UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Tutorat organisé par l'ESPACE MATHS

Tutorat d'Algèbre 1 MPI

Élément de logique et méthodes de raisonnement

Séance du 24 Juillet 2022

Exercice 1

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ 2x + y > 3.$
2. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x = 0 \vee x \in]2, 4]).$
4. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ tel que : $|U_n| \leq M$.

Exercice 2

Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions en proposant une preuve faisant intervenir les quantificateurs :

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 3

Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0.$
2. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0.$
4. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0.$
5. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R} : y^2 > x.$
6. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0$ ou $2x + y = 0).$
7. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0$ et $2x + y = 0).$

Exercice 4

Par l'absurde montrer que :

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n^2$ pair $\Rightarrow n$ est pair.

Exercice 5

Par contraposée, montrer que :

1. Si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair.
2. $(\forall\ \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 6

Par récurrence, montrer que :

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}^* :\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.