Programmation Linéaire

Conseils :

1. Modélisation
   - Bien définir ce que représentent x et y (se laisser guider par la question)
   - S’aider éventuellement d’un tableau pour déterminer les contraintes
   - Donner un nom clair à chaque inéquation

2. Résolution :
   - Calculer toutes les équations de droites avant de choisir la graduation afin d’adapter à l’ordonnée à l’origine la plus haute
   - Représenter le système des contraintes sur une page entière, soigner
   - Pour choisir la pentes, choisir une fraction adaptée

3. Conclusion :
   - Ne l’oublie pas !
   - En général, il est demandé d’évaluer la fonction objectif au point optimal

<u>Exercice 1 :</u>
Une collectivité veut acheter trois sortes de biscuits : des croquants, des navettes et des madeleines.
Ces biscuits sont vendus en deux conditionnements : des boites rondes et des boîtes carrées

Une boite ronde contient :
- 3 kg croquants
- 2 kg de navettes
- 4 kg de madeleines

Une boite carrée contient :
- 12 kg croquants
- 4 kg de navettes
- 3 kg de madeleines

Une collectivité veut au moins :
- 60 kg croquants au moins
- 32 kg de navettes
- 36 kg de madeleines
- 17 boites rondes au plus
- 11 boites carrées au plus

Les coûts des boites :
- 20 francs boite rondes
- 50 francs boite carrées

1/ Déterminer le nombre de coites de chaque modèle pour que la dépense soit minimale.
2/ Calculer cette dépense.

Solution 1:

1. Modélisation
- Choix de x et y :
  - Soit x le nombre de boite carré
  - Soit y le nombre de boite ronde
- Contraintes :
  - croquants ——— $3x + 12y \geq 60$ —————— (C)
  - navettes ——— $2x + 4y \geq 32$ —————— (N)
  - madeleines ——— $4x + 3y \geq 36$ —————— (M)
  - boites rondes ——— $x \leq 17$ —————— (R)
  - boites carrées ——— $y \leq 11$ —————— (S)
  - graph en L———— $x \geq 0$ & $y \geq 0$ —————— (L)
- Objectif :
  - On souhaite minimiser la dépense, qui s'exprime en fonction de x et y par : $D(x, y) = 20x + 50y$

2. Résolution
- Représentation graphique des contraintes

  - $3x + 12y \geq 60$ —————— (C) | $3x + 12y \geq 60 \Rightarrow 12y \geq -3x + 60 \Rightarrow y \geq (-3/12)x + 60/12$
    | $y \geq (-1/4)x + 5$
  - $2x + 4y \geq 32$ —————— (N) | $2x + 4y \geq 32 \Rightarrow 4y \geq -2x + 32 \Rightarrow y \geq (-2/4)x + 32/4$
    | $y \geq (-1/2)x + 8$
  - $4x + 3y \geq 36$ —————— (M) | $4x + 3y \geq 36 \Rightarrow 3y \geq -4x + 36 \Rightarrow y \geq (-4/3)x + 36/3$
    | $y \geq (-4/3)x + 12$
  - $x \leq 17$ —————— (R) |
  - $x \leq 11$ —————— (S) |
  - $x \geq 0$ & $y \geq 0$ —————— (L) |

- Choix des échelles
  - ordonnée à l'origine maximale : 12
  - x plus petit que 17 donc aller au delà
  - y plus petit que 11 donc aller au delà

- Représentation graphique
  - $y \geq (-1/4)x + 5$ …………………… ($x = 0$, $y = 5$), ($x = 4$, $y = 4$) ……………………….(C)
  - $y \geq (-1/2)x + 8$ …………………… ($x = 0$, $y = 8$), ($x = 2$, $y = 7$) ……………………….(N)
  - $y \geq (-4/3)x + 12$ …………………… ($x = 0$, $y = 12$), ($x = 3$, $y = 8$)……………………….(M)
  - $x \leq 17$ .... ($x = 17$, $y = 0$) ……………………………………….(R)
  - $x \leq 11$ .... ($x = 0$, $y = 11$) ……………………………………….(S)

    - Repère en L

- Recherche de la solution optimale
    - Par la méthode des droites parallèles :
        - Fonction objectif (à minimiser) : $D(x, y) = 20x + 50y$
        - Pente Objectif : $20x + 50y = D$ => $50y = -20x - D$ => $y = (-20/50)x - D/50$ => $y = (-2/5)x - D/50$
            - La pente est de : $-2/5$
        - On trace une droite objectif puis on descend parallèlement jusqu'au minimum, tout en restant à l'intérieur du prototype des contraintes.
        - $y \geq (-2/5)x + D/50$ ………………….. ($x = 0$, $y = D/50$), ($x = 5$, $y = -2+D/50$) ……………………….(C)

3. Conclusion
- Observation :
    - le sommet optimal est celui de coordonnées ($x = 12$, $y = 2$) ce qui correspond à une dépense de :
    - $D(x, y) = D(12, 20) = 20.12 + 50.2 = 340$
- En conclusion
    - Il faut acheter 12 boites rondes et 2 boites carrées pour une dépense optimale de 340 Francs.