Programmation linéaire

La programmat° linéaire vise à maximiser ou minimiser la f° objective (f° économique) tout en respectant certaines contraintes exprimées sous forme d'inégalités ou d'équat°

- **Forme Canonique d'un programme linéaire**

Fonction Économique : $\boxed{Max\, Z \; ; \; Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \text{-- -- -- -- -- -- --} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1 \text{ --- } n \end{cases}$$

a_{11} = coeff technique

	x_1 P_1	x_2 P_2	...	x_n P_n	
F_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
F_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
⋮					
F_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
	C_1	C_2	....	C_n	

Exercices R.O

Exercice 1,

Pour obtenir la forme standard à partir de la forme Canonique, On ajoute des variables d'écarts. (x_{n+i})

Exercice d'Application : Menuiserie Khadim Rassoul

soit x_1 le nbre de lots de tabourets M_1 } par semaine
x_2 " " " " " " M_2 }

	x_1 M_1	x_2 M_2 ← produits	(h)
F	3	2	120
S	6	0	150
T	0	3	120
P	6	2	180
	7	3	

(D) : $x = 0$ ⇔ axe des ordonnées

(D) : $y = 0$ ⇔ axe ~~Vert~~ des abscisses

La fn économique sera une fn de profit
⇓
(7 et 3) représente les coeff économiques

Max Z ; $Z = 7x_1 + 3x_2$ ⇔ La fn économique

⇓ En fn du nombre de ressources (outils) on compte le nbre de contraintes.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 6x_1 \leq 150 \\ 3x_2 \leq 120 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 180 \end{cases}$$

Contrainte de non négativité

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$

Au fur la résolut° graphique, on s'intéresse d'abord aux contraintes en résolvant les inéquat° une par une

Ex : cs pour déterminer l'ensemble des solut° admissibles.

On a :

$D_1 : 3x_1 + 2x_2 = 120$

$D_2 : 6x_1 = 150$

$D_3 : 3x_2 = 120$

$D_4 : 6x_1 + 2x_2 = 180$

La solut° équivaut à la valeur de x_1, x_2 (les variables de décision

optimisat°

Soit $\vec{V}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ Vecteur normal qui est perpendiculaire à la droite de la famille

→ On cherche la droite la plus élevée mais qui est en intersect° avec l'ensemble des solut° admissibles.

• Notions fondamentales dans la programmat° linéaire :

• Variables de décision : Ceux sont les inconnues que l'on cherche à déterminer. C'est les choix à faire dans le problème

Ex : des quantités de deux produits x, y.

• Fonct° objective : C'est la fn Z que l'on cherche à maximiser ou minimiser.

• Contraintes : C'est des limites sur la valeur des variables de décision souvent sous forme d'équat° ou d'inéquat°.

• Région ou zone admissible : C'est l'ensemble des solut° qui satisfont toutes les contraintes. C'est la zone délimitée par les contraintes.

• Solution optimale : C'est le point dans la région admissible où la fn objective atteint sa valeur max ou min

Méthode pour résoudre un problème de P.L :

Etape 1 : Comprendre le problème

- Identifier clairement les variables de décision
- Définir la fn objective
- Lister les contraintes

Etape 2 : Représenter les contraintes graphiquement (si possible)

- On représente dans le plan l'équat° ou l'inéquat° des contraintes
- Identifier ensuite la zone admissible.

Etape 3 : Trouver les points d'intersect°

- Résoudre les système d'équat° linéaires pour trouver les sommets de la zone admissible.

Etape 4 : Déterminer la fn objective aux sommets

- Evaluer la fn objective Z pour chaque sommet de la région admissible.
- choisir la valeur max ou min selon l'objectif.

Etape 5 : Interpréter la solut°

- Identifier les valeurs des variables de décision correspond à la solut° optimale.

→ Lorsqu'on a un programme linéaire dont le nbre de variables dépasse 2, On ne fait pas la résolut° graphique

* Après représentat° des contraintes, on trace le vecteur norm
si on a par exemple $ax_1 + bx_2 = Z$
$\Rightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ce vecteur a pour origine le point O (origine du repère)
Après on trace la droite de la famille qui est $\perp$ au vecteur normal
On fait la translat° de cette droite jusqu'au point max (cas de max)
On regarde ce pt là c'est l'intersect° des droites, on résoud le système d'éq° correspond

I.1 : Méthode simplexe

solut° de base ⟺ solut° qui se trouve dans les sommets du polyèdre.

Exr

$$Z ;\ Z = 7x_1 + 3x_2$$

Contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 6x_1 \leq 150 \\ 3x_2 \leq 120 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 180 \end{cases}$$

si l'inégalité est dans le sens ≤ on met + pour les variables d'écart.

Standardisat° des Contraintes ⟺ On ajoute des variables d'écarts en mettant égalités

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ 6x_1 + x_4 = 150 \\ 3x_2 + x_5 = 120 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_6 = 180 \end{cases}$$

Ici, x_3, x_4, x_5 et x_6 sont les variables d'écarts

Une solut° de base est constituée de $\underbrace{V_{Base} \text{ (Variable de base)}}_{>0}$ et $\underbrace{V_H \text{ (Variable Hors Base)}}_{=0}$

si $\underbrace{x_1 = x_2 = 0}_{\text{Variables Hors Base}}$ alors on a :

$$\begin{cases} x_3 = 120 \\ x_4 = 150 \\ x_5 = 120 \\ x_6 = 180 \end{cases} \Rightarrow \text{solut° de Base}$$

Premier tableau du simplexe :

X_B	C_B	x_1 A_1	x_2 A_2	x_3 A_3	x_4 A_4	x_5 A_5	x_6 A_6	B	R
$C_j \rightarrow$		7	3	0	0	0	0		
x_3	0	3	2	1	0	0	0	120	$\frac{120}{3}$
x_4	0	6	0	0	1	0	0	150	$\frac{150}{6}$
x_5	0	0	3	0	0	1	0	120	–
x_6	0	6	2	0	0	0	1	180	$\frac{180}{6}$
Z_j		0	0	0	0	0	0		

↳ Dans le tableau, on met les ≠ variables et pour chaque variable on met ses coeff et chaque ligne correspond à une équat°.

→ Pour chaque variable on écrit son coeff économique

→ Avant d'appliquer l'algo du simplexe, faut tjrs avoir une solut° de base.

$C_j - Z_j$ ⇒ utilisé pour faire le test d'optimalité

$\boxed{Z_j = \text{produit scalaire de } C_B \cdot A_j}$

Ex : C_j ⇒ coeff des variables au niveau de la fn économique

C_B ⇒ coeff des solut° de base dans la fn économique

$Z_1 = 0 \times (3) + 0 \times 6 + \dots = 0$

Tant qu'on a $c_j - Z_j \geq 0$ ⇒ pas optimale (pour un problème de maximisat°). C'est le contraire pour une minimisat°.

R ⇒ rapport de B sur les coeff de la variable qu'on veut faire entrer dans la base.

x_1 prend la place de x_4 ⇒ les coeffs de x_4 deviennent aux de x_1 dans le nouveau tableau

$L'_2 = \frac{L_2}{6}$ ⇒ On prend la 2ème ligne on divise par pivot

$L'_1 = L_1 - 3L'_2$

On commence tjrs par écrire la ligne qui contient le pivot.

Détermination d'une solution de base admissible :

Soit le Pb (P)

Min Z ; $Z = 120x_1 + 150x_2 + 120x_3 + 180x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 6x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ x_j \geq 0 \; ; \; j \text{ de } 1 \text{ à } 4 \end{cases}$$

inégalité dans le sens $\geq$ on soustrait les variables d'écart.

Standardisation :

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 6x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_6 = 3 \\ x_j \geq 0 \; ; \; j = 1 \longrightarrow 6 \end{cases} \quad (C)$$

Si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_5 = -7$ et $x_6 = -3$ (Solution non réalisable)

Introduisons des variables artificielles :

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 6x_4 - x_5 + x_7 = 7 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 - x_6 + x_8 = 3 \\ x_i \geq 0 \text{ avec } i = 1 \longrightarrow 8 \end{cases} \quad (C_a)$$

si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ ... $x_7 = 7$ et $x_8 = 3$

Après ajout des variables artificielles, on a 2 choix :

1. la méthode des 2 phases
2. la méthode des pénalités

Phase 1 : Min Z_1 ; $Z_1 = x_7 + x_8$

On utilise la méthode du simplex avec (C_{a_1}).

C_B	X_B	x_1 (0)	x_2 (0)	x_3 (0)	x_4 (0)	x_5 (0)	x_6 (0)	x_7 (1)	x_8 (1)	B
1	x_7	3	-6	0	6	-1	0	1	0	7/6
1	x_8	2	0	3	2	0	-1	0	1	3/2
$Z_j =$		5	6	3	8	-1	-1	1	1	$Z = 10$
$c_j - Z_j =$		-5	-6	-3	-8	1	1	0	0	

C_B	X_B	x_1 (0)	x_2 (0)	x_3 (0)	x_4 (0)	x_5 (0)	x_6 (0)	x_7 (1)	x_8 (1)	B	
0	x_4	1/2	1	0	1	-1/6	0	1/6	0	7/6	
1	x_8	1	-2	3	0	1/3	-1	-1/3	1	2/3	2/9
$Z_j =$		1	+2	+3	0	+1/3	-1	-1/3	1		
		-1	2	-3	0	-1/3	1	4/3	0		

C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
0	x_4	1/2	1	0	1	-1/6	0	1/6	0	7/6
0	x_3	1/3	-2/3	1	0	1/9	-1/3	-1/9	1/3	2/9
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	1	1	

Phase 2 : Phase de résolution du problème.

On prend le tableau optimal, on élimine les variables artificielles.

C_B	X_B	120 x_1	150 x_2	120 x_3	180 x_4	0 x_5	0 x_6	B	R
180	x_4	$1/2$	1	0	1	$-1/6$	0	$7/6$	$7/3$
120	x_3	$1/3$	$-2/3$	1	0	$1/9$	$1/3$	$2/9$	$2/3$
Z_j		130	100	120	180	$-\frac{50}{3}$	-40		
$C_j - Z_j$		-10	50	0	0	$\frac{50}{3}$	40		

C_B	X_B	120 x_1	150 x_2	120 x_3	180 x_4	0 x_5	0 x_6	B
180	x_4	0	2	$-3/2$	1	$-1/3$	$+1/2$	$5/6$
120	x_1	1	-2	3	0	$1/3$	-1	$2/3$
Z_j		120	120	90	180	-20	~~-210~~ -30	
$C_j - Z_j$		0	30	30	0	20	~~210~~ $+30$	

$Z = 230$

$\Downarrow$

$\boxed{C_B \cdot B}$

② Méthode des pénalités :

Pb minimisat° :

$\text{Min } Z, \; Z = 120x_1 + 150x_2 + 120x_3 + 180x_4 + Mx_7 + Mx_8$

Mx_7 et Mx_8 sont les variables artificielles

Avec la méthode des pénalités, si on sort une variable de la base, On l'élimine du tableau.