Tutorat Algèbre | Dip. K off |

Exercice 1

Soient E un ensemble et f une application de E vers $\mathbb{R}$ telle que : si A et B sont deux ~~à deux~~ parties disjointes de E, alors $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$

1) Montrer que pour toutes parties quelconques A et B,

$A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$.

En déduire $f(A \cap \overline{B})$ en fonction de $f(A)$ et de $f(A \cap B)$

. Que vaut $f(\emptyset)$?

2) Montrer ~~pour~~ $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $A \cap B$ forment une partition de l'ensemble $A \cup B$

3) Montrer pour toutes parties A et B de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

En déduire $f(A \Delta B)$ ~~en~~ en fonction de $f(A)$ et de $f(B)$

Exercice 2

On note $\overline{z}$ le complexe conjugué de z et on considère la fonction f définie par : $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longrightarrow z + \overline{z}$

1) Déterminer l'image $\mathrm{Im} f$. L'application est-elle ~~Surj~~ Surjective ?

Est-elle injective ?

2) On pose $A = \{ z \in \mathbb{C} / z^3 = 1 \}$ et $B = \{0\}$.

Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

CamScanner

Exercice 3

Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$g(n) = n(n+1)$$

1) Montrer que l'application g est injective.

2) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est un entier pair. g est-elle surjective?

Exercice 4

On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation R définie par

$$(x, y) R (x', y') \iff \exists a > 0 ; \exists b > 0 \,/\, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

2) Donner la classe d'équivalence des éléments

$A = (1, 0)$; $B = (0, -1)$ et $C = (1, 1)$.

3) Déterminer les classes d'équivalence de R.

Diop Koff

CamScanner