Rapport du Projet de fiabilité

dans le cadre du diplôme d'ingénieur statisticien parcours Ingénierie Statistique et Data Science

Mouhamed BA
Abdoulaye Koroko
Sakaria Diarrassouba

Sorbonne Université
Institut de Statistique de l'Université de Paris

Professeur : MR Emmanuel Remy

Mars 2020

Sommaire

1 Contexte

Les accidents industrielles dus à l'inondation font l'objet de nombreuses études et analyses. L'une de ces études concerne la construction d'un système d'endiguement pour limiter les conséquences dommageables des inondations susceptibles d'affecter le cite industriel. La faisabilité de cette étude se nécessitera trois approches afin de minimiser le risque de surverse dans le cas de notre analyse:

- Détermination de la hauteur de la digue à partir d'une base de données historiques
- Utilisation d'un modèle hydraulique afin de proposer une hauteur optimale de la digue de protection
- Détermination de la hauteur optimale de la digue à partir d'un modèle économique

Examinons d'abord la première approche

2 Première approche: Détermination de la hauteur de la Digue à partir des relevés de mesure historiques

L'objectif de cette première partie consistera a estimer la hauteur de la digue h_d à partir d'une base d'enregistrement historique qui contient 149 années de 1849 à 1997, le Débit du cours d'eau et la hauteur du cours d'eau.

2.1 Visualisation des relevés de mesures historique

	Année <int>	Débit <int>	hauteur <dbl>
1	1849	3854	NA
2	1850	1256	4.0
3	1851	1649	4.5
4	1852	1605	4.3
5	1853	341	1.7
6	1854	1149	3.4

```
     Année          Débit          hauteur
 Min.   :1849   Min.   : 122   Min.   :1.000
 1st Qu.:1886   1st Qu.: 800   1st Qu.:3.100
 Median :1923   Median :1256   Median :3.900
 Mean   :1923   Mean   :1335   Mean   :3.897
 3rd Qu.:1960   3rd Qu.:1695   3rd Qu.:4.750
 Max.   :1997   Max.   :3854   Max.   :7.200
                               NA's   :26
```

Figure 1: visualisation et résume des données historique

La base de données historiques contient 26 données manquantes pour la variable hauteur. Afin de mener une quelconque étude, nous commençons par imputer les donner manquantes en utilisant **la méthode des plus proches voisins : KNN**. Cette complétion par le k plus proches voisins consiste à exécuter l'algorithme si dessous qui modélise et prévoit les données manquantes.

Algorithme des k plus proches voisins KNN

- Choix d'un entier k : $1 < k < n$.
- Calculer les distances $d(Y_j, Y_i), \quad i \in \{1, ..., n\}$
- Retenir les k observations $Y_{(i1)}, ..., Y_{(ik)}$ pour lesquelles ces distances sont les plus petites.
- Affecter aux valeurs manquantes la moyenne des valeurs des k voisins

Cette méthode nécessite le choix du paramètre k par optimisation d'un critère. De plus, la notion de distance entre les individus doit être choisie avec précaution, dans notre cas on considère la distance Euclidienne ou de Mahalanobis.

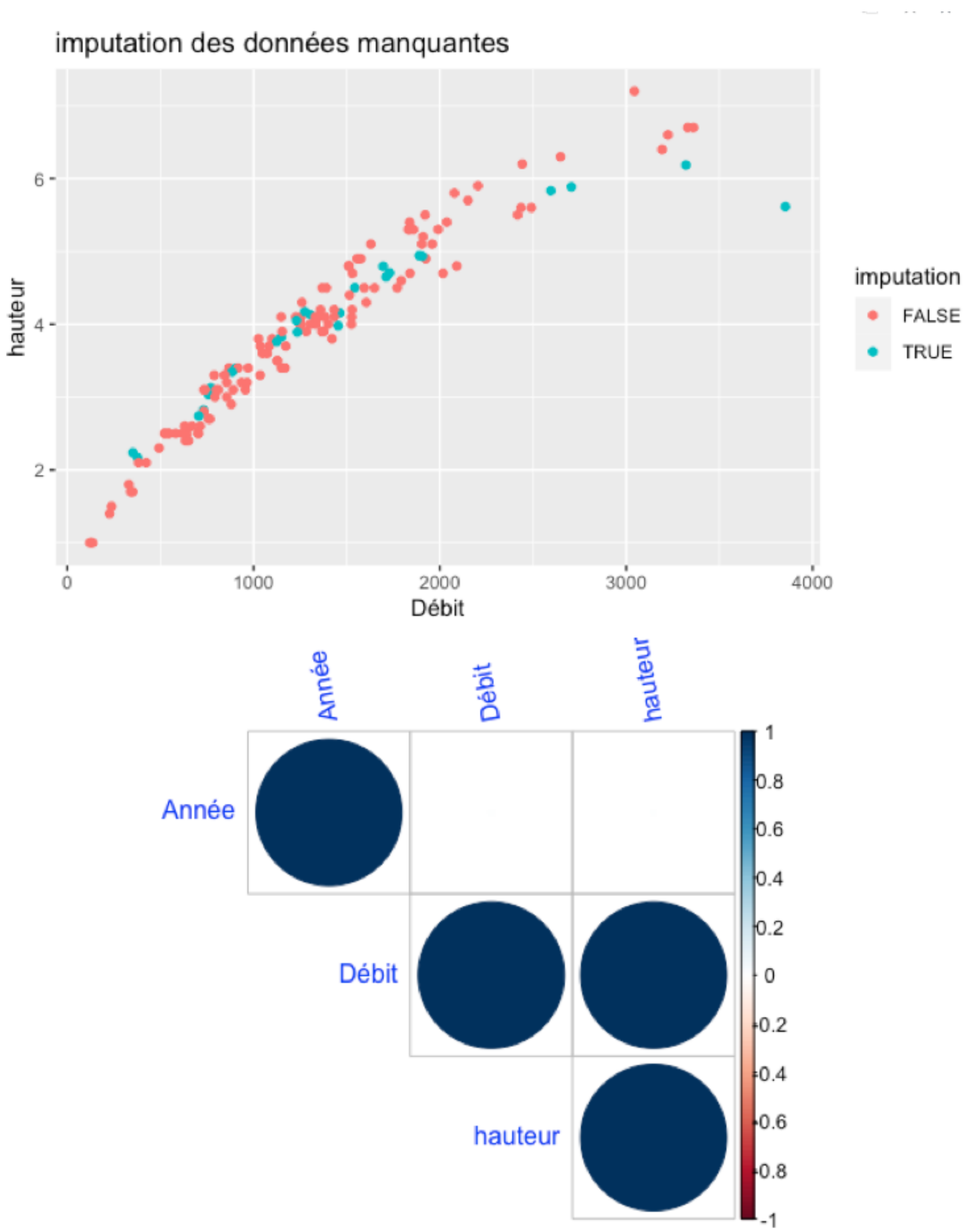

Figure 2: corrélation entre les variables Débit et hauteur

Des deux graphes ci-dessus, on remarque qu'il existe bien une forte relation de linéarité entre les variables Débit et hauteur. on pourrait dire que plus le débit du cours d'eau est important, plus la hauteur l'est aussi. Par conséquent, on a une forte corrélation des deux variables.

2.2 La distribution de l'échantillon "hauteur"

Concernant la distribution de notre échantillon, utilisons les méthodes: l'histogramme, fonction de répartition, QQ plot, approximation de densité

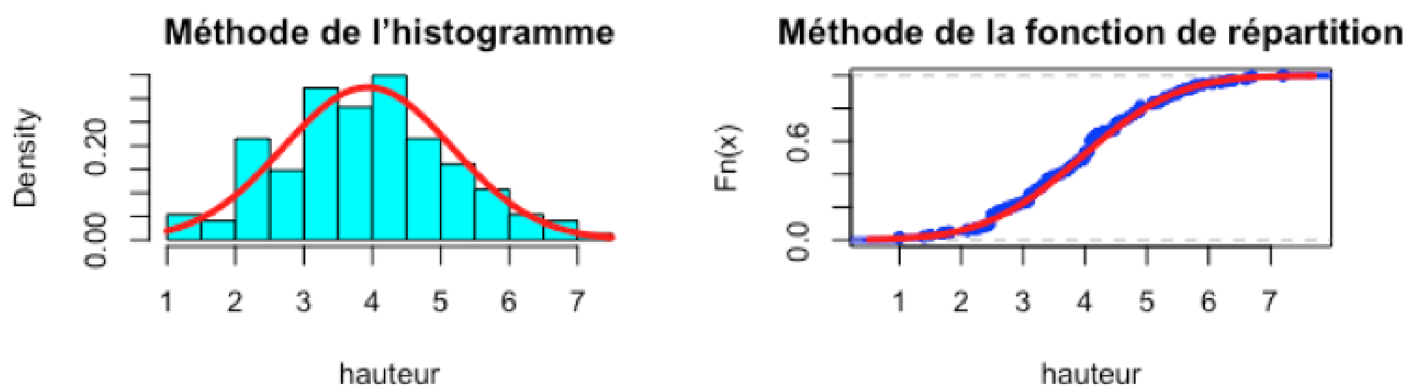

Figure 3: Méthode d'estimation de la distribution

- L'histogramme de la hauteur H est symétrique
- la fonction de répartition de H coïncide avec celle de loi normale

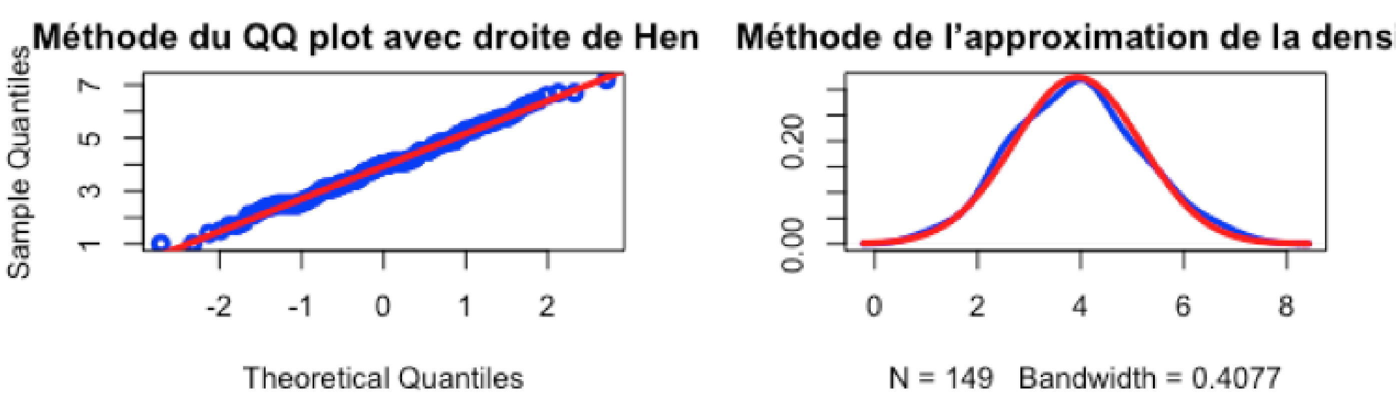

Figure 4: Méthode d'estimation de la distribution

- Tous points du qqnorm sont alignés sur la droite de Henry
- La densité de la hauteur H approxime mieux la distribution normale

Les différences observées par ces méthodes laissent penser que notre échantillon la hauteur est distribué normalement.

Ainsi, effectuons des tests de normalités de notre échantillon pour s'assurer de ce résultat

Test Anderson Darling et Shapiro-Wilk

Effectuons ces deux tests statistiques pour confirmer que la distribution de notre échantillon "hauteur" est belle et bien normale.

H0 : l'échantillon hauteur suit une loi normale . contre **H1 :l'échantillon ne suit pas une loi normale.**

```
        Anderson-Darling normality test

data:  foret$hauteur
A = 0.31563, p-value = 0.5386


        Shapiro-Wilk normality test

data:  foret$hauteur
W = 0.99318, p-value = 0.7039
```

Les résultats issus des deux tests, renvoient une p-value non significative c'est-à-dire p-value > 0.05, donc la hauteur H suit une loi normale

2.3 Détermination de la hauteur de la digue h_d

Déterminer h_d tel que:

$$\min_{h_d} \mathbb{P}(H - h_d \geq 0) = \alpha$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(H - h_d \geq 0) & = & \alpha \\ \Rightarrow \mathbb{P}(H \geq h_d) & = & \alpha \\ \Rightarrow 1 - F_H(h_d) & = & \alpha \\ \text{Donc} \quad h_d & = & q_{1-\alpha}(H) \end{array}$$

Avec $q_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi normale

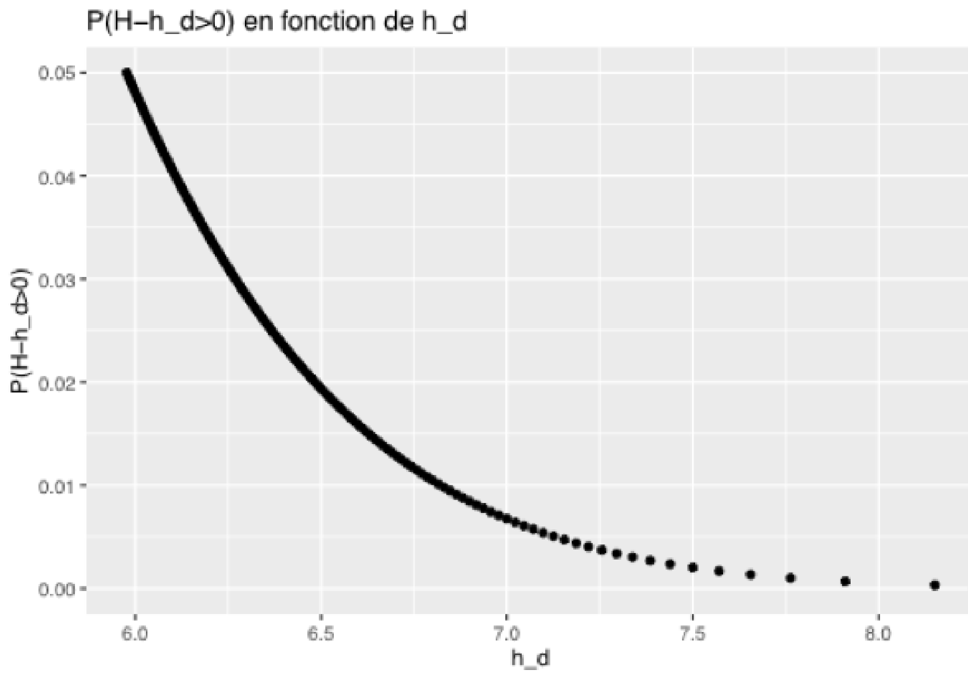

Figure 5: minimisation du risque en fonction de la hauteur

Eu égard des études menées précédemment, il ressort une variation du débit d'eau au cours des 149 années. Il est par moment en crue lorsqu'il subit une augmentation temporaire due aux précipitations intenses ou fonte des neiges par conséquent une montée plus ou moins rapide de la hauteur d'eau. Par opposé l'étiage provoqué par une augmentation des températures ou une diminution des précipitations entraîne une baisse du débit où la hauteur du cours d'eau est la plus basse.

Ainsi, l'observation de la hauteur d'eau permet d'estimer le débit du cours d'eau vis versa. Cette surveillance permet de mieux comprendre le fonctionnement du cours d'eau et apporte les éléments de connaissance nécessaires à la gestion des risques de surverse: lorsque le niveau des eaux dépasse le niveau de la digue.

Afin de faire face au risque de surverse, nous avons chercher à dimensionner la hauteur de la dique h_d de sorte à minimiser le risque de débordement

Selon le graphe de la minimisation du risque d'inondation $\min\{P(H - h_d \geq 0) = \alpha\}$ à partir d'une hauteur $h_d \geq 7.75\,m$, le risque minimale α de surverse est inférieur 0.125% qui semble être raisonnable. Au cours de l'année 1994,une forte précipitation a augmenté le niveau du cours d'eau à $7.2\,m$ selon notre la base de données historiques. C'est ainsi, en cas de surverse préventive, on propose une digue de **hauteur $h_d \simeq 8.25\,m$ soit un risque minimale d'environ 0.01%pour éviter une quelconque défaillance.**

3 Deuxième approche: Le modèle Hydraulique

3.1 Contexte

Dans cette partie, nous allons **estimer** une hauteur optimale h_d de la digue à partir d'un modèle hydraulique mise en place qui donne un ordre de grandeur de la hauteur maximale de la crue H à partir des données sur le tronçon du cours d'eau. Cette hauteur est donnée par :

$$H = \left(\frac{Q}{K_s \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}} B} \right)^{\frac{3}{5}}$$

Dans cette formulation, des sources d'incertitudes de plusieurs natures provoquent un aléa sur le débit Q. Ce qui à son tour provoque la modification de certaines grandeurs physiques du cours d'eau (les côtes du fond du cours d'eau en amont et en aval Z_m et Z_v et le coefficient de frottement du lit du cours d'eau K_s). Les autres grandeurs sont considérées constantes. Toutes ces grandeurs aléatoires suivent une certaine loi connu, ce qui nous permettra dans l'étude de créer des échantillons de ces variables aléatoires et de faire des analyses.

3.2 Estimation de la hauteur de la digue

Pour estimer une hauteur h_d de la digue, on va minimiser le "risque" de surverse, c'est-à-dire, minimiser la probabilité que S soit positive. Ce qui se traduit par:

$$\begin{aligned} h_d &= \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{P}(S > 0) \\ &= \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{P}(Z_c - Z_d > 0) \\ &= \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{P}(\underbrace{Z_v + H - Z_b}_{W} > h) \\ &= \underset{h}{\text{argmin}}\ \mathbb{P}(W > h) \end{aligned}$$

La loi de W ne pouvant pas être estimée par des méthodes classiques(histogramme, qqlot, tests statistiques), donc on ne peut pas se servir de la fonction de répartition de W pour déterminer la hauteur h_d de la digue. Ce qu'on peut faire, c'est d'utiliser un échantillon de W et de faire des études avec celle-ci.
Pour minimiser le risque de surverse, c'est-à-dire le risque que la hauteur d'eau maximale H

dépasse la digue ($H > h_b + h_d$) avec h_b la hauteur de la berge (représenté dans la figure), on peut appliquer l'algorithme suivant:
1. : On fait une réalisation de la variable aléatoire H à partir des variables aléatoires Q, K_s, Z_m, Z_v et des valeurs de B, L et Z_b
2. : En initialisant la hauteur h_d à zéro, on compare la valeur de $H + Z_v$ simulée avec celui de Z_d:
3. : Si $H + Z_v > Z_d$ (en cas de surverse) on construit une nouvelle digue en mettant à jour l'ancienne $h_d = (H + Z_v) - Z_d$ et la nouvelle côte de la digue $Z_d = Z_d + h_d$ qui va éviter le risque de surverse sera $Z_b = Z_b + h_d$
4. : On répète ce procédure n fois. Au final le h_d trouvé correspond ainsi à une hauteur optimale qui minimisera le risque de surverse.

```
def une_hauteur(n):
    Zb=55.5
    hd=0 #Initialisation de la hauteur de la digue
    Zd=Zb+hd #La côte initiale de la digue
    i=0
    while (i<n):
        Q=np.random.gumbel(1013,558 , 1)
        Ks= np.random.normal(30,7.5 ,1)
        Zv=np.random.triangular(49, 50, 51, 1)
        Zm=np.random.triangular(54, 55, 56, 1)
        H=(Q/(Ks*np.sqrt((Zm-Zv)/L)*B))**0.6
        if(H+Zv>Zd):
            hd=(H+Zv)-Zd # Mise à jour de la hauteur de la digue
            Zd=Zd+hd   # Mise à  jour de la côte de la digue
        i=i+1
    return hd
```

Figure 6: Code de construction d'une hauteur optimale

Remarques
- Cet algorithme a une forme temporelle, c'est-à-dire que la nouvelle hauteur de la digue h_d est mise à jour selon la valeur prise par la dernière hauteur maximale de l'eau H (on construit une nouvelle digue si la hauteur de la dernière crue d'eau dépasse la hauteur de berge construite).
- L'aléa de H qui est créé par les autres variables aléatoire fait qu'on ne tombe pas sur les mêmes valeurs de h_d quand on simule plusieurs fois l'algorithme. Pour remédier à ça et pour choisir une hauteur h_d optimale, on simule plusieurs fois l'algorithme (200 fois au moins) et on choisit le h_d correspondant à la médiane des autres hauteurs trouvées (voir `Figure 6`).
- Il est évident que plus la taille de l'échantillon de H utilisée pour construire la hauteur h_d est grande, grande sera la hauteur optimale h_d. En effet, plus on fait d'essais pour voir si on va dépasser la berge, plus la probabilité que ça arrive devient élevé. Dans notre cas présent, n'ayant pas de contrainte sur le nombre de simulation possible, on privilégie les essaies en grand nombre qui ont pour but la réalisation de toutes les possibilités de crue qu'on peut avoir. Ainsi on peut se fixer un **n=10 000** essais, ce qui serait judicieux vu les sources d'incertitudes des entrées du modèle hydraulique.

```
def hauteur_opt(n):
    Liste=[]
    for k in range(200):
        Liste.append(float(une_hauteur(n)))

    return(np.median(Liste))
for i in range(10):
    print(hauteur_opt(10000))
```

```
3.4741467611086208
3.4951359282183425
3.2493326908055096
3.4939260392029112
3.456116699306378
3.787828115951882
3.797901332162855
3.406136183216958
3.3108011723779533
3.7608336700116105
```

Figure 7: Valeurs de h_d sur 10 tests

Au vu des résultats de l'algorithme on peut prendre h_d=**3.8m** comme valeur optimale de hauteur de la digue. Ce qui est pour 10.000 simulations d'averse la meilleur valeur pour minimiser au mieux le risque de surverse.

3.3 Comparaison des deux hauteurs trouvées

Pour la première étude, il était question de trouver une hauteur optimale de la digue à partir des données recensées sur le débit (Q) et la hauteur (H) de crue. A partir d'une partie complète des données et de la complétion des parties manquantes, on a établit une méthode permettant de trouver une hauteur de digue $h_d = 8.5m$. L'avantage de cette étude est qu'on s'est servi de vraies données pour estimer la hauteur de la digue mais l'inconvénient est qu'on était limité en données contrairement à la deuxième étude où on avait le choix de simuler beaucoup de données à partir d'un modèle hydraulique d'estimation de H et à l'identification des incertitudes des entrées du modèle qui sont caractérisées par des variables aléatoires bien justifiées (loi de Gumbel par exemple qui est utilisée en hydrologie pour estimer les valeurs extrêmes de phénomènes)
La première et la deuxième étude ayant des avantages et des inconvénients distinctes (les avantages de l'un sont les inconvénients de l'autre et vice-versa), cela peut expliquer les résultats différents qu'on a trouvé quand on a estimé la hauteur optimale de la digue pour les deux approches.

4 Troisième approche : le modèle économique

4.1 Contexte

Une solution simple au problème du projet consisterait à prendre une hauteur de la digue h_d le plus grand possible afin d'éviter une surverse peu importe la hauteur maximale d'eau H. Cela éviterait évidement un quelconque coût lié au dommage du site par une surverse. Cependant les prix de construction et de maintenance de la digue étant croissants en fonction de sa hauteur h_d, une valeur très grande de h_d minimisera le coût lié au dommage du site mais augmentera le prix d'investissement sur la digue. Il faut donc trouver un compromis c'est-à-dire trouver la hauteur h_d qui minimisera le coût total(coût de dommage du site lié à la surverse + coût de construction et de maintenance de la digue). Ainsi on cherche à résoudre le problème d'optimisation:

$$\underset{h_d}{\operatorname{argmin}}\, C_{c,\text{moyennée}} = \underset{h_d}{\operatorname{argmin}}\, \frac{C_c(T)}{T} \tag{1}$$

avec $C_c(T)$ qui représente le coût total sur la période d'étude T du problème et $C_{c,moyennée}$ sa moyenne.

4.2 Résolution du problème d'optimisation

$C_c(T)$ dépend de variables aléatoires donc il s'agit d'un problème d'optimisation stochastique. Le problème (1) dévient alors:

$$\min_{h_d} J\left(h_d\right) = \min_{h_d} \mathbb{E}\left\{\frac{C_i\left(h_d\right)}{T} + C_m\left(h_d\right) + \frac{1}{T}\sum_j C_s\left(S_j\right) + C_g\left(S_j, h_d\right)\right\} \tag{2}$$

La partie aléatoire est portée par $S_j = Z_v + H - h_d - Z_b$, nous faisons l'hypothèse que les problèmes sont stationnaires et donc $\mathbb{E}\left\{C_s\left(S_j\right) + C_h\left(S_j, h_d\right)\right\} = \mathbb{E}\left\{C_s\left(S_i\right) + C_h\left(S_i, h_d\right)\right\}, \forall i, j$. Le problème (2) peut alors se réécrire comme suit:

$$\min_{h_d} J\left(h_d\right) = \min_{h_d} \mathbb{E}\left\{\frac{C_i\left(h_d\right)}{T} + C_m\left(h_d\right) + C_s(S) + C_g\left(S, h_d\right)\right\} \tag{3}$$

Maintenant, S dépend de 4 variables aléatoires définies grâce à leurs densités comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q \le x) &= \int_{-\infty}^{x} f_Q(q)dq \\
\mathbb{P}\left(K_s \le x\right) &= \int_{-\infty}^{x} f_{K_s}(k)dk \\
\mathbb{P}\left(Z_v \le x\right) &= \int_{-\infty}^{x} f_{z_v}(z)dz \\
\mathbb{P}\left(Z_m \le x\right) &= \int_{-\infty}^{x} f_{z_m}(z)dz
\end{aligned}$$

Dans ces conditions l'équation (4) devient:

$$\begin{aligned}
\min_{h_d} J\left(h_d\right) &= \min_{h_d}\{\int \frac{C_i\left(h_d\right)}{T} + C_m\left(h_d\right) + C_s(S) + C_g\left(S, h_d\right) d\mathbb{P}\left(K_s, z_v, z_m, Q\right)\} \\
&= \min_{h_d}\{\frac{C_i\left(h_d\right)}{T} + C_m\left(h_d\right) + \int C_s(S) + C_g\left(S, h_d\right) d\mathbb{P}\left(K_s, z_v, z_m, Q\right)\}
\end{aligned}$$

En supposant les variables aléatoires Q, K_s, z_v, z_m indépendantes on obtient la formulation suivante:

$$\min_{h_d} J\left(h_d\right) = \frac{C_i\left(h_d\right)}{T} + C_m\left(h_d\right) + \iiint \int \left(C_s(S) + C_g\left(S, h_d\right)\right) f_Q(q) f_{K_s}(k) f_{z_v}\left(z_v\right) f_{z_m}\left(z_m\right) dq \cdot dk \cdot dz_v \cdot dz_m$$

A ce point on connaît explicitement l'ensemble des fonctions de densités (leurs lois se trouvent dans le sujet). Reste à trouver les expressions des coûts $C_i(h_d)$, $C_m(h_d)$, $C_s(S)$ et $C_g(S, h_d)$ pour évaluer $J(h_d)$. Pour trouver ces expressions, étant donné que nous avons des données, nous décidons de faire une approximation. Pour le calcul de la quadruple intégrale, nous remplaçons S par son expression $S = z_v + H - h_d - z_b$ avec $H = (\frac{q}{k\sqrt{\frac{z_m - z_v}{L}}B})^{\frac{3}{5}}$. La difficulté de minimisation de $J(h_d)$ est le calcul de la quadruple intégrale. En effet une fois on aura évalué $J(h_d)$, pour résoudre le problème, nous pourrons tracer $J(h_d)$ en fonction de h_d et prendre le h_d qui le minimise ou encore nous pourrons utiliser les algorithmes de recherche linéaire comme l'algorithme de section dorée par exemple. Par ailleurs de bons algorithme de minimisation existent dans la librairie `scipy` de `python`.
Le calcul de $J_d(h_d)$ étant complexe avec la quadruple intégrale, nous décidons d'utiliser les méthodes de monte-carlo pour faire une approximation de cette quadruple intégrale.

4.3 Approximation des différentes fonctions

4.3.1 Approximation de l'expression du coût d'investissement $C_i(h_d)$

Une représentation de C_i en fonction de h_d nous a permis de constater une relation affine entre C_i et h_d. Ainsi nous décidons d'approcher $C_i(h_d)$ par :

$$C_i(h_d) = \beta_0 + \beta_1 h_d + \varepsilon$$

β_0 et β_1 sont estimés par la méthode des moindres carrées (régression linéaire simple). Après estimation nous obtenons le résulat ci dessous.

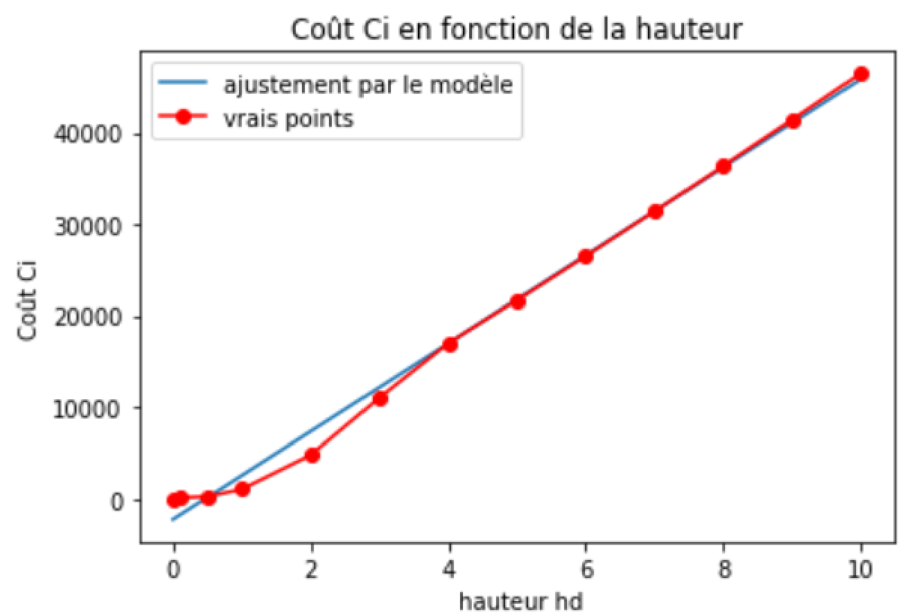

Figure 8: Approximation de C_i par régression linéaire

Nous constatons un bon ajustement par le modèle. Notre approximation est donc valide.

4.3.2 Approximation de l'expression du coût de maintenance annuelle de la digue $C_m(h_d)$

D'après le document, le coût de maintenance C_m est proportionnel au coût d'investissement C_i de 1%. Ainsi:

$$C_m(h_d) = 0.01C_i(h_d) = 0.01\hat{\beta}_0 + 0.01\hat{\beta}_1 h_d$$

4.3.3 Approximation de l'expression du coût de surverse $C_s(S)$

Comme pour le coût d'investissement C_i, nous décidons d'approcher $C_s(S)$ par une expression affine:

$$C_s(S) = \lambda_0 + \lambda_1 S + \varepsilon$$

Nous obtenons le résultat de la figure 9 après estimation des paramètres du modèle.

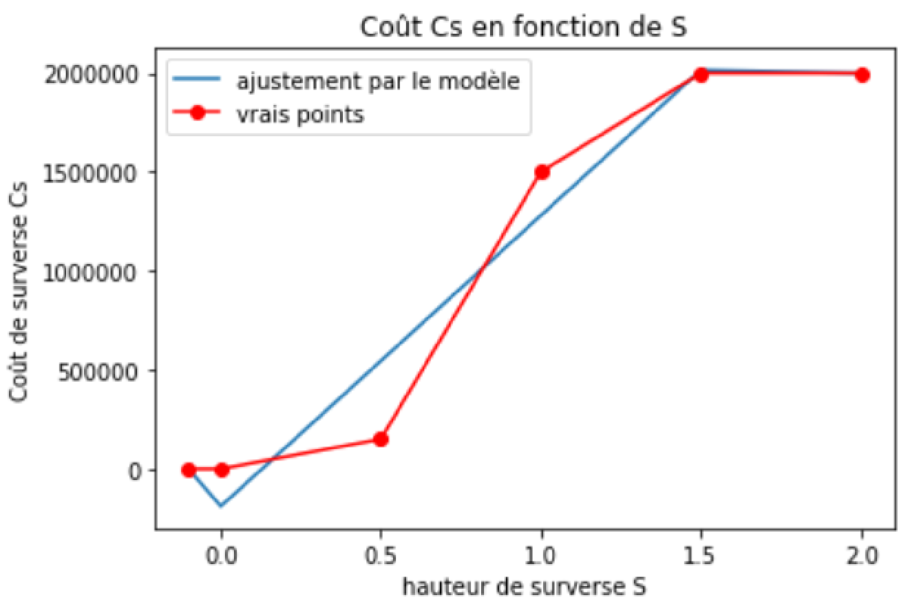

Figure 9: Approximation de C_s par régression linéaire

Nous constatons que la vrai courbe (courbe rouge) comprend 3 parties: deux parties constantes et une partie qui peut être approchée par une droite. Ainsi nous retenons comme expression finale de C_s:

$$C_s(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} & S \leq 0 \\ \hat{\lambda_0} + \hat{\lambda_1} S & \text{si} & S \in [0, 2] \\ 2000000 & \text{pour} & S > 2 \end{cases}$$

N'ayant pas suffisamment de données pour une régression linéaire, nous avons tout d'abord essayé une interpolation polynomiale que nous n'avons pas retenue car elle ajustait très mal les données.

4.3.4 Approximation de l'expression du coût de dommage $C_g(S, h_d)$

C_s est fonction de S et de h_d. En effet C_g est un pourcentage(en fonction de S) par rapport à C_i. On peut donc écrire:

$$C_g(S, h_d) = P(S)C_i(h_d)$$

Ayant déjà une approximation de $C_i(h_d)$, il reste à estimer l'expression de $P(S)$ pour estimer $C_g(S, h_d)$. Nous choisissons d'estimer $P(S)$ par un modèle de régression linéaire:

$$P(S) = \alpha_0 + \alpha_1 S + \varepsilon$$

Après estimation des paramètres du modèle, nous obtenons le résultat représenté par la figure 10.

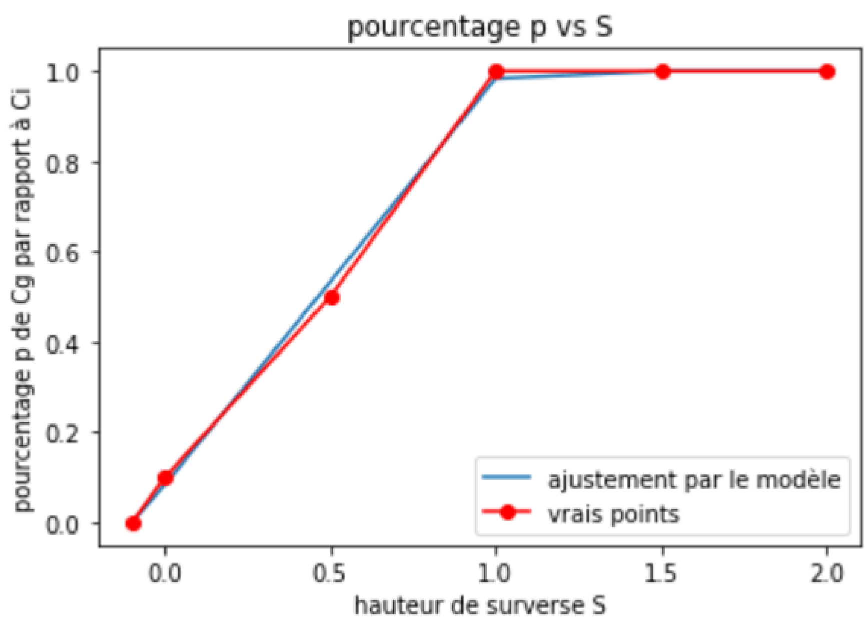

Figure 10: Approximation de $P(S)$ par régression linéaire

Comme pour C_s, l'expression finale de $P(S)$ est:

$$P(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \leq 0 \\ \hat{\alpha_0} + \hat{\alpha_1} S & \text{si} \quad S \in [0, 1] \\ 1 & \text{pour} \quad S > 1 \end{cases}$$

4.3.5 Approximation de $J(h_d)$ par monte-carlo

En partant de :

$$J(h_d) = \mathbb{E}\left\{\frac{C_i(h_d)}{T} + C_m(h_d) + C_s(S) + C_g(S, h_d)\right\} = \frac{C_i(h_d)}{T} + C_m(h_d) + \mathbb{E}\left\{C_s(S) + C_g(S, h_d)\right\} \quad (4)$$

Nous allons estimer la partie $X(h_d) = \mathbb{E}\left\{C_s(S) + C_g\left(S, h_d\right)\right\} = \mathbb{E}\left\{C_s(S)\right\} + \mathbb{E}\left\{C_g\left(S, h_d\right)\right\}$ par monte-carlo.
Pour estimer $X(h_d)$, nous allons générer un échantillon $(S_1, S_2, ..., S_n)$ selon la loi de S pour n assez grand. Nous connaissons la loi de S car elle est fonction de variables aléatoires dont les lois sont connues. En effet $S = Z_v + H - h_d - Z_b$ avec $H = \left(\frac{Q}{K_s\sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}}B}\right)^{\frac{3}{5}}$ et les lois de Z_v, Q, K_s, Z_m sont connues. B,Z_b et L étant des constantes connues.
La loi forte des grands nombres nous assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{C_s\left(S_i\right) + C_g\left(S_i, h_d\right)\right\} = X(h_d)$$

Une fois $X(h_d)$ estimer, l'expression de $J(h_d)$ est obtenue facilement:

$$J(h_d) = \frac{C_i\left(h_d\right)}{T} + C_m\left(h_d\right) + X(h_d)$$

4.4 Minimisation de $J(h_d)$

Pour $n = 10000$, nous avons évaluer $J(h_d)$ sur l'intervalle $[0, 50]$. Nous obtenons la courbe de la figure 11

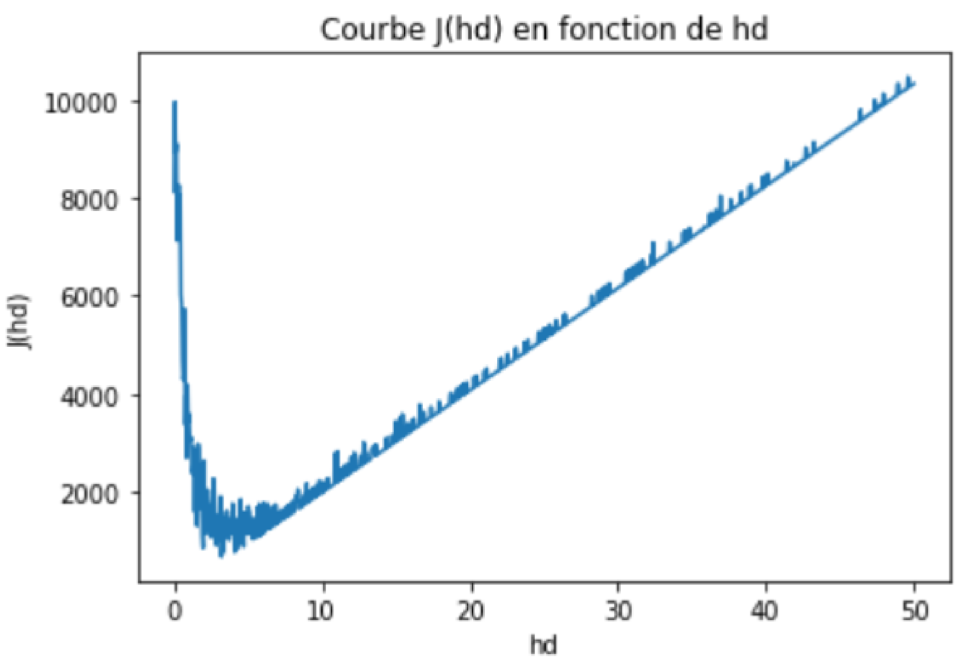

Figure 11: Coût total $J(h_d)$ en fonction de h_d

Malgré toutes les hypothèses et approximations faites, l'allure de la courbe de $J(h_d)$ nous paraît plausible. En effet comme mentionné plus haut, un h_d très faible entraînera un coût total grand dû au dommage du site causé par la surverse. De de même, un h_d très grand entraîne un coût total très grand dû au coût de construction et de maintenance de la digue. Après plusieurs simulations, nous obtenons en moyenne que le coût minimum est atteint pour :

$$\boxed{h_{d,min} \simeq 3.10\, m}$$

Cette hauteur est inférieure aux hauteurs trouvées pour les deux approches précédentes car dans cette approche on tient compte d'une contrainte qui est le prix d'investissement et de maintenance de la digue. Cette contrainte pénalise le coût total lorsque h_d est très grande.