Université Assane Seck de Ziguinchor
Département de mathématiques

Année universitaire : 2020-2021
L1-MPI

Examen d'algèbre 1 - Durée : 3H

Exercice 1. Donner la valeur de vérité des propositions suivantes en justifiant votre réponse :

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \ \frac{b}{a+1} = \frac{a}{b+1} \Longrightarrow a = b.$ (1pt.)
2. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. (1 pt.)
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \ n(n+1) = 2p.$ (1 pt.)

Exercice 2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cup B \neq E$.

1. Montrer que Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. (1,5 pt.)
2. On pose $F = A \cap B$ et $G = \overline{A \cup B}$. Montrer que F et G sont disjoints. (1 pt.)

Exercice 3. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $[-1; 1]$ par $f(x) = cos(\pi x)$

1. Montrer que f est surjective. L'application f est-elle bijective? (1,5 pt.)
2. Déterminer les images directes $f(\mathbb{N})$ et $f(2\mathbb{N})$. (1 pt.)
3. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. (1 pt.)

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (a, b) \Leftrightarrow x\left(a^2 + b^2 + 3\right) = a\left(x^2 + y^2 + 3\right)$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$. (2 pt.)
2. Soient $x, z \in \mathbb{R}^*$ tels que $x \neq z$, montrer que $\overline{(x, 0)} = \overline{(z, 0)} \Leftrightarrow xz = 3$. (1 pt.)
3. Soit $b \in \mathbb{R}$, donner la classe d'équivalence de $(0, b)$. (1 pt.)
4. Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b \neq 0$, donner la nature géométrique de la classe $\overline{(1, b)}$. (1 pt.)

Exercice 5. Dans $G = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on définit une loi de composition interne notée $\star$ par :

$$\forall (x, y) \in G : x \star y = xy + 2(x + y) + 2$$

1. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien. (2,5pt.)
2. Soit $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$. Montrer que $(H, \star)$ est sous-groupe de G. (1,5 pt.)
3. Montrer que $f : (G, \star) \to (\mathbb{R}, \times)$ définie par $f(x) = x + 2$ est un isomorphisme. (1 pt.)
4. On pose $x^{(\star n)}) = x \star x \star \ldots x \star x$ (n fois). Montrer que $x^{(\star n)}) = (x + 2)^n - 2$. (1 pt.)

UNIVERSITÉ ASSANE SECK

ANNÉE 2016/17

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

L1- MPI : CONTRÔLE D'ALGÈBRE I

DURÉE : 2H

Exercice 1. On considère deux propositions A et B

1. Démontrer l'équivalence suivante : (2pts)

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\rceil B \Longrightarrow \rceil A)$$

2. Écrire la contraposée et démontrer la proposition suivante : (2pts)

$$(x \neq y) \Longrightarrow [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$$

3. Démontrer par récurrence la propriété $P(n)$ suivante : (3pts)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 2. Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = [-n-1, n+1]$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Expliciter les ensembles suivants : (2pts)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad ; \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

2. Déterminer le complémentaire de A_0 dans A_2 et celui de A_n dans A_{n+2}. (2pts)

Exercice 3. On considère l'application $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ telle que $\varphi(k, n) = \dfrac{k}{n+1}$.

1. Déterminer l'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ par φ (2pts)
2. L'application φ est-elle injective? surjective? (2pts)

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^4 - y^4 = 4(x^2 - y^2)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. (3pts)
2. Déterminer la classe d'équivalence de tout réel a modulo $\mathcal{R}$. (3pts)

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE : 2019-20
L1-MPI

EXAMEN D'ALGÈBRE I

DUREE : 3H

Exercice 1. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On pose $A_m = \{3k + m \mid k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer A_0, A_1 et A_2 forment une partition de $\mathbb{N}$. (1.5pt)
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ par $\forall x,\ y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ 2x + y = 3k$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. (1,5pts)
   (b) Démontrer que $cl(0) = A_0$, $cl(1) = A_1$ et $cl(2) = A_2$. En déduire $\mathbb{N}/\mathcal{R}$. (1,5pts)
3. On définie la relation $\mathcal{S}$ par $\forall x,\ y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow \exists p,\ q \in \mathbb{N}^*,\ y = px^q$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre (1,5pts)
   (b) L'ordre est-il partiel ou total ? Justifier. (1pt)

Exercice 2. Dans l'ensemble $E =]-1;1[$, on définit une loi de composition notée $\star$ par :

$$\forall (a,b) \in E^2 : a \star b = \frac{a+b}{1+ab}$$

1. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe commutatif. (2,5pts)
2. Soit x un réel strictement positif fixé, on pose : $H_x = \left\{ \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.
   Montrer l'ensemble H_x est un sous-groupe de E. (2pt)
3. On considère f définie de $(\mathbb{R}, +) \to (E, \star)$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
   Montrer que l'application f est un isomorphisme de groupes. (1,5pt)

Exercice 3. On considère l'anneau produit $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni des lois additif et multiplicatif définies par $(a,b) + (x,y) = (a+x, b+y)$ et $(a,b).(x,y) = (ax, by)$.
On note 0_A l'élément neutre de l'addition et 1_A l'élément neutre de la multiplication.

1. Déterminer 0_A et l'ensemble $D(A)$ des diviseurs de 0. (1,5pts)
2. L'anneau A est-il intègre ? Est-il un corps ? (1pt)
3. Déterminer 1_A et l'ensemble $U(A)$ des unités de A. (1,5pts)
4. Montrer que $B = \{(x,y) \in A \mid x - y = 0\}$ est un sous-anneau de A. (1,5pt)
5. Montrer que $I = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de A. (1,5pt)

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR
UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE : 2018-19
L1-MPI
ALGÈBRE I

EXAMEN D'ALGÈBRE

DUREE : 3H

Exercice 1. Soient E un ensemble et f une application de E vers $\mathbb{R}$ telle que : si A et B sont deux parties disjointes de E, alors $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Montrer que pour toutes parties quelconques A et B de E, $A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$. En déduire $f(A \cap \overline{B})$ en fonction de $f(A)$ et de $f(A \cap B)$. Que vaut $f(\emptyset)$?
2. Montrer que $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $A \cap B$ forment une partition de l'ensemble $A \cup B$.
3. Montrer pour toutes parties A et B de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. En déduire $f(A \triangle B)$ en fonction de $f(A)$ et de $f(B)$.

Exercice 2. Soit la relation binaire $\mathcal{R}$ définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (a, b) \Leftrightarrow x\left(a^2 + b^2 + 3\right) = a\left(x^2 + y^2 + 3\right)$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $x, z \in \mathbb{R}^*$ tels que $x \neq z$, montrer que $\overline{(x, 0)} = \overline{(z, 0)} \Leftrightarrow xz = 3$.
3. Soit $(0, b) \in \mathbb{R}^2$, donner la classe d'équivalence $\overline{(0, b)}$ de $(0, b)$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$, donner la nature géométrique de $\overline{(a, b)}$.

Exercice 3. On définit une loi $\star$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $x \star y = x + y - xy$.

1. Démontrer que pour tous réels x et y, $(x \neq 1$ et $y \neq 1) \Longrightarrow x + y - xy \neq 1$. En déduire que $\star$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Monter que $\mathbb{R} - \{1\}$ muni de la loi $\star$ est un groupe abélien.
3. Montrer que $\star$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$ définie par $x \oplus y = x + y - 1$.
4. Montrer que l'application φ définie de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$ par $\varphi(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ est un isomorphisme de groupes et déterminer φ^{-1}.
5. On note $x^{(\star n)} = x \star x \star \cdots \star x$ (n fois). Montrer par récurrence que $x^{(\star n)} = 1 - (1 - x)^n$.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif non nul. On dit qu'un élément a de A est idempotent si $a^2 = a$. On dit que deux éléments a et b de A sont orthogonaux si $ab = 0$.

1. Montrer que si a et b sont idempotents alors ab et $a \star b = a + b - ab$ sont des éléments idempotents de A.
2. Montrer que si a et b sont idempotents et orthogonaux alors $a + b$ est un idempotent.
3. Montrer que si a et b sont idempotents alors $a(1 - b)$ et $b(1 - a)$ sont des éléments idempotents orthogonaux.
4. Déterminer les éléments idempotents orthogonaux de l'anneau usuel $\mathbb{R}$.

Bonne chance !

Mouhamed Moustapha Fall

UNIVERSITÉ ASSANE SECK ANNÉE 2016/17

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

L1- MPI : EXAMEN D'ALGÈBRE I

DURÉE : 3H

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}$ muni de la loi de composition interne $\star$ définie par :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x \star y = x + y - 1$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif. (3pts)
2. Soit l'application φ définie de $(\mathbb{R}, \star) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ par $\varphi(x) = x - 1$. Montrer que φ est un isomorphisme de groupes. (2pts)
3. Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, \star)$. (1pt)

Exercice 2. Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et une application $f : E \longrightarrow F$.

1. On considère $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble E par : (2pts)

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E et déterminer la classe d'équivalence $\overline{a}$ de tout réel $a \in E$.

2. Montrer que l'application Φ définie de $E/\mathcal{R}$ vers $f(E)$ par $\Phi(\overline{x}) = f(x)$ est une bijection. (2pts)
3. On suppose que f est injective et on considère la relation $\preceq$ définie sur E par

$$\forall x, y \in E,\ x \preceq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ou partiel ? (2pts)

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. (2pts)
2. Déterminer x tel que $x + \dfrac{1}{x} = 4$. Calculer $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ en fonction de n. (2pts)

Exercice 4. Soit σ une permutation de S_9 donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$a^n a^{-m} \times a^n$

1. Déterminer les orbites de σ et décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. En déduire la signature de σ. (2pts)
2. Déterminer l'ordre de σ et calculer σ^{2017} et σ^{-2017}. (2pts)
3. On pose $\theta = (\ 1,\ \ 5,\ \ 9\ ) \in S_9$, calculer $\theta \circ \sigma \circ \theta^{-1}$. (1pt)

$f(x) = y$

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE : 2019-20
L1-MPI

CONTRÔLE D'ALGÈBRE I

DUREE : 2H

Exercice 1. Soient P et Q deux propositions

1. Établir la table de vérité du connecteur $P \oplus Q$ définie par : (2pt)

$$P \oplus Q = (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

2. Montrer l'égalité $P \oplus Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. (2pt)

Exercice 2. Soit n et p deS entiers naturels

1. Démontrer par récurrence que $\forall n > 0$: (2pts)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

2. Démontrer en utilisant la disjonction des cas que : (2pt)

$$\forall n,\, p \in \mathbb{N},\ [\,(\,np\, est\, pair\,)\, ou\,(\,n^2 - p^2\, est\, un\, multiple\, de\, 8\,)]$$

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x(1+y^2) = y(1+x^2)$$

$y(1+z^2) = z(1+y^2)$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relations d'équivalence. (2pts)
2. Déterminer la classe d'équivalence de tout réel a modulo $\mathcal{R}$. (2pts)

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$g(n) = n(n+1)$$

1. Montrer que l'application g est injective. (2pts)
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est un entier pair. g est-elle surjective ? (2pts)

Exercice 5. Soient E un ensemble et f une application de E vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

1. Montrer que pour toutes parties quelconques A et B de E, (2pts)

$$A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B) \quad et \quad f(A \cap \overline{B}) = f(A) - f(A \cap B)$$

2. Montrer pour toutes parties A et B de E, (2pts)

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR
UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE : 2018-19
L1-MPI
ALGÈBRE I

DEVOIR D'ALGÈBRE

DUREE : 2H

Exercice 1. Soient P et Q deux assertions. On définit le connecteur logique noté $\oplus$ par :

$$P \oplus Q = (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

1. Établir la table de vérité de $P \oplus Q$.
2. Montrer par une méthode de votre choix l'égalité $P \oplus Q = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de montrer pour tout entier naturel n la proposition suivante :
"*Si* $(n^2 - 1)$ *n'est pas divisible par* 8, *alors* n *est pair*".

1. Écrire la proposition sous forme d'implication à l'aide des quantificateurs.
2. Montrer que la contraposée de la proposition précédente est :
$(\forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2k) \Longrightarrow (\exists m \in \mathbb{N}, n^2 - 1 = 8m)$
3. Prouver la contraposée par la disjonction des cas. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. Soient E un ensemble, A et B des parties de E. On définit les parties suivantes :

$$A \top B = \overline{A} \cup \overline{B} \quad et \quad A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

1. Montrer que $A \top B = \overline{A \cap B}$ et en déduire la fonction caractéristique de $A \top B$.
2. Montrer que $A \triangle B = \overline{A} \triangle \overline{B}$ et $A \triangle \overline{B} = \overline{A} \triangle B$.
3. Démontrer que $A \cap B = (A \top B) \top (A \top B)$ et $A \cup B = (A \top A) \top (B \top B)$.

Exercice 4. On note $\overline{z}$ le complexe conjugué de z et On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto z + \overline{z} \end{aligned}$$

1. Déterminer l'image $Im(f)$. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
2. On pose $A = \{z \in C | z^3 = 1\}$ et $B = \{0\}$. Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE : 2019-20
L1-MPI

EXAMEN D'ALGÈBRE I

DUREE : 3H

Exercice 1. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On pose $A_m = \{3k + m \mid k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer A_0, A_1 et A_2 forment une partition de $\mathbb{N}$. (1.5pt)
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ par $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{N},\ 2x + y = 3k$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. (1,5pts)
   (b) Démontrer que $cl(0) = A_0$, $cl(1) = A_1$ et $cl(2) = A_2$. En déduire $\mathbb{N}/\mathcal{R}$. (1,5pts)
3. On définie la relation $\mathcal{S}$ par $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{S}y \iff \exists p, q \in \mathbb{N}^*,\ y = px^q$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre (1,5pts)
   (b) L'ordre est-il partiel ou total ? Justifier. (1pt)

Exercice 2. Dans l'ensemble $E =]-1; 1[$, on définit une loi de composition notée $\star$ par :

$$\forall (a, b) \in E^2 : a \star b = \frac{a + b}{1 + ab}$$

1. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe commutatif. (2,5pts)
2. Soit x un réel strictement positif fixé, on pose : $H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.
   Montrer l'ensemble H_x est un sous-groupe de E. (2pt)
3. On considère f définie de $(\mathbb{R}, +) \to (E, \star)$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
   Montrer que l'application f est un isomorphisme de groupes. (1,5pt)

Exercice 3. On considère l'anneau produit $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni des lois additif et multiplicatif définies par $(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$ et $(a, b).(x, y) = (ax, by)$.
On note 0_A l'élément neutre de l'addition et 1_A l'élément neutre de la multiplication.

1. Déterminer 0_A et l'ensemble $D(A)$ des diviseurs de 0. (1,5pts)
2. L'anneau A est-il intègre ? Est-il un corps ? (1pt)
3. Déterminer 1_A et l'ensemble $U(A)$ des unités de A. (1,5pts)
4. Montrer que $B = \{(x, y) \in A \mid x - y = 0\}$ est un sous-anneau de A. (1,5pt)
5. Montrer que $I = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de A. (1,5pt)