

### Exercice 1

Soient  $E$  un ensemble et  $f$  une application de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  
telle que : si  $A$  et  $B$  sont deux parties disjointes de  $E$ ,  
Alors  $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$

1) Montrer que pour toutes parties quelconques  $A$  et  $B$ ,

$$A \cap B = A \setminus (A \cap B)$$

En deduire  $f(A \cap B)$  en fonction de  $f(A)$  et de  $f(A \cap B)$   
Que vaut  $f(\emptyset)$ ?

2) Montrer que  $A \cap B$ ,  $\overline{A \cap B}$  et  $A \cap B$  forment une  
partition de l'ensemble  $A \cup B$

3) Montrer pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,  $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$   
En deduire  $f(A \Delta B)$  en fonction de  $f(A)$  et de  $f(B)$

### Exercice 2

On note  $\bar{z}$  le complexe conjugué de  $z$  et on considère la  
fonction  $f$  définie par :  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $z \mapsto z + \bar{z}$

1) Déterminer l'image  $\text{Im } f$ . L'application est-elle surjective?

Est-elle injective?

2) On pose  $A = \{z \in \mathbb{C} / z^3 = 1\}$  et  $B = \{0\}$ .  
Déterminer  $f(A)$  et  $f^{-1}(B)$ .



### Exercice 4

On munit l'ensemble  $E = \mathbb{R}^2$  de la relation  $R$  définie par

$$(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0; \exists b > 0 / x' = ax \text{ et } y' = by.$$

- 1) Montrer que  $R$  est une relation d'équivalence.
- 2) Donner la classe d'équivalence des éléments

$$A = (1, 0); B = (0, -1) \text{ et } C = (1, 1).$$

- 3) Déterminer les classes d'équivalence de  $R$ .