TD Tutorat D'Algèbre 1 — Drop Kaff

Exercice 1

Dans l'ensemble $E =]-1, 1[$, on defini une loi de composition notée $*$ par : $\forall (a,b) \in E^2 : a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

1) Montrer que $(E; *)$ est un groupe commutatif.

2) Soit x un réel strictement positif fixé, on pose $H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$

Montrer l'ensemble H_x est un sous groupe de E

3) On considere f defini par de $(\mathbb{R}, +)$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Montrer que l'application f est un isomorphisme de groupe

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une relation binaire R definie par pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y) R (a,b) \iff x(a^2+b^2+3) = a(x^2+y^2+3).$$

1) Montrer que R est une relation d'equivalence sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soient $x, z \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq z$, Montrer que $\overline{(x,0)} = \overline{(z,0)} \iff xz = 3$.

3) Soit $b \in \mathbb{R}$, donner la classe d'equivalence de $(0,b)$.

4) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b \neq 0$ donner la nature geometrique de la classe $\overline{(1,b)}$

Exercice 3

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
On note $h = g \circ f$ la composée.

1) Montrer que si g est injective et f est injective alors $g \circ f$ est injective.
2) Montrer que si g est surjective et f est surjective alors $g \circ f$ est surjective.
3) Montrer que si g et f sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Exercice 4

Dans $G = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on définit une loi de composition interne notée $*$ par : $\forall (x, y) \in G : x * y = xy + 2(x+y) + 2$

1) Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.
2) Soit $H = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -2\}$. Montrer que $(H ; *)$ est un sous-groupe de G.
3) Montrer que $f : (G ; *) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\} ; \times)$ définie par $f(x) = x + 2$ est un isomorphisme.
4) On pose $x^{(*n)} = x * x * x * \ldots * x * x$ (n fois)

Montrer que $x^{(*n)} = (x+2)^n - 2$.

Diop Koff.