Prior Distribution} + \text{Likelihood Function.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Par exemple, les données historiques suggèrent qu'environ 60% des étudiants qui commencent l'université obtiendront leur diplôme dans les 6 ans. C'est la probabilité a priori. Cependant, ce chiffre est en réalité bien inférieur. Alors les preuves collectées peuvent suggérer que le chiffre réel est en fait plus proche de 50% ; c'est la probabilité postérieure.

La distribution à posteriori est un moyen de résumer les connaissances ou les informations sur les quantités incertaines en analyse bayésienne. C'est une combinaison de la distribution a priori et de la fonction de vraisemblance, qui indique les informations contenues dans les données observées (les « nouvelles preuves »).

4.2.4.2 Likelihood

Habituellement lorsque l'on parle de distribution de probabilité, on suppose que nous connaissons les valeurs des paramètres. Aussi appelé fonction de vraisemblance (ou plus simplement vraisemblance), c'est une fonction des paramètres d'un modèle statistique calculée à partir de données observées [44]. C'est-à-dire la probabilité d'observer les données sous un certain modèle. Par exemple, la probabilité des données sachant θ en utilisant 4.4. En inférence bayésienne, cette vraisemblance peut être interprétée comme la densité de probabilité des données conditionnellement à une valeur des paramètres et comme une mesure de l'information apportée par les données sur la valeur des paramètres.

4.2.4.3 Prior distribution

La distribution à priori capture la connaissance ou l'information a priori. Elle permet de mettre en forme les connaissances ou les informations avant de faire l'expérimentation. Ces sont des distribution subjective sans tenir compte des données.

Ensuite il y'a la probabilité des données, qui est défini par :

$$Pr(data) = \int L(data|\theta)Pr(\theta)d\theta. \quad (4.6)$$

Le calcul d'une intégrale avec un seul paramètres (intégrale a une dimension) est possible mais lorsqu'il y'a plus d'un paramètre, cette dernière devient une intégrale multiple qui est difficile voire impossible à calculer.

L'approche Bayésienne d'aujourd'hui utilise des méthodes de simulation MCMC (chaîne de Markov Monte Carlo) pour passer outre ce problème de calcul d'intégrale multiple. Nous verrons dans la section suivantes les chaînes de Markov de Monte Carlo et leurs méthodes.

4.2.4.4 Chaîne de Markov Monte Carlo (MCMC)

Malheureusement, dans la plupart des cas pratiques, il est impossible d'obtenir une solution analytique pour la distribution a posteriori. Le dénominateur sous la forme continue du théorème de Bayes consiste en une intégrale sur un espace potentiellement de grande dimension. L'un des moyens de résoudre ce problème est d'obtenir des échantillons de la distribution a posteriori. Ces échantillons sont distribués selon la distribution a posteriori.

Habituellement, les méthodes dites de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) sont utilisées pour obtenir des échantillons à partir d'une distribution. Ces méthodes partent des valeurs initiales des paramètres. Ensuite, de nouvelles valeurs sont proposées et acceptées selon certaines fonctions de proposition et d'acceptation. Ce processus de proposition et d'acceptation

est répété plusieurs fois pour créer un grand nombre d'échantillons. Différentes méthodes diffèrent principalement dans leurs implémentations des fonctions de proposition et d'acceptation.

Les méthodes MCMC peuvent nécessiter un certain post-traitement des échantillons obtenus - par exemple, il peut être nécessaire d'ignorer les premiers (souvent des centaines ou des milliers) échantillons, car « ils ont été collectés loin des valeurs des paramètres pertinents » par exemple la figure ci-dessous. De plus, les échantillons sont généralement corrélés et donc souvent, seul un nième échantillon (après le retrait des échantillons initiaux) est retenu. De plus, les méthodes peuvent échouer (pour donner des échantillons représentatifs de la distribution). Il existe des moyens de diagnostiquer cela, par exemple en créant plusieurs « chaînes d'échantillonnage » (et en comparant leurs résultats).

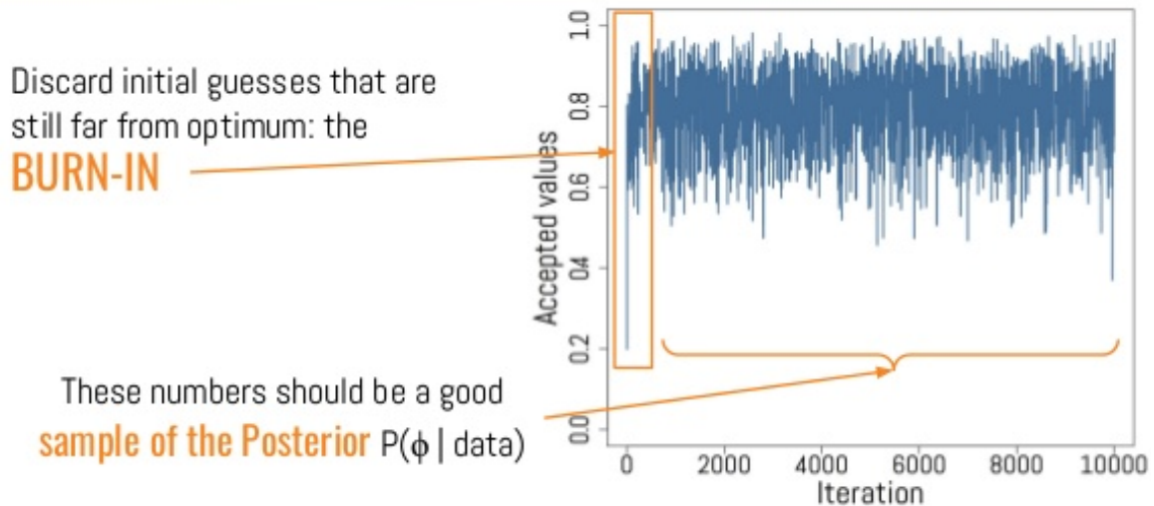


FIGURE 4.2

Plusieurs méthodes sont utilisées pour construire ces chaînes comme : Metropolis-Hastings, Gibbs sampler, Metropolis-within-Gibbs, HMC etc.

4.2.5 Model selection

Pour faire de la sélection de model il faut vérifier s'il y'a un effet des valeurs des paramètres sur la variable cible (par exemple sur la réussite ou pas à un item).

Dans le cadre fréquentiste, l'idée est de pénaliser les modèles qui ont trop de paramètres. Pour le faire il y'a *AIC* :

$$AIC = -2 \log(L(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)) + 2K. \quad (4.7)$$

Avec L la vraisemblance et k le nombre de paramètres θ , et $-2 \log(L(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k))$ est la déviance qui mesure la qualité de l'ajustement du model de donnée. Plus il y'a de paramètres plus cette quantité est petite et mieux le model est ajuster aux données.

$2k$: c'est la pénalité, plus il y'a des paramètres plus cette quantité augmente. Cette pénalité est un équilibre entre l'ajustement du model des données et la complexité du model qui est capturer par le nombre de paramètres.

En bayésien il y'a WAIC (Watanabe Akaike Information Criteria) définit par :

$$WAIC = -2 \sum_{i=1}^n \log E[p(y_i|\theta)] + 2p_{WAIC} \quad (4.8)$$

Où $E[p(y_i|\theta)]$ est la moyenne a posteriori de la vraisemblance de la ième observation. p_{waic} est le nombre effectif de paramètres calculés en utilisant la variance postérieure de la vraisemblance. La valeur de waic est la somme entre la deviance + le nombre de paramètre p_{waic} .

4.3 La théorie des réponses aux items

La théorie des réponses aux items (TRI) aussi appelé théorie des traits latents, théorie du vrai score fort ou théorie moderne des tests mentaux est un paradigme pour la conception, l'analyse et la notation des test et des questionnaires [44]. TRI intervient dans la mesure ou la théorie classique n'apporte pas toujours des réponses satisfaisantes. Par exemple un item jugé facile ou difficile peut ne plus l'être dans un échantillon différent qu'il appartenait.

Dans cette situation, la théorie des réponses aux items tente de produire des propriétés de l'item qui soit indépendante d'un groupe particulier d'individus. En d'autres termes, il s'agit de parvenir à l'élaboration d'instruments de mesure dont les caractéristiques ne soient pas excessivement influencées par tel ou tel autre groupe de référence : ce qui, d'une certaine manière, conduit à définir des échelles qualifiées parfois d'"absolues" [45]. La première tentative de développement de ce type d'échelle remonte au début des années 1950 (échelle de Guttman). Initialement, ils reposaient sur un modèle totalement déterministe qui a ensuite été remplacé par un modèle plus réaliste de type probabiliste (modèle de Rasch). Ces modèles reposent sur l'hypothèse selon laquelle la réponse d'un individu a un item est déterminée ou peut être expliquer par deux facteurs qui sont :

- D'une part, certains attributs du sujet (sa compétence par exemple), qui, n'étant pas directement accessibles à l'observation et à la mesure, sont généralement qualifiés de traits latents [45];
- D'autre part, les propriétés de l'item lui-même, notamment, sa difficulté, son pouvoir de discrimination, sans oublier le rôle que la "chance" (réponses "au hasard") peut jouer dans certains cas [45].

Sur le plan technique et mathématique, la théorie des réponses aux items utilise des modèles à un, deux ou trois paramètre(s), qui établissent la relation fondamentale entre le trait latent de l'individu (son niveau de compétence par exemple) et la probabilité pour cet individu de réussir un item donné. Cette relation est formalisée par une fonction (appelée fonction caractéristique de l'item), et peut être représentée géométriquement par une courbe (la courbe caractéristique de l'item). La forme la plus simple de cette fonction est celle qui repose sur le modèle de Rasch [45].

L'objectif de la méthode est double, il s'agit, d'une part, d'estimer les propriétés métriques des items (calcul des paramètres dits de difficulté, de discrimination et, éventuellement, de pseudo-chance) et, d'autre part, d'estimer le niveau de l'individu par rapport au trait latent considéré. Par ailleurs, ces estimations sont supposées indépendantes des échantillons particuliers (d'individus d'une part et d'items de l'autre) à partir desquels l'étude est réalisée [45].

4.3.1 Les Modèles TRI

On distingue deux familles de modèle IRT : les modèles unidimensionnels qui nécessitent une seule dimension de trait et les modèles multidimensionnels qui sont supposées provenir de plusieurs traits. Cependant, en raison de la complexité considérablement accrue, la majorité des recherches et des applications IRT utilisent un modèle unidimensionnel.

4.3.1.1 Les modèles à un, deux ou trois paramètres

Les modèles IRT se distinguent par le nombre de paramètre qu'il utilise. Le modèle à paramètre unique (1PL) suppose tous les éléments qui correspondent au modèle ont la même difficulté, de sorte que ces éléments sont décrits par un seul paramètre. C'est le cas du modèle de Rasch. Le modèle dit à deux paramètres (2PL) fait appel au paramètre de difficulté et de discrimination par exemple le modèle de Birnbaum. Par contre le modèle à trois paramètres (3PL) est celui qui cherche à estimer en plus le paramètre de difficulté et de discrimination, la pseudo chance.

Il en résulte des modèles à un paramètre ayant la propriété d'objectivité spécifique, ce qui signifie que le rang de la difficulté de l'item est le même pour tous les répondants indépendamment de la capacité, et que le rang de la capacité de la personne est le même pour les items indépendamment de la difficulté. Ainsi, les modèles à 1 paramètre (comme ceux de Rasch) sont indépendants de l'échantillon, une propriété qui n'est pas valable pour les modèles à deux et trois paramètres [44].

Le modèle général de Birnbaum, auquel le modèle de Rasch se rattache est plus complexe car il admet des courbes d'allures différentes pour chacun des items et suppose donc d'estimer plus d'un paramètre par item puisqu'il tient également compte du pouvoir discriminant de chacun d'eux. Le modèle proposé par Lazarsfeld est en quelque sorte une simplification du modèle général de Birnbaum puisqu'il postule des distributions linéaires de pentes variables [46].

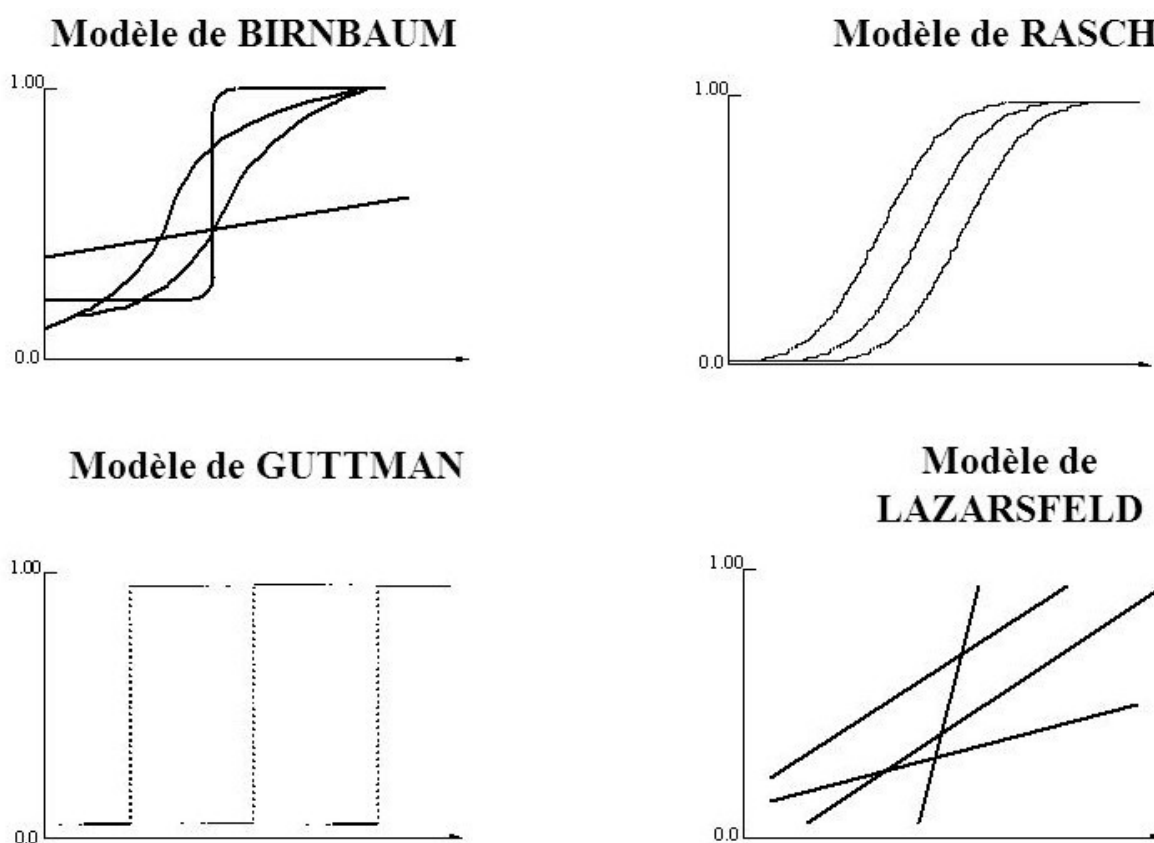


FIGURE 4.3

4.3.1.1.1 Le modèle Rasch La structure cumulative ou d'emboîtement des items obtenue par le scalogramme de Guttman rend les analyses exploratoires traditionnelles mal appropriées (AFC par exemple). Dans cette situation Rasch a proposé en 1960 une représentation numérique des niveaux de compétences de sujets et de difficulté d'items. Le modèle

de Rasch qui est le modèle à un paramètre (1PL), est considéré comme l'approche la plus simple pour modéliser la relation entre le trait latent et la probabilité de réussir correctement un item. Dans le modèle de Rasch chaque sujet est caractérisé par un niveau θ_i d'aptitude ($i = 1, \dots, N$) sur un continuum numérique latent. Le modèle de Rasch cherche à donner du sens non pas seulement au classement des sujets par compétences, non pas seulement au classement des items par difficultés mais le modèle cherche à donner du sens dans le fait que les coordonnées d'un sujet peuvent être directement et numériquement comparées à la difficulté d'un item pour qu'on puisse dire par exemple que ce sujet a la compétence nécessaire pour pouvoir résoudre l'item de telle difficulté. Donc ça devient possible de les comparer directement à partir du moment où on les projette sur une seule et même dimension (cet θ_i de sujet et β_j d'item). La probabilité de réussir l'item est une fonction croissante de la différence $\theta_i - \beta_j$ [46]. Rasch propose la fonction logistique suivante [42] :

$$P(x_1, \dots, x_n | \theta, \beta_1, \dots, \beta_n) = \prod_{j=1}^n P(x_j | \theta, \beta_j), \quad \text{avec,} \quad (4.9)$$

$$P(x_j | \theta, \beta_j) = \frac{\exp [x_j(\theta - \beta_j)]}{1 + \exp(\theta - \beta_j)}$$

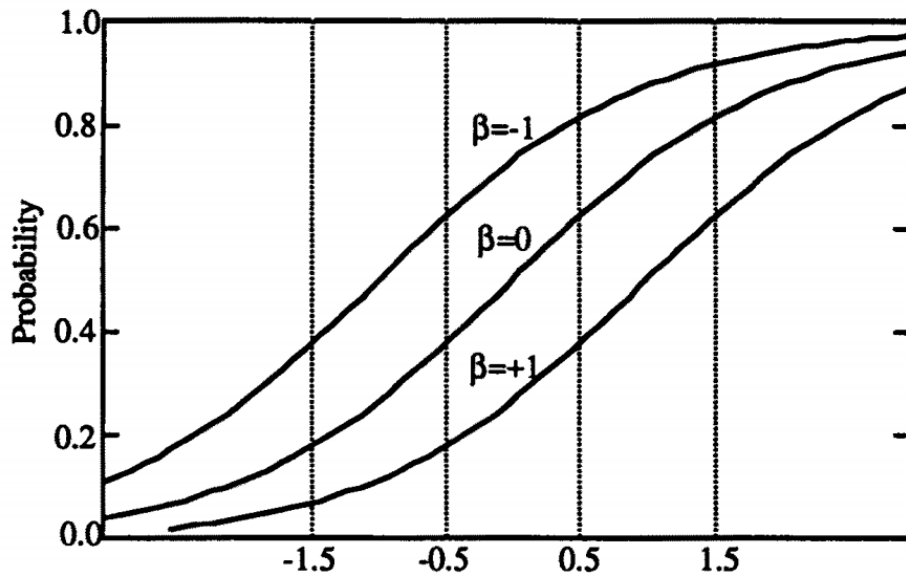


FIGURE 2.
Probability of a Correct Response, Conditional on θ , for Items with $\beta = -1, =0$, and $=1$

FIGURE 4.4

Où x_j est la réponse à l'élément j (1 pour correcte, 0 pour incorrecte). La figure 4.4

montre les probabilités de réponse correcte à trois éléments, avec les paramètres de difficulté - 1, 0 et + 1, en fonction de θ . Des valeurs faibles de θ indiquent des chances plus faibles de réponse correcte et des valeurs élevées indiquent des chances plus élevées [42].

4.4 Un ajustement bayésien des réponses aux items avec Stan

Stan est une plate-forme pour la modélisation statistique, l'analyse de données et la prédiction dans les sciences sociales, biologiques et physiques, l'ingénierie et les affaires. Il permet de spécifier les fonctions de densité de log afin d'obtenir :

- Inférence statistique bayésienne complète avec échantillonnage MCMC (NUTS, HMC)
- Inférence bayésienne approximative avec inférence variationnelle (ADVI)
- Estimation du maximum de vraisemblance pénalisée avec optimisation (L-BFGS)

La bibliothèque mathématique de Stan fournit des fonctions de probabilité différentiables et une algèbre linéaire (C++ autodiff). Stan peut être utilisé avec les langages d'analyse de données les plus populaires (R, Python, shell, MATLAB, Julia, Stata) et fonctionne sur toutes les principales plates-formes (Linux, Mac, Windows).

4.4.1 IRT avec Stan

La théorie de l'item-réponse (TRI) modélise la situation dans laquelle un certain nombre d'étudiants répondent chacun à une ou plusieurs questions d'un groupe de questions de test. Le modèle est basé sur des paramètres pour la capacité des étudiants, la difficulté des questions, et dans des modèles plus articulés, le caractère discriminant des questions et la probabilité de deviner correctement [47].

4.4.1.1 Déclaration des données

Les données fournies pour un modèle IRT peuvent être déclarées comme suit pour tenir compte du fait que tous les étudiants ne sont pas tenus de répondre à toutes les questions. Ces données sont dans le bloc « data » où les informations pertinentes sur les données et les données elles-mêmes sont spécifiées.


```

1 data {
2   // numbers of things
3   int<lower=1> N; // number of observations
4   int<lower=1> I; // items, number of questions
5   int<lower=1> S; // subjects, number of users
6   // data
7   int<lower=1,upper=I> item[N];
8   int<lower=1,upper=S> subject[N];
9   int<lower=0,upper=1> grade[N];
10 }

```

Dans cette déclaration il y'a N un entier positif qui est le nombre d'observation, où pour toute valeurs n de 1 à N $grade[n]$ est la réponse obtenue par l'étudiant $subject[n]$ à la question $item[n]$.

4.4.1.2 Les paramètres du model de Rasch (1PL)

Les paramètres du modèle IRT (1PL), également connu sous le nom de modèle Rash sont :

```

1 parameters {
2   // parameters
3   real ability[S]; // alpha: ability of student
4   real difficulty[I]; // beta: difficulty of question
5   real delta; // mean student ability
6 }

```

Le paramètre $ability_i$ est le coefficient de capacité de l'élève S_i et $difficulty_j$ le coefficient de difficulté de la question I_j . La paramétrisation non standard utilisée ici comprend également un terme d'interception delta, qui représente la réponse moyenne de l'étudiant à la question moyenne [47].

4.4.1.3 Le model de Rasch

```

1 model {
2   ability ~ std_normal();
3   difficulty ~ std_normal();
4   delta ~ normal(0.75,1);
5   for(n in 1:N)
6     grade[n] ~ bernoulli_logit(ability[subject[n]] - difficulty[item[n]] + delta);
7 }

```

Ce modèle utilise la distribution de *Bernoulli* paramétrée en *logit*.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour $y \in \{0, 1\}$,

$$BernoulliLogit(y|\alpha) = BernoulliLogit(y|logit^{-1}(\alpha)) = \begin{cases} logit^{-1}(\alpha) & \text{if } y = 1, \text{ et} \\ 1 - logit^{-1}(\alpha) & \text{if } y = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

4.4.1.4 Les predictions

Ce bloc est utilisé pour calculer de nouvelles variables et d'obtenir leur distributions postérieures correspondantes comme prédire des nouvelles valeurs où récupérer le log-vraisemblance, qui est utilisée pour calculer l'indice de l'ajustement du modèle à des fins de comparaison et de sélection de modèles.

```
1 generated quantities {  
2   int <lower=0,upper=1> y_pred[N];  
3   vector[N] log_lik;  
4   for(n in 1:N)  
5     y_pred[n] = bernoulli_logit_rgn(ability[subject[n]] - difficulty[item[n]] + delta);  
6     log_lik[n] = bernoulli_logit_lpmf(grade[n] | ability[subject[n]] - difficulty[item[n]]  
7       + delta);  
8 }
```

4.5 Conclusion

CHAPITRE 5

Clustering Hard et Soft

Sommaire

5.1	Introduction	52
5.2	Les métriques	53
5.3	Critère de liaison	53
5.4	Le clustering hiérarchique	57
5.5	Le clustering partitionnel	61
5.6	Fuzzy clustering	64
5.7	Les autres méthodes de clustering	67
5.8	La différence entre le clustering hiérarchique, partitionnel et Fuzzy clustering	68
5.9	Indice de validité du clustering	68
5.10	Conclusion	70

5.1 Introduction

Le clustering est un moyen de classer les données brutes de manière raisonnable et de rechercher les modèles cachés qui peuvent exister dans les ensembles de données [48]. Le clustering est une méthode de l'apprentissage automatique non-supervisé et un outil mathématique qui tente de découvrir des structures ou certains modèles dans un jeu de données, où les objets à l'intérieur de chaque cluster montrent un certain degré de similitude [49]. Le but de l'analyse de cluster consiste à partitionner un ensemble de N objets en clusters de sorte que les objets dans le cluster doivent être similaires les uns aux autres et les objets dans différents groupes doivent être différents avec les uns des autres [50]. Il peut être réalisé par divers algorithmes qui diffèrent considérablement dans leur notion de ce qui constitue un cluster et comment les trouver efficacement. L'analyse de cluster est un processus itératif de découverte de connaissances ou d'optimisation multi-objectifs interactive [49]. Les chercheurs ont mis au point de nombreux algorithmes de clustering, qui ont été largement appliqués. Ils peuvent être globalement classés en deux groupes : partitionnelle et hiérarchique. Les algorithmes de partition traitent les données d'entrée et créent une partition qui regroupe les données en clusters. En revanche, les algorithmes hiérarchiques créent un ensemble de partitions imbriquées appelé hiérarchie de cluster [51]. En général, un algorithme de clustering hiérarchique partitionne un ensemble de données en différents clusters via une agglomération ou une approche divisive basée sur un dendrogramme [52]. Les concepts du clustering incluent des groupes avec de petites distances entre les membres du cluster, des zones denses, des intervalles ou des distributions statiques particulières.

Le clustering est donc une méthode qui cherche à minimiser l'inertie intra-cluster et maximiser l'inertie inter-cluster. Pour minimiser l'inertie intra-cluster et maximiser l'inertie inter-cluster, les algorithmes de clustering utilisent des métriques pour mesurer la distance entre les clusters et les critères de liaison qui sont la façon dont la distance entre les clusters est calculée.

Avant de rentrer directement sur le fonctionnement des algorithmes de clustering, nous verrons d'abord les métriques et les critères de liaison qui sont utilisés dans le processus du clustering ensuite le clustering hiérarchique, partitionnel et l'indice de validité du clustering.

5.2 Les métriques

Le choix d'une métrique appropriée influencera la forme des grappes, car certains éléments peuvent être relativement plus proches les uns des autres sous une métrique que dans une autre.

Par exemple, en deux dimensions, sous la métrique de distance Manhattan, la distance entre l'origine (0,0) et (.5, .5) est la même que la distance entre l'origine et (0, 1), tandis que sous la distance euclidienne métrique, cette dernière est strictement supérieure.

Certaines métriques couramment utilisées pour le clustering hiérarchique sont :

Names	Formula
Euclidean	$\ a - b\ _2 = \sqrt{\sum_i (a_i - b_i)^2}$
Squared Euclidean distance	$\ a - b\ _2^2 = \sum_i (a_i - b_i)^2$
Manhattan distance	$\ a - b\ _1 = \sum_i a_i - b_i $
Maximum distance	$\ a - b\ _\infty = \max_i a_i - b_i $
Mahalanobis distance	$\sqrt{(a - b)^T S^{-1} (a - b)}$ where S is the Covariance matrix

TABLE 5.1 : Les métriques

5.3 Critère de liaison

Le critère de liaison détermine la distance entre les ensembles d'observations en fonction des distances par paires entre observations. Certains critères de liaison couramment utilisés entre deux ensembles d'observations A et B sont : [5.2](#)

Puisque le clustering est une méthode qui cherche à minimiser l'inertie au sein des clusters et à maximiser l'inertie entre les clusters, il existe donc deux types de distance, celle entre les objets des différents clusters qui est la distance inter-cluster et celle entre les objets du même cluster qui est la distance intra-cluster. Comme le montre la figure [5.1](#).

Names	Formula
Maximum or complete-linkage clustering	$\max\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Minimum or single-linkage clustering	$\min\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Unweighted average linkage clustering (or UPGMA)	$\frac{1}{ A \cdot B } \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} d(a, b)$
Weighted average linkage clustering (or WPGMA)	$d(i \cup j, k) = \frac{d(i, k) + d(j, k)}{2}$
Centroid linkage clustering, or UPGMC	$\ c_s - c_t\ $ where c_s and c_t are the centroids of clusters s and t , respectively.
Minimum energy clustering	$\frac{2}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \ a_i - b_j\ ^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \ a_i - a_j\ ^2 - \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m \ b_i - b_j\ ^2$

TABLE 5.2 : Les critères de liaison

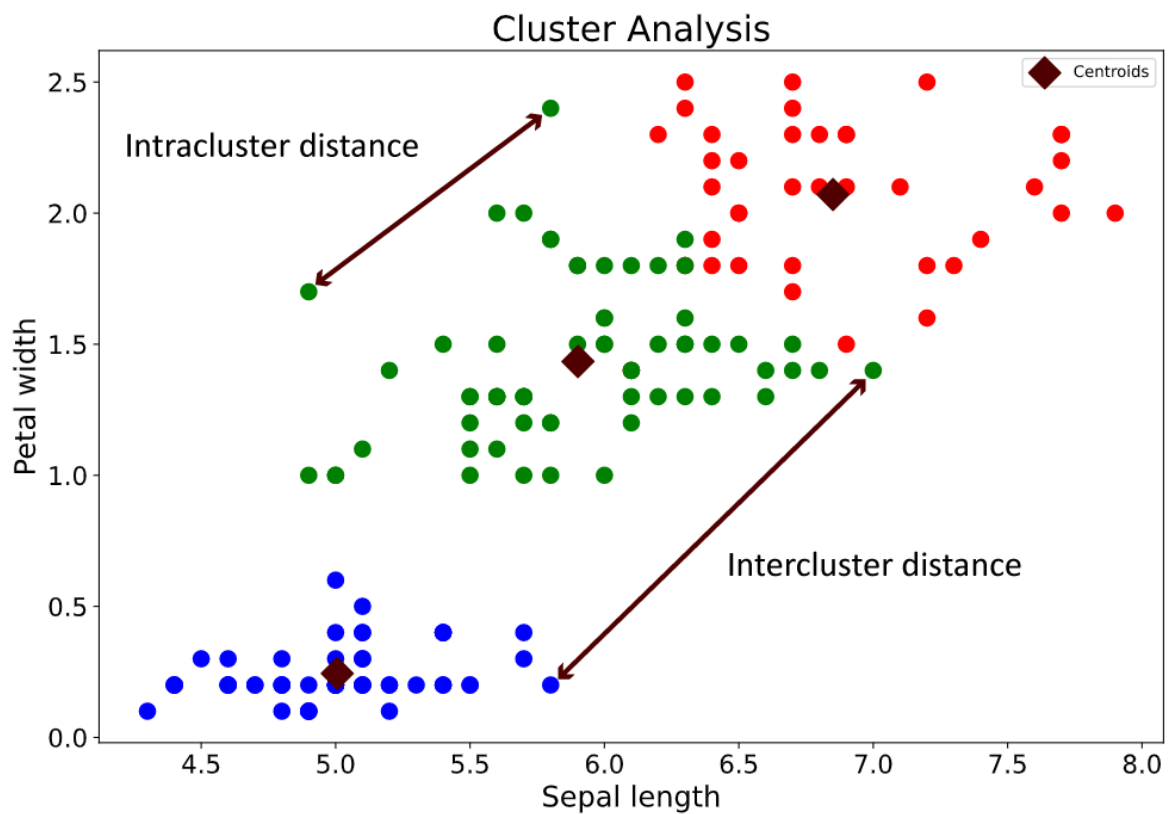


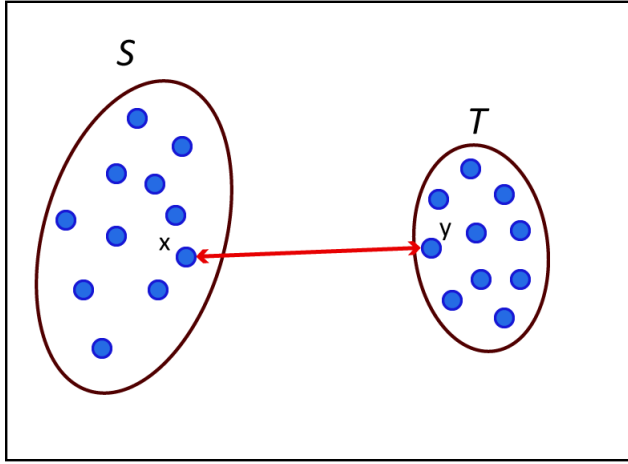
FIGURE 5.1 : Distances intracluster et intercluster.

5.3.1 Distance inter-cluster

La distance inter-cluster est la distance entre deux objets appartenant à deux clusters différents. Il y'a 5 types de distance inter-cluster :

5.3.1.1 Distance de liaison unique

La distance de liaison unique est la distance la plus proche entre deux objets appartenant à deux clusters différents. Le clustering de liaison unique est basé sur le critère de connectivité. La distances entre deux clusters S et T est : [53]



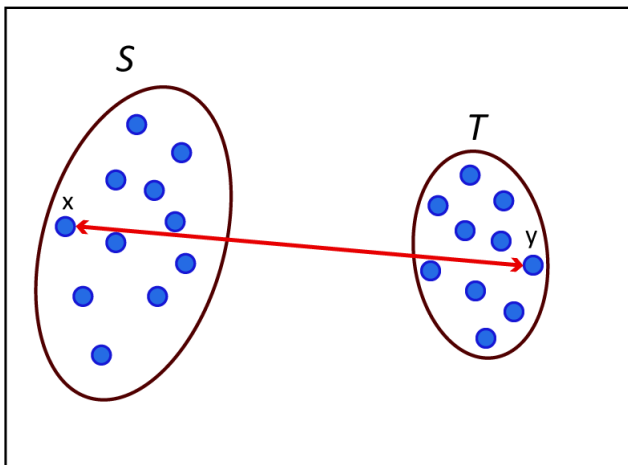
$$\delta(S, T) = \min \left\{ d(x, y) \right. \\ \left. x \in S, y \in T \right\}$$

(5.1)

Le principal avantage de la liaison simple est qu'elle peut gérer des formes non elliptiques [54]. Cependant, il est sensible au bruit et aux valeurs aberrantes [55] [56].

5.3.1.2 Distance de liaison complète

La distance de liaison complète est la distance entre deux objets les plus éloignés appartenant à deux clusters différents. La liaison complète est la plus grande distance entre les points de données dans deux clusters S et T défini par la formule suivante :



$$\delta(S, T) = \max \left\{ d(x, y) \right. \\ \left. x \in S, y \in T \right\}$$

(5.2)

Cette distance ne tient pas compte de la structure du cluster et ne peut pas détecter les amas non sphériques [54].

5.3.1.3 Distance de liaison moyenne

La distance de liaison moyenne est la distance moyenne entre tous les objets appartenant à deux clusters différents. Le clustering de liaison moyenne a une procédure similaire que celle à liaison unique sauf le calcul de la distance entre deux clusters. Il utilise la moyenne entre les points de deux clusters S et T comme suit [54] :

$$\delta(S, T) = \frac{1}{|S||T|} \sum_{x \in S, y \in T} d(x, y) \quad (5.3)$$

Le clustering utilisant la liaison moyenne est moins sensible au bruit et aux valeurs aberrantes. Le seul inconvénient est sa polarisation vers les amas globulaires [56].

5.3.1.4 Centroïde Linkage Distance

La distance de liaison centroïde est la distance entre les centres v_s et v_t de deux clusters S et T respectivement, définie comme :

$$\delta(S, T) = d(v_s, v_t) \text{ où} \quad (5.4)$$

$$v_s = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} x, v_t = \frac{1}{|T|} \sum_{y \in T} y$$

5.3.1.5 Distance de liaison moyenne du centre de gravité

La distance de liaison moyenne du centre de gravité est la distance entre le centre d'un cluster et tous les objets appartenant à un autre cluster, définie comme :

$$\delta(S, T) = \frac{1}{|S| + |T|} \left\{ \sum_{x \in S} d(x, v_t) + \sum_{y \in T} d(y, v_s) \right\} \quad (5.5)$$

5.3.2 Distance intra-cluster

La distance intra-cluster est la distance entre deux objets appartenant au même cluster. Il y'en a trois types :

5.3.2.1 Distance de diamètre complet

La distance de diamètre complet est la distance entre deux objets les plus éloignés appartenant au même cluster défini comme :

$$\Delta(S) = \max_{x,y \in S} \{d(x,y)\} \quad (5.6)$$

5.3.2.2 Distance de diamètre moyen

La distance de diamètre moyen est la distance moyenne entre tous les objets appartenant au même cluster défini comme :

$$\Delta(S) = \frac{1}{|S| \cdot (|S| - 1)} \sum_{x,y \in S; x \neq y} \{d(x,y)\} \quad (5.7)$$

5.3.2.3 Diamètre barycentre Distance

La distance de diamètre barycentre est à double distance moyenne entre tous les objets et le centre de groupe de s défini comme :

$$\Delta(S) = 2 \left\{ \frac{\sum_{x \in S} d(x, \bar{v})}{|S|} \right\} \quad \text{où} \quad \bar{v} = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} x \quad (5.8)$$

5.4 Le clustering hiérarchique

5.4.1 Introduction

Dès les années 1970, on a estimé qu'environ 75% de tous les travaux publiés sur le clustering utilisaient des algorithmes hiérarchiques [57]. Le clustering hiérarchique est une méthode de clustering qui permet d'identifier des clusters dans un ensemble de données. Contrairement aux autres méthodes de clustering comme le k-means, le clustering hiérarchique n'oblige pas à spécifier à l'avance le nombre de clusters à générer. Et le résultat est une représentation arborescente des observations, appelée dendrogramme. L'interprétation des informations contenues dans un dendrogramme est souvent d'un ou plusieurs types : relations d'inclusion d'ensemble, partition des ensembles d'objets et clusters significatifs [57]. C'est une méthode de clustering d'apprentissage automatique non supervisé qui procède à une décomposition de données en cherchant à construire une hiérarchie de clusters. Cette méthode suit deux approches basées sur la direction du progrès, c'est-à-dire s'il s'agit du flux descendant ou ascendant de création de clusters. Il s'agit respectivement de l'Approche Divisive et de l'Approche Agglomérative.

Le clustering agglomératif commence à partir des clusters singleton et obtient une hiérarchie en fusionnant successivement les clusters, tandis que le clustering divisif commence par un cluster unique contenant tous les points et se poursuit en fractionnant les clusters de manière itérative [58]. le clustering hiérarchique crée donc une décomposition hiérarchique de l'ensemble de données.

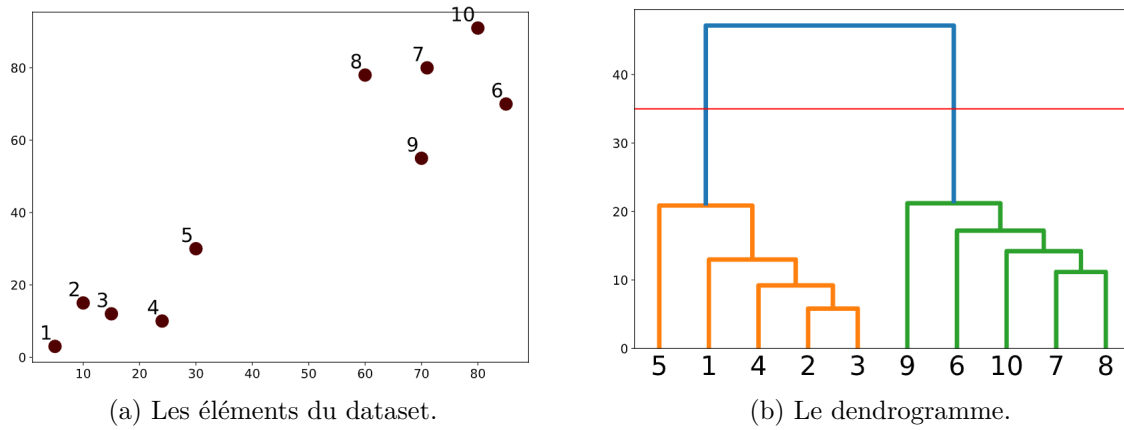
5.4.2 Clustering hiérarchique agglomératif

En clustering, l'un des algorithmes les plus largement utilisés est les algorithmes agglomératifs. Il s'agit d'une approche « ascendante » : chaque observation commence dans son propre cluster, et les paires de clusters sont fusionnées au fur et à mesure que l'on monte dans la hiérarchie. Les résultats de la classification hiérarchique sont généralement présentés dans un dendrogramme. Cependant, pour certains cas particuliers, des méthodes agglomératives efficaces optimales (de complexité) sont connues : SLINK pour une liaison simple et CLINK pour un clustering à liaison complète [49]. L'algorithme de clustering AHC a trois mesures de distance principales : liaison unique, liaison complète et liaison moyenne. Il est également appelé l'algorithme de clustering du plus proche voisin lorsque le critère single-linkage (liaison unique) est utilisée pour mesurer la distance distance entre les clusters [51]. Dans le clustering hiérarchique agglomératif classique, une paire de clusters à fusionner à la distance minimale inter-cluster [59].

5.4.2.1 Exemple de clustering agglomératif

Par exemple, supposons que les données de la figure 5.2a doivent être regroupées et que la métrique de distance est la distance euclidienne. Le dendrogramme obtenu après le clustering serait comme tel : 5.2b

Et pour obtenir le nombre de clusters optimal avec le dendrogramme, la méthode la plus connue est celle qui cherche la distance verticale la plus élevée qui ne croise aucun cluster et les lignes verticales franchissent le seuil représente le nombre optimal de clusters. En utilisant le dendrogramme précédant on obtient 2 clusters comme le montre la figure 5.2b.



5.4.3 Clustering hiérarchique divisive

Le principe de base du clustering divisif a été publié sous le nom d'algorithme DIANA (Divisive Analysis Clustering) [60]. Contrairement au clustering hiérarchique agglomératif, le clustering hiérarchique divisif suit une approche descendante dans laquelle tous les points de données appartiennent à un seul grand cluster et celui-ci est divisé en groupes plus petits en fonction d'une logique de terminaison ou d'un point au-delà duquel il n'y aura plus de division de points de données. Le principe du clustering divisif est illustré par la figure ci-dessous.

Le fractionnement est effectué de manière récursive au fur et à mesure que l'on descend dans la hiérarchie et il existe $2^{n-1} - 1$ [61] façons de diviser un ensemble de n objets en deux sous-ensembles [62]. Par conséquent le fractionnement prend trop du temps sur la recherche de toutes les bipartitions possibles. Le clustering hiérarchique divisif procède par le fractionnement des clusters en deux clusters les moins similaires en utilisant des critères de type distance ou rapport et ensuite détermine les niveaux des nœuds (qui représente les groupes obtenus dans le dendrogramme).

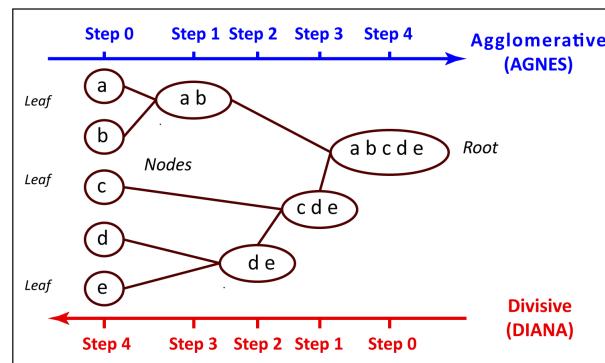


FIGURE 5.2 : La direction du clustering hiérarchique agglomérative et divisive.

5.4.4 Procédures de fractionnement des clusters

Un certain nombre de procédures de fractionnement ont été conçus dans le passé. La procédure de Williams Et Lambert (1959) [63] est dite monothétique dans le sens où les ensembles d'objets sont divisés en fonction des valeurs d'une seule variable. Cette idée a été mise à jour en utilisant une composante principale au lieu d'une seule variable (algorithme Principal Directions Divisive Partitioning ou PDDP par Boley 1997) [62].

Une autre approche pour contourner la complexité du fractionnement consiste à extraire un ou plusieurs objets, de l'ensemble à fractionner. Macnaughton-Smith et al. (1964) [64] ont proposé de sélectionner l'objet le plus distant comme center d'un nouveau cluster éloigné, puis les objets (les éléments du data set) les plus proches s'agrègent vers ce nouveau cluster [62].

Une idée similaire a été développée par Hubert (1973) [65], qui suggère d'utiliser une paire d'objets comme point d'origine de la nouvelle bipartition. Son choix a été de sélectionner les deux objets qui sont les plus dissemblables, puis de construire les deux sous-clusters en fonction des distances à ces points d'origines [62].

Exploitant cette idée, Roux [66] [67] considérait les bipartitions générées par toutes les paires d'objets, en conservant la bipartition avec la meilleure évaluation de certains critères a priori [62].

5.4.5 Evaluations des bipartitions

Quel que soit le critère retenu, une série de très bonnes bipartitions ne se traduit pas automatiquement par une bonne hiérarchie. Les critères qui permettent d'évaluer les bipartitions sont de deux types : critère de type distance et les critères de type rapport. L'idée est donc de prendre en compte non seulement les dissemblances entre les clusters, mais aussi les dissemblances avec les éléments de deux clusters. Ces critères qui sont appelés aussi indice de validité sont énoncés dans le tableau 5.4.

5.4.6 Déterminations de niveaux de nœuds

Pour l'algorithme agglomératif, la valeur de l'indice de validité obtenu pour l'estimation du nombre optimale de clusters devient le niveau du nœud correspondant, et le dendrogramme ne montre aucun croisement (ou inversion) des branches. Malheureusement, les procédures qui divisent, en général, ne bénéficient pas de cette propriété, en raison du non-optimalité des fractionnements successifs. Une règle est alors nécessaire pour obtenir des niveaux cohérents

et une véritable représentation arborescente [62].

5.4.7 Conclusion

Le clustering hiérarchique dans la recherche d'informations identifie donc des groupements ou regroupements des « objets » étudiés qui représentent le mieux certaines relations de similitude. Il permet ainsi d'obtenir des résultats dans une hiérarchie de cluster appelé dendrogramme. Et si le dendrogramme ne présente aucun croisement des branches, la visualisation de ce dernier permet de voir comment les différents sous-clusters sont liés les uns aux autres et à quelle distance sont les points de données.

5.5 Le clustering partitionnel

5.5.1 K-means clustering

K-means est un algorithme de clustering qui est largement utilisé pour analyser les clusters des grands ensembles de données. Il a été proposé par MacQueen en 1967 et c'était l'un des algorithmes d'apprentissage non supervisé le plus simple, qui a été appliqué pour résoudre les problèmes du clustering [68]. Il s'agit d'un algorithme de partitionnement des clusters, cette méthode consiste à classer les objets d'un jeu de données en k clusters différents, de telle sorte que les clusters générés sont compacts et indépendants [69].

5.5.1.1 Le fonctionnement de l'algorithme k-means

K-Means clustering fonctionne de cette façon : par exemple pour regrouper les données en trois clusters on commence par placer trois points appelés centroïdes au hasard dans le jeu de données ensuite on affecte chaque point de data set au centroïde le plus proche ce qui nous donne trois clusters puis on déplace chaque centroïde au milieu de son cluster, on recommence jusqu'à ce que les centroïdes convergent vers une position d'équilibre. L'algorithme requiert donc à l'initialisation le nombre k de clusters à générer et k centroïdes (les centres des clusters) sont initialisés avec des coordonnées aléatoires.

5.5.1.2 Les étapes de l'algorithme

L'algorithme de K-means clustering est un algorithme itératif qui procède comme suit :

- Sélection de k clusters à générer, où la valeur k est fixée à l'avance.
- Initialisation des centroïdes avec des coordonnées aléatoires.

- Calcul de la distance entre les objets et le centre de gravité du cluster.
- Affectation des points au centroïde le plus proche.
- Déplacement du centroïde à la moyenne du cluster.
- Répétition des étapes précédente jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de changement au centre des clusters.

Les étapes sont illustrées par la figure ci-dessous.

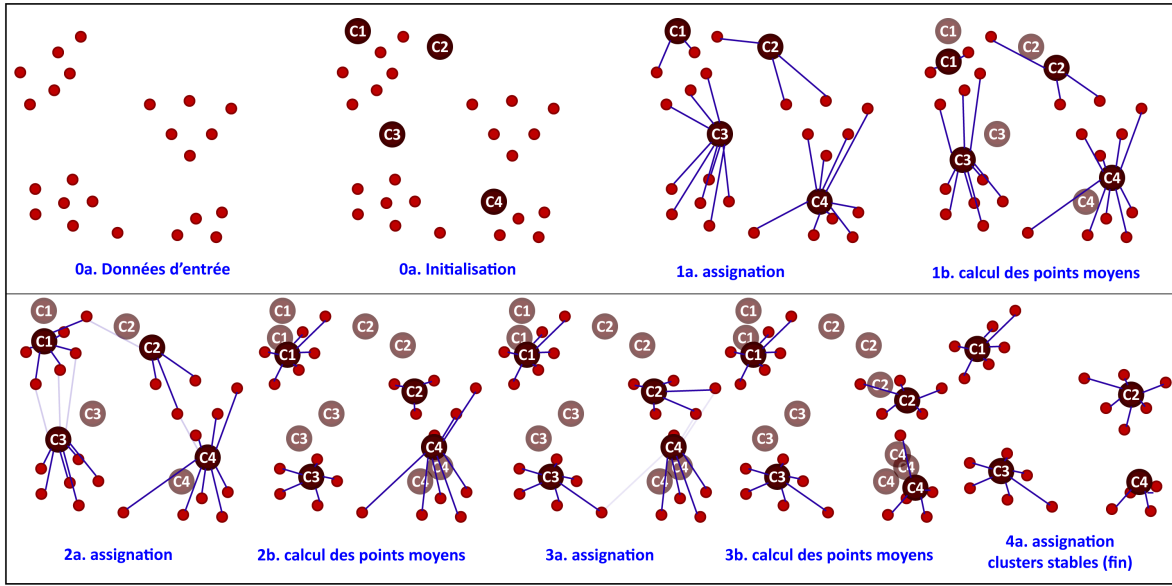


FIGURE 5.3 : Les étapes de l'algorithme k-means.

Après l'initialisation du nombre k des clusters a trouvées dans le jeu de données et k centroïdes, la distance euclidienne est généralement considérée pour déterminer la distance entre chaque objet de données et les centres du cluster. Cette distance est utilisée pour regrouper chaque objet de données au centre le plus proche [70]. La distance euclidienne entre un vecteur $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ et un autre vecteur $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, La distance euclidienne $d(x_i, y_i)$ peut être obtenue comme suit :

$$d(x_i, y_i) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

Lorsque tous les objets de données sont inclus dans certains clusters, la première étape est terminée et un regroupement précoce est effectué. Ce processus itératif continue jusqu'à ce que la fonction de critère est minimisé. [69].

En supposant que l'objet cible est x, x_i indique la moyenne du cluster C_i , la fonction critère est définie comme suit :

$$E = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i} |x - x_i|^2 \quad (5.10)$$

5.5.1.3 Les lacunes de l'algorithme k-means

L'algorithme de clustering k-means converge toujours vers le minimum local. Avant qu'il ne converge, l'algorithme doit calculer la distance entre chaque objet de données et chaque centre de cluster dans chaque itération. Du au choix aléatoire des centres de cluster initiaux, la valeur précise t connu sous le nom de nombre d'itérations k-means varie en fonction des centres de cluster de départ [71]. Aussi le fait de devoir choisir a priori le paramètre K est un inconvénient, car l'algorithme peut donner des fausses informations sur les clusters générés et il est influencé par des valeurs aberrantes appelé aussi en anglais outliers.

5.5.1.4 Les solutions aux lacunes de l'algorithme k-means

Il n'est pas nécessaire de calculer la distance entre chaque objet de données et chaque centre de cluster dans chaque itération. En supposant que le cluster C s'est formé après le premier l' itération j , l'objet de données x est affecté au cluster C , mais dans quelques itérations, l'objet de données x est toujours affecté au cluster C . Donc si on constate que la distance de l'objet de données x aux autre cluster est petite que au cluster C , il est possible d'arrêter le calcul de la distance lié l'objet x , car ceci provoque un long temps d'exécution affectant ainsi l'efficacité du clustering [69].

Selon la position initiale des centroïdes, K-means peut donner de mauvais clusters. La configuration des clusters trouver par K-means peut ne pas être la plus optimale. On parle d'optimum local. La solution est d'exécuter K-means avec différentes positions de départ des centroïdes. La solution retenue est celle qui minimise la somme des distances entre les points (x) d'un cluster et son centre (u) . Cela équivaut à minimiser la variance des clusters. K-means cherche la position des centroïdes qui minimise la distance entre les points d'un cluster (X_i) et le centre (U_i) de ce dernier. L'algorithme de K-means cherche donc à minimiser une fonction cout appelé Inertie et qui représente la distance entre le point d'un cluster et le centre de ce dernier. Les paramètres de la méthode `kmeans()` à optimiser pour le langage R :

- **Centers** : les clusters obtenus par l'algorithme son plus cohérent lorsque le nombre de centers demander par l'algorithme est le même que celui des clusters naturels du data set. Dans un data set avec de nombreuses dimensions il est difficile de voir un nombre de clusters à l'œil nu. Pour choisir le bon nombre de cluster il faut utiliser la méthode

Elbow qui consiste à tracer l'évolution du cout du model en fonction du nombre de cluster et de détecter une zone de coude, cette zone nous indique le nombre de cluster optimale. C'est-à-dire celui qui nous permet de réduire au maximum le cout du model tout en conservant un nombre raisonnable de cluster.

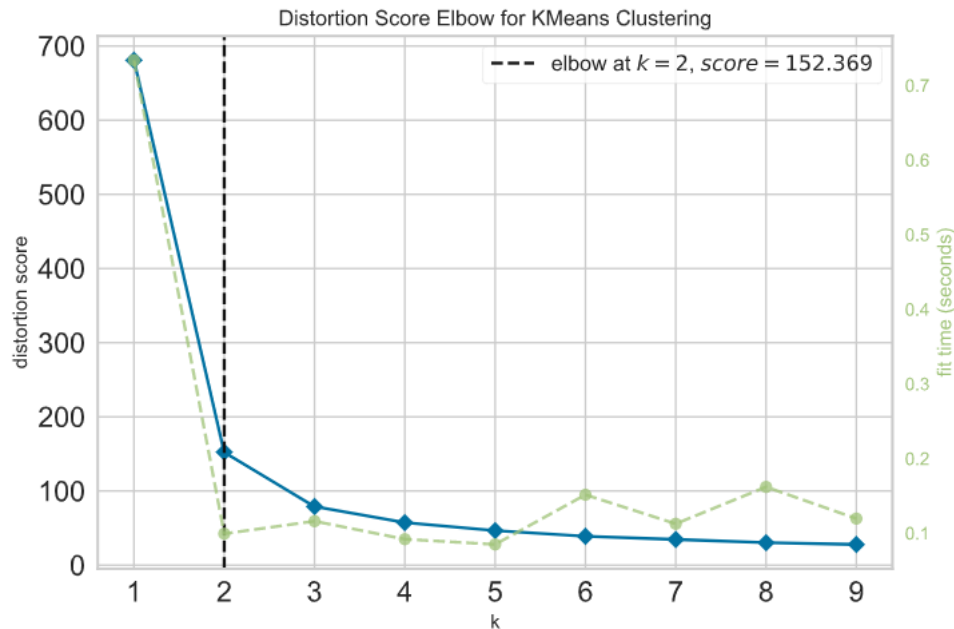


FIGURE 5.4 : La méthode Elbow.

- **nstart** : avec le nombre donner au paramètre nstart l'algorithme tente plusieurs configuration initial de la position des centroïdes et retient la meilleurs configuration qui minimise la variance des cluster. La valeur par défaut est 1 mais la valeur recommander est 25 par contre cette valeur conduit 'a un gaspillage de ressource avec un grand data set.
- **Iter.max** : le nombre de fois que l'algorithme doit s'exécuter. La valeur par défaut est 10 ce qui permet au centroïdes de converger ver position d'équilibre.
- **algorithm** : l'algorithme choisit est celui qui donne une plus forte cohérence des clusters. Avec python l'algorithme kmeans++ donne des meilleurs résultats.

5.6 Fuzzy clustering

5.6.1 Introduction

Les méthodes de clustering traditionnelles (Hard) se limitent du fait que chaque point de l'ensemble de données appartient à un seul cluster. La théorie des ensembles flous proposée

par Zadeh [72] en 1965 a fait jaillir le concept d'incertitude d'appartenance, qui est décrit par la fonction d'appartenance [50]. L'utilisation d'ensembles flous fournit des informations d'appartenance de classe imprécises. L'application de la théorie des ensembles flous dans l'analyse de cluster a été proposée pour la première fois dans les travaux de Bellman, Kalaba et Zadeh [72] et Ruspini [73].

Ruspini a proposé l'utilisation d'ensembles flous dans le clustering sous la forme d'une fonction objective qui obtient une meilleure partition floue des données en utilisant des méthodes Fuzzy (flou). Et cette méthode devient un problème d'optimisation de de fonction objective qui appartient à la catégorie du clustering flou basé sur les fonctions objectives. Il existe aussi le clustering flou basé sur une relation floue et le clustering « fuzzy generalized k-nearest neighbor rule ».

De nombreuses méthodes de regroupement flou ont été proposées en raison de modifications des fonctions objectives, qui visent à améliorer le résultat en ce qui concerne le bruit, les valeurs aberrantes, etc [51]. La methode la plus est Fuzzy c-means (FCM) est une technique non supervisée qui classe les points de données similaires en clusters [58].

Dans de nombreuses situations, le clustering Soft est plus naturel que le clustering Hard parce que les objets situés aux limites entre plusieurs classes ne sont pas forcés d'appartenir entièrement à l'un des clusters, mais se voient plutôt attribuer des degrés d'appartenance compris entre 0 et 1 indiquant leur appartenance partielle. Au contraire, dans les techniques de clustering dur, les données sont groupées de manière exclusive, de sorte que si une certaine donnée appartient à un cluster défini, elle ne peut pas être incluse dans un autre cluster [74]. Nous verrons dans cette section le Fuzzy c-means qui est une technique de clustering flou très populaire.

5.6.2 Fuzzy C-means clustering :

Fuzzy C-means (FCM) est une technique de regroupement de données dans laquelle chaque point de données appartient à un cluster dans une certaine mesure spécifiée par un degré d'appartenance. Cette technique a été initialement développé par Dunn 1973 et amélioré par Jim Bezdek en 1981 par rapport aux méthodes de clustering antérieures [75]. Il fournit une méthode de regroupement des points de données qui peuplent un espace multidimensionnel dans un nombre spécifique de clusters différents. Le principal avantage de cette methode est qu'elle fournit des appartenances graduelles de points de données à des clusters mesurés en degrés dans un intervalle $[0,1]$. Cela donne la flexibilité d'exprimer que les points de données peuvent appartenir à plus d'un cluster.

5.6.2.1 Algorithme FCM :

Le but est de minimiser la fonction objective définie comme suit :

$$J_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C U_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2 \quad \text{avec } 1 \leq m < \infty \quad (5.11)$$

Où U_{ij} est le degré auquel une observation x_i appartient à un cluster j , c_j est le centre du cluster j et m le fuzzifier.

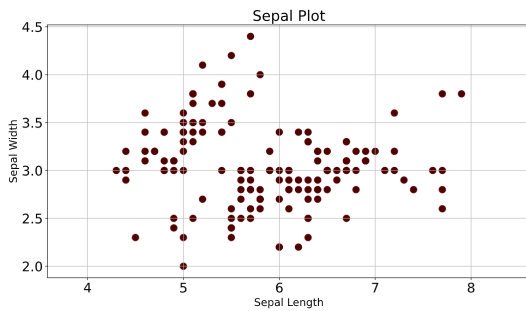
On remarque que FCM differe de k-means du fait que FCM utilise les valeurs d'appartenance U_{ij} et le fuzzifier m . La variable U_{ij}^m est inversement lié à la distance entre x et le centre de cluster et est défini par :

$$U_{ij}^m = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left(\frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_k\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (5.12)$$

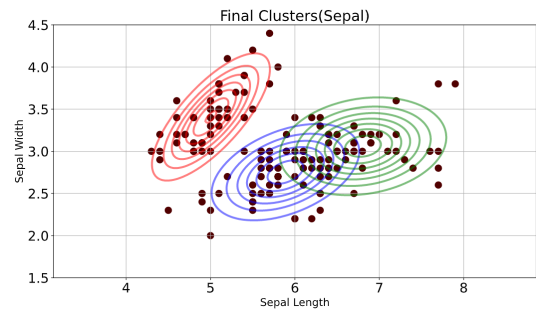
Le paramètre m est un nombre réel supérieur à 1 ($1 \leq m < \infty$) et il définit le niveau de flou du cluster. Une valeur de m proche de 1 donne une solution de cluster qui devient de plus en plus similaire à la solution de clustering **Hard** tel que k-means ; alors qu'une valeur de m proche de l'infini conduit à un flou complet. Le bon choix est d'utiliser $m = 2.0$ (Hathaway et Bezdek 2001).

Enfin le centroïde d'un cluster est la moyenne de tous les points, pondérée par leur degré d'appartenance au cluster.

$$C_j = \frac{\sum_{i=1}^N U_{ij}^m \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N U_{ij}^m} \quad (5.13)$$



(a) Les éléments du dataset Iris [76].



(b) Illustration du degré d'appartenance des éléments au cluster.

5.6.3 Conclusion

Le clustering flou c-means peut être considéré comme un meilleur algorithme par rapport à l'algorithme k-Means. Contrairement à l'algorithme k-Means où les points de données ap-

partiennent exclusivement à un cluster, dans le cas de l’algorithme flou c-means, le point de données peut appartenir à plus d’un cluster avec une vraisemblance ou une probabilité. Le regroupement flou c-means donne des résultats comparativement meilleurs pour les ensembles de données qui se chevauchent.

5.7 Les autres méthodes de clustering

En dehors des méthodes de clustering hiérarchique, partitionnel et floue (fuzzy) vu précédemment, les autres méthodes de clustering sont énoncées de façon brève dans le tableau 5.3

Clustering Method	Description	Advantages	Disadvantages	Algorithms
Distribution based Clustering	Basé sur la distribution de probabilité des données, les clusters sont dérivés de diverses métriques telles que la moyenne, la variance, etc.	Le nombre de clusters n’a pas besoin d’être spécifié a priori, fonctionne sur des données en temps réel, les métriques sont faciles à comprendre et à régler.	Algorithme complexe et lent, ne peut pas être adapté à des données plus volumineuses	Gaussian Mixed Models, DB-CLASD
Density based Clustering (Model-based methods)	Basé sur la densité des points de données, également connu sous le nom de clustering basé sur un modèle.	Peut gérer le bruit et les valeurs aberrantes, n’a pas besoin de spécifier le nombre de clusters au début, les clusters créés sont très homogènes, aucune restriction sur les formes de cluster.	Algorithme complexe et lent, ne peut pas être adapté à des données plus volumineuses	DENCAST, DBSCAN
Constraint based (Supervised Clustering)	Le clustering est dirigé et contrôlé par les contraintes	Crée une limite de décision parfaite, peut déterminer automatiquement les classes de résultats en fonction des contraintes, les données futures peuvent être classées en fonction des limites de formation.	Surapprentissage, niveau élevé d’erreurs de classification erronée, ne peut pas être entraîné sur des ensembles de données plus volumineux	Decision Trees, Random Forest, Gradient Boosting.

TABLE 5.3 : Les autres méthodes de clustering

5.8 La différence entre le clustering hiérarchique, partitionnel et Fuzzy clustering

Le clustering hiérarchique et partitionnel présente des différences essentielles en termes de temps d'exécution, d'hypothèses, de paramètres d'entrée et de clusters résultants. En règle générale, le clustering partitionnel est plus rapide que le clustering hiérarchique. La classification hiérarchique nécessite uniquement une mesure de similarité, tandis que la classification partitionnelle requiert des hypothèses plus strictes telles que le nombre de classes et les centres initiaux. La mise en cluster hiérarchique ne nécessite aucun paramètre d'entrée, tandis que les algorithmes de mise en cluster partiels nécessitent le nombre de clusters à exécuter. La classification hiérarchique renvoie une division beaucoup plus significative et subjective des grappes, mais la classification partitionnelle produit exactement k clusters. Les algorithmes de classification hiérarchique conviennent mieux aux données catégoriques, à condition qu'une mesure de similarité puisse être définie en conséquence. En terme générale ils sont considérés comme des méthodes de clustering Hard, où chaque élément est affecté à un seul cluster. Par contre les méthodes de clustering Soft comme le Fuzzy clustering regroupent les éléments de données de telle sorte qu'un élément puisse exister dans plusieurs clusters.

5.9 Indice de validité du clustering

Les algorithmes supervisés ont beaucoup de métriques pour vérifier leur qualité d'ajustement comme la précision, la valeur r carré, la sensibilité, la spécificité, etc. Concernant les algorithmes non supervisés et plus précisément les algorithmes de clustering l'indice de validité de cluster est utilisé pour mesurer la qualité de la partition trouvée et aussi les partitions optimales. L'indice de validité de cluster est utilisé donc pour mesurer la qualité des clusters et pour rechercher le nombre optimal de clusters lorsque le nombre de clusters dans les données l'ensemble n'est pas connu à l'avance [77]. Il utilise les propriétés des clusters telles que la compacité (ou la variation) et la séparation (ou l'isolement) qui sont souvent considérées comme des caractéristiques majeures permettant de valider les clusters. La compacité indique la variation ou la dispersion des données au sein d'un cluster, et la séparation indique l'isolement des clusters les uns des autres [78]. Plusieurs indices de validité courants sont énoncés dans le tableau suivant :

Indice	Description	Formule
Les indices de validité adaptés aux clustering partitionnelle		
Indice de Dunn	Il est l'un des indices les plus anciens et les plus cités est proposé par [79]. L'index de Dunn (DU) identifie les clusters qui sont bien séparés et compacts. Le but est donc de maximiser la distance inter-clusters tout en minimisant la distance intra-cluster.	$DU_k = \min_{i=1,\dots,k} \left\{ \min_{j=1+1,\dots,k} \left(\frac{diss(c_i, c_j)}{\max_{m=1,\dots,k} diam(c_m)} \right) \right\}$ <p>où $diss(c_i, c_j) = \min_{x \in c_i, y \in c_j} d(x, y)$ est la dissemblance entre les clusters c_i et c_j, et $diam(C) = \max_{x, y \in C} d(x, y)$ est la fonction intra-cluster (ou diamètre) du cluster. Si l'index de Dunn est grand, cela signifie qu'il existe des clusters compacts et bien séparés [80].</p>
Indice Calinski-Harabasz	Cet indice [81] est basé sur un rapport entre la matrice de dispersion des clusters (BCSM) et la matrice de dispersion des clusters (WCSM).	$CH_k = \frac{BCSM}{k-1} \cdot \frac{n-k}{WCSM}$ <p>où n est le nombre total de points et k le nombre de clusters. Le $BCSM$ est basé sur la distance entre les clusters et est défini par : $BCSM = \sum_{i=1}^k n_i \cdot d(z_i, z_{tot})^2$, où z_i est le centre du cluster c_i et n_i le nombre de points dans c_i. Le $WCSM$ est : $WCSM = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in c_i} d(x, z_i)^2$ où x est un point de données appartenant au cluster c_i. Pour obtenir des clusters bien séparés et compacts, BCSM est maximisé et WCSM minimisé [80].</p>
Indice Davies-Bouldin	Semblable à l'indice de Dunn, l'indice Davies-Bouldin [82] identifie des clusters éloignés les uns des autres et compacte.	$DB_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \max_{j=1,\dots,k; i \neq j} \left\{ \frac{diam(c_i) + diam(c_j)}{d(z_i, z_j)} \right\}$ <p>où le diamètre d'un cluster est : $diam(c_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i} \sum_{x \in c_i} d(x, z_i)^2}$, avec n_i le nombre de points et z_i le centre de gravité du cluster c_i. Puisque l'objectif est d'obtenir des clusters avec des distances intra-clusters minimales, les petites valeurs de DB sont intéressantes. Par conséquent, cet index est minimisé lors de la recherche du meilleur nombre de clusters [80].</p>
Indice de silhouette	La statistique de silhouette [83] est une autre façon bien connue d'estimer le nombre de groupes dans une donnée ensemble. L'indice Silhouette (SI) calcule pour chaque point une largeur en fonction de son appartenance à groupe. Cette largeur de silhouette est alors une moyenne sur l'ensemble des observations.	$SI_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)}{\max(a_i, b_i)},$ <p>où n est le nombre total de points, a_i est la distance moyenne entre le point i et tous les autres points de son propre cluster et b_i est le minimum des dissemblances moyennes entre i et les points d'autres clusters. Enfin, la partition avec le SI le plus élevé est considérée comme optimale [80].</p>

TABLE 5.4 : Indice de validité du clustering Hard

Indice	Formule
Il y'a aussi d'autre indice de validité de clustering partitionnel comme l'indice de Maulik-Bandyopadhyay et Geometric index. Les indices de validité utilisé pour le fuzzy clustering sont :	
Le coefficient de partition PC [84]	$V_{PC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n u_{ij}^2$
L'entropie de partition PE [85]	$V_{PE} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n u_{ij} \log u_{ij}$
Fonction de validité proposée par Wu et Yang [86]	$V_{PCAES} = \sum_{i=1}^c PCAES_i = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n u_{ij}^2 / u_M - \sum_{i=1}^c \exp(-\min_{k \neq i} \{\ v_i - v_k\ ^2 / \beta_T\})$ <p>où $u_M = \min_{1 \leq i \leq c} \left\{ \sum_{j=1}^n u_{ij}^2 \right\}$, $\beta_T = \frac{\sum_{l=1}^c \ v_l - \bar{v}\ ^2}{c}$ et $\bar{v} = \sum_{j=1}^n x_j / n$</p> <p>La grande valeur VPCAES signifie que les c clusters sont compact et séparé les uns des autres, et la petite valeur VPCAES implique qu'ils ne sont pas compacts ou séparés.</p>
Fonction de validité proposée par Fukuyama et Sugeno [87]	$V_{FS} = J_m(U, V) - K_m(U, V) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n u_{ij}^m \ x_j - v_i\ ^2 - \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n u_{ij}^m \ v_i - \bar{v}\ ^2,$ <p>où $\bar{v} = \sum_{j=1}^n x_j / n$.</p>
Fonction de validité proposée par Xie et Beni [88]	$V_{XB} = \frac{J_m(U, V) / n}{Sep(V)} = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n u_{ij}^m \ x_j - v_i\ ^2}{n \min_{i \neq j} \ v_i - v_j\ ^2}$

TABLE 5.5 : Indice de validité du clustering Soft

5.10 Conclusion

Nous avons passé en revue dans cette partie le clustering qui est une méthode de l'apprentissage automatique non-supervisé et les techniques qu'il utilise pour l'extraction des clusters. Plusieurs objectif pousse à utiliser certaines techniques de clustering comme le clustering partitionnel et hiérarchique qui forme des clusters où chaque élément appartient à un seul cluster et le clustering flou (fuzzy) où chaque élément peut appartenir à plusieurs clusters avec un degré d'appartenance. Ensuite après l'extraction des clusters, les indices de validité de clusters peuvent être utilisé pour évaluer la qualité des clusters obtenue où détecter à l'avance le nombre de clusters optimale avant d'utiliser les algorithmes.

Deuxième partie

Contributions

CHAPITRE 6

Contribution and Results

Sommaire

6.1	Introduction	73
6.2	Approche proposée	73
6.3	Implémentations et résultats expérimentaux	73
6.4	Conclusion	76

6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les notions vues dans les chapitres précédents appliquer à un dataset. Partant de la collecte et la préparation du dataset, de l'application de la théorie des réponses aux items pour un ajustement bayésien des réponses obtenues par les apprenants, jusqu'aux clustering hard et soft des items basés sur la similarité.

6.2 Approche proposée

6.3 Implémentations et résultats expérimentaux

6.3.1 Outils de développement

les outils matériels et logiciels utilisés pour le développement sont :

6.3.1.1 Matériels

Marque	CPU	RAM	OS
Lenovo Y40-80	AMD Intel Core i5 2.20 GHz	16Go	Windows10 64bits
Et Linux Ubuntu 20.04 LTS installé sur WSL2			

TABLE 6.1 : Caractéristiques du matériels utilisés

WSL2 : Windows Subsystem for Linux (WSL) est une couche de compatibilité permettant d'exécuter des exécutables binaires Linux de manière native sur Windows 10 et Windows Server 2019. WSL2 est une version améliorée de WSL1 qui introduit d'importants changements, notamment la présence d'un véritable noyau Linux [89] via un sous-ensemble de fonctionnalités Hyper-V.

6.3.1.2 Outils et packages

Outils Packages	Description
Les outils et packages utilisés sur windows 10 :	
 Python [90]	<p>Créé par le développeur Guido Van Rossum et publié pour la première fois en 1991. Il permet aux programmeurs d'utiliser différents styles de programmation pour créer des programmes simples ou complexes. Python est l'un des langages de programmation les plus populaires pour la science des données. C'est un langage de programmation de haut niveau, structuré, open source, interprété et dynamique. Il est multiparadigme, multi-plateforme et multi-usages. La syntaxe de Python aide les programmeurs à coder en moins d'étapes par rapport à d'autres langages comme JAVA ou C++, ce qui facilite le travail et le rend plus rapide, facile et amusant à faire. Il possède une bibliothèque standard complète et volumineuse dotée d'une gestion automatique de la mémoire et de fonctionnalités dynamiques [91]. Dans notre travail, nous avons utilisé Python 3.5 intégré à Anaconda.</p>
 Anaconda	<p>Anaconda [92] est une distribution libre et open source [93] des langages de programmation Python et R appliqué au développement d'applications dédiées à la science des données et à l'apprentissage automatique (traitement de données à grande échelle, analyse prédictive, calcul scientifique), qui vise à simplifier la gestion des paquets et de déploiement. Les versions de paquetages sont gérées par le système de gestion de paquets conda [94] et est adapté pour Windows, Linux et MacOS. Anaconda fournit interface graphique qui permet de lancer des applications, de gérer les librairies avec gestionnaire de paquets conda, et les environnements de développement. Plusieurs applications sont disponibles par défaut comme JupyterLab, Jupyter Notebook, QtConsole5, Spyder, Glue, Orange, RStudio, Visual Studio Code.</p>
 Jupyter Notebook [95]	<p>Jupyter Notebook est un environnement de programmation interactif basé sur le web utilisé pour programmer en python, R, Ruby, Julia ou encore Scala qui permet de réaliser des notebooks contenant à la fois du texte en markdown et du code en Julia, Python, R etc.</p>
 Scikit-learn [96]	<p>Scikit-learn est une bibliothèque libre Python destinée à l'apprentissage automatique. Elle propose un ensemble d'outils efficace clé en main pour l'analyse et l'exploration de données. Cette bibliothèque prend en charge les algorithmes de classifications, de régression, du clustering, la réduction de dimensionnalité et de prétraitement des données pour l'extraction et la normalisation des caractéristiques.</p>

TABLE 6.2 : Indice de validité du clustering Hard




Outils Packages	Description
 Pandas [97]	Pandas est une bibliothèque écrite en Python qui permet la manipulation et l'analyse des données. Elle propose en particulier des structures de données et des opérations de manipulation de tableaux numériques et de séries temporelles. Elle propose principalement comme structures de données les Series, DataFrames, Panels, Panels4D. Et aussi des fonctionnalités comme la manipuler des données aisément et efficacement avec des index pouvant être des chaînes de caractères, des outils pour lire et écrire des données structurées, gestion des données manquantes, le tri, le redimensionnement et , fusion et jointure de large volume de données et analyse de séries temporelles.
 Numpy [98]	est une bibliothèque python pour le calcul scientifique qui fournit un objet tableau multidimensionnel, divers objets dérivés (tels que des tableaux et des matrices masqués) et un assortiment de routines pour des opérations rapides sur des tableaux, notamment mathématiques, logiques, manipulation de forme, tri, sélection, transformées de Fourier discrètes, algèbre linéaire de base, opérations statistiques de base, simulation aléatoire etc.
 Matplotlib [99]	Matplotlib est une bibliothèque du langage de programmation Python destinée à tracer et visualiser des données sous formes de graphiques en 2 ou 3 dimensions [100]. Cette bibliothèque permet de produire divers tracés par exemple des histogrammes, des fonctions de Rosenbrock, spirale logarithmique, graphiques d'erreurs, nuages de points etc.

TABLE 6.3 : Indice de validité du clustering Hard



Outils Packages	Description
Les outils et packages supplémentaires utilisés sur Linux Ubuntu 20.04 LTS installé sur WSL2 :	
 Stan	Stan [101] est une plate-forme pour la modélisation statistique, l'analyse de données et la prédiction dans les sciences sociales, biologiques et physiques, l'ingénierie et les affaires. Il permet de spécifier les fonctions de densité de log afin d'obtenir une inférence statistique bayésienne complète avec échantillonnage MCMC (NUTS, HMC), une inférence bayésienne approximative avec inférence variationnelle (ADVI), une estimation du maximum de vraisemblance pénalisée avec optimisation (L-BFGS). La bibliothèque mathématique de Stan fournit des fonctions de probabilité différentiables et une algèbre linéaire (C++ autodiff). Stan peut être utilisé avec les langages d'analyse de données les plus populaires (R, Python, shell, MATLAB, Julia, Stata) et fonctionne sur toutes les principales plates-formes (Linux, Mac, Windows) sauf la version 3 qui fonctionne sur Linux et Mac, c'est ce qui nous a poussée à utiliser Linux Ubuntu 20.04 LTS sur WSL2 . Dans l'implémentation nous avons utilisé Pystan 3.2.0 [102] qui est une interface Python pour Stan, un package pour l'inférence bayésienne.
 ArviZ	ArviZ [103] est un package Python pour l'analyse exploratoire des modèles bayésiens. Comprend des fonctions d'analyse postérieure, de stockage de données, de diagnostic d'échantillons, de vérification de modèle et de comparaison. Ce package de fournir des outils backend indépendants pour les diagnostics et les visualisations de l'inférence bayésienne en Python, en convertissant d'abord les données d'inférence en objets xarray [104].

TABLE 6.4 : Indice de validité du clustering Hard

6.3.2 Collecte et préparation des données

KDD Cup 2010 est une compétition d'exploration de données éducatives dans laquelle les participants sont chargés de prédire les performances des élèves aux problèmes algébriques en fonction des informations concernant les performances passées.

Algèbre I 2005-2006 est un jeu de données qui est fournit pour débiter et se familiarisé avec le format et le développement d'un modèle d'apprentissage.

6.3.3 IRT

6.3.4 Clustering

6.4 Conclusion

Conclusion Générale et Perspectives

Conclusion Générale

Bibliographie

- [1] O. Scheuer and B. M. McLaren, *Educational Data Mining*, pp. 1075–1079. Boston, MA : Springer US, 2012.
- [2] J. Han and M. Kamber, *Data Mining : Concepts and Techniques*. 01 2000.
- [3] C. Romero and S. Ventura, “Educational data mining : A survey from 1995 to 2005,” *Expert Systems with Applications*, vol. 33, pp. 135–146, 07 2007.
- [4] C. Buche, *Un système tutoriel intelligent et adaptatif pour l'apprentissage de compétences en environnement virtuel de formation*. Theses, Université de Bretagne occidentale - Brest, Nov. 2005.
- [5] C. Romero, S. Ventura, M. Pechenizkiy, and R. Baker, *Handbook of Educational Data Mining*. 10 2010.
- [6] R. Baker and K. Yacef, “The state of educational data mining in 2009 : A review and future visions,” *Journal of Educational Data Mining*, vol. 1, pp. 3–17, 01 2009.
- [7] S. Bendjebar, *Utilisation des Techniques de Data Mining pour la Modélisation des Tuteurs*. Theses, Université 8 mai 1945 Guelma, 2016.
- [8] L. Nguyen and P. Do, “Learner model in adaptive learning,” *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 45, pp. 396–401, 01 2008.
- [9] R. Winkels, “User modelling in help systems.,” vol. 438, pp. 184–193, 06 1990.
- [10] A. Paiva and J. Self, “Tagus — a user and learner modeling workbench,” *User Modeling and User-Adapted Interaction*, vol. 4, pp. 197–226, 09 1994.
- [11] S. Greer, “Psycho-oncology : Its aims, achievements and future tasks,” *Psycho-Oncology*, vol. 3, pp. 87 – 101, 07 1994.
- [12] P. Brusilovsky, “Student model centered architecture for intelligent learning environments,” 01 1994.
- [13] I. Goldstein and B. Roberts, “Nudge, a knowledge-based scheduling program,” *Proceedings of IJCAI-77*, 01 1977.
- [14] J. Elster, *The Multiple Self*. Cambridge University Press, 1987.
- [15] R. Nkambou, “Modélisation des connaissances de la matière dans un système tutoriel intelligent : modèles, outils et applications /,” 06 2021.
- [16] E. Ragnemalm, “Collaborative dialogue with a learning companion as a source of information on student reasoning.,” pp. 650–658, 01 1996.

- [17] P. Holt, S. Dubs, M. Jones, and J. Greer, "The state of student modelling" in student modelling : The key to individualized knowledge-based inst," 06 2021.
- [18] D. Fragne, "Proposition de l'architecture de l'agent gestionnaire du modèle de l'apprenant dans un système tuteur multi-agents en apprentissage de la lecture : contribution au projet amical," 12 2009.
- [19] J. Gobert, M. Pedro, J. Raziuddin, and R. Baker, "From log files to assessment metrics : Measuring students' science inquiry skills using educational data mining," *Journal of the Learning Sciences*, vol. 22, pp. 521–563, 10 2013.
- [20] E. Millán, T. Loboda, and J. L. P. de-la Cruz, "Bayesian networks for student model engineering," vol. 55, no. 4, pp. 1663–1683, 2010.
- [21] J. Collins, J. Greer, and S. Huang, "Adaptive assessment using granularity hierarchies and bayesian nets," 02 1970.
- [22] J. M. P. Tchétagni and R. Nkambou, "Hierarchical representation and evaluation of the student in an intelligent tutoring system," in *Intelligent Tutoring Systems* (S. A. Cerri, G. Gouardères, and F. Paraguaçu, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 708–717, Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [23] C. Carmona and R. Conejo, "A learner model in a distributed environment," in *Adaptive Hypermedia and Adaptive Web-Based Systems* (P. M. E. De Bra and W. Nejdl, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 353–359, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [24] Z. A. Pardos, N. T. Heffernan, B. Anderson, and C. L. Heffernan, "The effect of model granularity on student performance prediction using bayesian networks," in *User Modeling 2007* (C. Conati, K. McCoy, and G. Paliouras, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 435–439, Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [25] J. Reye, "Student modelling based on belief networks," *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, vol. 14, pp. 63–96, 2004. 1.
- [26] C. Carmona, E. Millán, J. L. Pérez-de-la Cruz, M. Trella, and R. Conejo, "Introducing prerequisite relations in a multi-layered bayesian student model," in *User Modeling 2005* (L. Ardissono, P. Brna, and A. Mitrovic, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 347–356, Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [27] I. Goldin, r. scheines, and e. silver, "Discovering prerequisite relationships among knowledge components," 01 2014.
- [28] K. Bollen, "Structural equations with latent variables, new york," *Wiley Interscience*, 01 1989.
- [29] R. Pelánek, T. Effenberger, M. Vaněk, V. Sassmann, and D. Gmiterko, "Measuring item similarity in introductory programming," in *Proceedings of the Fifth Annual ACM Conference on Learning at Scale*, pp. 1–4, 2018.
- [30] Wikipedia contributors, "knowledge : definition of knowledge in oxford dictionary (american english) (us)," 2004. Archived from the original on 14 July 2010.
- [31] B. S. Bloom *et al.*, "Taxonomy of educational objectives. vol. 1 : Cognitive domain," *New York : McKay*, vol. 20, no. 24, p. 1, 1956.

- [32] T. Nazaretsky, S. Hershkovitz, and G. Alexandron, “Kappa learning : A new method for measuring similarity between educational items using performance data,” *arXiv preprint arXiv :1812.08390*, 2018.
- [33] K. VanLehn, “The behavior of tutoring systems,” *International journal of artificial intelligence in education*, vol. 16, no. 3, pp. 227–265, 2006.
- [34] N. M. Chang, *Learning to discriminate and generalize through problem comparisons*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2006.
- [35] M. C. Desmarais, “Mapping question items to skills with non-negative matrix factorization,” *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, vol. 13, no. 2, pp. 30–36, 2012.
- [36] R. S. Baker, K. Yacef, *et al.*, “The state of educational data mining in 2009 : A review and future visions,” *Journal of educational data mining*, vol. 1, no. 1, pp. 3–17, 2009.
- [37] B. Sarwar, G. Karypis, J. Konstan, and J. Riedl, “Item-based collaborative filtering recommendation algorithms,” *Proceedings of ACM World Wide Web Conference*, vol. 1, 08 2001.
- [38] J. S. Breese, D. Heckerman, and C. Kadie, “Empirical analysis of predictive algorithms for collaborative filtering,” *arXiv preprint arXiv :1301.7363*, 2013.
- [39] Y. Koren and R. Bell, “Advances in collaborative filtering. recommender systems handbook, francesco ricci, lior rokach, bracha shapira, paul b. kantor editors, chapter 5,” 2011.
- [40] T. Barnes, “The q-matrix method : Mining student response data for knowledge,” in *American Association for Artificial Intelligence 2005 Educational Data Mining Workshop*, pp. 1–8, Pittsburgh, PA : AAAI Press, 2005.
- [41] S. Nithya, A. Srinivasan, M. Senthilkumar, *et al.*, “Calculating the user-item similarity using pearson’s and cosine correlation,” in *2017 International Conference on Trends in Electronics and Informatics (ICEI)*, pp. 1000–1004, IEEE, 2017.
- [42] R. J. Mislevy, “Evidence and inference in educational assessment,” *Psychometrika*, vol. 59, no. 4, pp. 439–483, 1994.
- [43] C. L. Azevedo, H. Bolfarine, and D. F. Andrade, “Bayesian inference for a skew-normal irt model under the centred parameterization,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 55, no. 1, pp. 353–365, 2011.
- [44] R. A. Fisher, “On the mathematical foundations of theoretical statistics,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 222, no. 594-604, pp. 309–368, 1922.
- [45] “Item response theory - wikipedia.”
- [46] Y. Noël, “Introduction aux modèles de réponse à l’item (mri),” Jan 2019.
- [47] A. Gelman and J. Hill, *Data Analysis Using Regression And Multilevel/Hierarchical Models*, vol. 3. 11 2006.

- [48] Z. Huang, "Extensions to the k-means algorithm for clustering large data sets with categorical values," *Data mining and knowledge discovery*, vol. 2, no. 3, pp. 283–304, 1998.
- [49] K. Sasirekha and P. Baby, "Agglomerative hierarchical clustering algorithm-a," *International Journal of Scientific and Research Publications*, vol. 83, p. 83, 2013.
- [50] M. Yang, "A survey of hierarchical clustering," *Mathl. Comput. Modelling*, vol. 18, no. 11, pp. 1–16, 1993.
- [51] S. Zhou, Z. Xu, and F. Liu, "Method for determining the optimal number of clusters based on agglomerative hierarchical clustering," *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, vol. 28, no. 12, pp. 3007–3017, 2016.
- [52] C. Zhong, D. Miao, and P. Fränti, "Minimum spanning tree based split-and-merge : A hierarchical clustering method," *Information Sciences*, vol. 181, no. 16, pp. 3397–3410, 2011.
- [53] U. Maulik and S. Bandyopadhyay, "Performance evaluation of some clustering algorithms and validity indices," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 24, no. 12, pp. 1650–1654, 2002.
- [54] V. Kumar, J. K. Chhabra, and D. Kumar, "Performance evaluation of distance metrics in the clustering algorithms," *INFOCOMP Journal of Computer Science*, vol. 13, no. 1, pp. 38–52, 2014.
- [55] A. K. Jain and R. C. Dubes, *Algorithms for clustering data*. Prentice-Hall, Inc., 1988.
- [56] T. Pang-Ning, M. Steinbach, and V. Kumar, "Introduction to data mining addison-wesley," 2005.
- [57] F. Murtagh and P. Contreras, "Algorithms for hierarchical clustering : an overview," *Wiley Interdisciplinary Reviews : Data Mining and Knowledge Discovery*, vol. 2, no. 1, pp. 86–97, 2012.
- [58] I. Gurrutxaga, I. Albisua, O. Arbelaiz, J. I. Martín, J. Muguerza, J. M. Pérez, and I. Perona, "Sep/cop : An efficient method to find the best partition in hierarchical clustering based on a new cluster validity index," *Pattern Recognition*, vol. 43, no. 10, pp. 3364–3373, 2010.
- [59] S. Wu and T. W. Chow, "Clustering of the self-organizing map using a clustering validity index based on inter-cluster and intra-cluster density," *Pattern Recognition*, vol. 37, no. 2, pp. 175–188, 2004.
- [60] L. Kaufman and P. Rousseeuw, *Finding Groups in Data : An Introduction To Cluster Analysis*. 01 1990.
- [61] A. W. Edwards and L. L. Cavalli-Sforza, "A method for cluster analysis," *Biometrics*, pp. 362–375, 1965.
- [62] M. Roux, "A comparative study of divisive and agglomerative hierarchical clustering algorithms," *Journal of Classification*, vol. 35, no. 2, pp. 345–366, 2018.

- [63] W. T. Williams and J. M. Lambert, "Multivariate methods in plant ecology : I. association-analysis in plant communities," *The Journal of Ecology*, pp. 83–101, 1959.
- [64] P. Macnaughton-Smith, W. Williams, M. Dale, and L. Mockett, "Dissimilarity analysis : a new technique of hierarchical sub-division," *Nature*, vol. 202, no. 4936, pp. 1034–1035, 1964.
- [65] L. Hubert, "Monotone invariant clustering procedures," *Psychometrika*, vol. 38, no. 1, pp. 47–62, 1973.
- [66] M. Roux, "Basic procedures in hierarchical cluster analysis," in *Applied multivariate analysis in SAR and environmental studies*, pp. 115–135, Springer, 1991.
- [67] M. Roux, "About divisive methods in hierarchical clustering," *Data Science and Its Applications*, pp. 101–106, 1995.
- [68] J.-G. Sun, J. Liu, and L.-Y. Zhao, "Clustering algorithms research," *Journal of software*, vol. 19, no. 1, pp. 48–61, 2008.
- [69] S. Na, L. Xumin, and G. Yong, "Research on k-means clustering algorithm : An improved k-means clustering algorithm," in *2010 Third International Symposium on intelligent information technology and security informatics*, pp. 63–67, Ieee, 2010.
- [70] A. Fahim, A. Salem, F. A. Torkey, and M. Ramadan, "An efficient enhanced k-means clustering algorithm," *Journal of Zhejiang University-Science A*, vol. 7, no. 10, pp. 1626–1633, 2006.
- [71] K. A. Nazeer and M. Sebastian, "Improving the accuracy and efficiency of the k-means clustering algorithm," in *Proceedings of the world congress on engineering*, vol. 1, pp. 1–3, Citeseer, 2009.
- [72] L. A. Zadeh, "Information and control," *Fuzzy sets*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [73] E. H. Ruspini, "A new approach to clustering," *Information and control*, vol. 15, no. 1, pp. 22–32, 1969.
- [74] D. J. Bora, D. Gupta, and A. Kumar, "A comparative study between fuzzy clustering algorithm and hard clustering algorithm," *arXiv preprint arXiv :1404.6059*, 2014.
- [75] A. Taherpour, A. Cheshmeh Sefidi, A. Bemani, and T. Hamule, "Application of fuzzy c-means algorithm for the estimation of asphaltene precipitation," *Petroleum Science and Technology*, vol. 36, no. 3, pp. 239–243, 2018.
- [76] R.A.Fisher, "iris," 2018.
- [77] M. R. Rezaee, B. P. Lelieveldt, and J. H. Reiber, "A new cluster validity index for the fuzzy c-mean," *Pattern recognition letters*, vol. 19, no. 3-4, pp. 237–246, 1998.
- [78] Y. Zhang, W. Wang, X. Zhang, and Y. Li, "A cluster validity index for fuzzy clustering," *Information Sciences*, vol. 178, no. 4, pp. 1205–1218, 2008.
- [79] J. C. Dunn, "Well-separated clusters and optimal fuzzy partitions," *Journal of cybernetics*, vol. 4, no. 1, pp. 95–104, 1974.

- [80] S. Saitta, B. Raphael, and I. F. C. Smith, “A comprehensive validity index for clustering,” *Intelligent Data Analysis*, vol. 12, pp. 529–548, 2008. 6.
- [81] T. Caliński and J. Harabasz, “A dendrite method for cluster analysis,” *Communications in Statistics-theory and Methods*, vol. 3, no. 1, pp. 1–27, 1974.
- [82] D. L. Davies and D. W. Bouldin, “A cluster separation measure,” *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, no. 2, pp. 224–227, 1979.
- [83] L. Kaufman and P. J. Rousseeuw, *Finding groups in data : an introduction to cluster analysis*, vol. 344. John Wiley & Sons, 2009.
- [84] J. C. Bezdek, “Numerical taxonomy with fuzzy sets,” *Journal of mathematical biology*, vol. 1, no. 1, pp. 57–71, 1974.
- [85] J. C. Bezdek, “Cluster validity with fuzzy sets,” 1973.
- [86] K.-L. Wu and M.-S. Yang, “A cluster validity index for fuzzy clustering,” *pattern recognition letters*, vol. 26, no. 9, pp. 1275–1291, 2005.
- [87] Y. Fukuyama, “A new method of choosing the number of clusters for the fuzzy c-mean method,” in *Proc. 5th Fuzzy Syst. Symp., 1989*, pp. 247–250, 1989.
- [88] X. L. Xie and G. Beni, “A validity measure for fuzzy clustering,” *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 13, no. 8, pp. 841–847, 1991.
- [89] Craigloewen-Msft, “Comparing wsl 1 and wsl 2.”
- [90] G. Van Rossum and F. L. Drake, *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA : CreateSpace, 2009.
- [91] “Python.” <https://pythonprogramminglanguage.com>. accessed : 09-July-2021.
- [92] “Anaconda software distribution,” 2020.
- [93] “Anaconda.” <https://www.anaconda.com/>. accessed : 09-July-2021.
- [94] “Conda.” <https://conda.io/en/latest/>. accessed : 09-July-2021.
- [95] T. Kluyver, B. Ragan-Kelley, F. Pérez, B. Granger, M. Bussonnier, J. Frederic, K. Kelley, J. Hamrick, J. Grout, S. Corlay, P. Ivanov, D. Avila, S. Abdalla, and C. Willing, “Jupyter notebooks – a publishing format for reproducible computational workflows,” in *Positioning and Power in Academic Publishing : Players, Agents and Agendas* (F. Loizides and B. Schmidt, eds.), pp. 87 – 90, IOS Press, 2016.
- [96] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, *et al.*, “Scikit-learn : Machine learning in python,” *Journal of machine learning research*, vol. 12, no. Oct, pp. 2825–2830, 2011.
- [97] W. McKinney *et al.*, “Data structures for statistical computing in python,” in *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, vol. 445, pp. 51–56, Austin, TX, 2010.

- [98] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. Fernández del Río, M. Wiebe, P. Peterson, P. Gérard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, C. Gohlke, and T. E. Oliphant, “Array programming with NumPy,” *Nature*, vol. 585, p. 357–362, 2020.
- [99] J. D. Hunter, “Matplotlib : A 2d graphics environment,” *Computing in science & engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007.
- [100] S. Tosi, *Matplotlib for Python Developers : Build Remarkable Publication Quality Plots the Easy Way*. From technologies to solutions, Packt Publishing, 2009.
- [101] “Stan documentation.” <https://mc-stan.org/users/documentation/>. accessed : 09-July-2021.
- [102] A. Riddell, A. Hartikainen, and M. Carter, “pystan (3.2.0).” PyPI, Mar. 2021.
- [103] R. Kumar, C. Carroll, A. Hartikainen, and O. Martin, “Arviz a unified library for exploratory analysis of bayesian models in python,” *Journal of Open Source Software*, vol. 4, no. 33, p. 1143, 2019.
- [104] “Exploratory analysis of bayesian models.” <https://arviz-devs.github.io/arviz/>. accessed : 09-July-2021.