Cours de Mathématiques — Classe de 4^{e}

Année scolaire 2025–2026

Abdoullatuf Maoulida

23 août 2025

Table des matières

1. Les nombres relatifs

Objectifs

À l'issue de la séquence, l'élève sera capable de :

- Multiplier et diviser des nombres relatifs en appliquant la règle des signes
- Généraliser la règle des signes pour plusieurs facteurs
- Identifier et utiliser les nombres inverses
- Calculer des expressions numériques avec enchaînements d'opérations
- Résoudre des problèmes utilisant les nombres relatifs

1.1 Rappel : Les nombres relatifs

Remarque 1.1 : Rappel de 5e

Les nombres relatifs sont des nombres qui peuvent être positifs, négatifs ou nuls.
Ils permettent de décrire des quantités au-dessus ou en dessous de zéro.

1.1.1 Représentation et comparaison

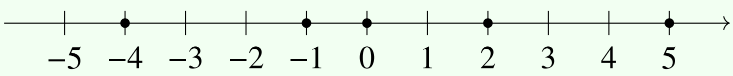
Propriété 1.1

Sur une droite graduée :

- Les nombres positifs sont à droite de 0
- Les nombres négatifs sont à gauche de 0
- Plus un nombre est à droite, plus il est grand

Exemple 1.1

Comparer les nombres : $-4 < -1 < 0 < 2 < 5$



1.1.2 Rappel : Addition et soustraction

Propriété 1.2 : Addition et soustraction

- **Même signe :** On additionne les distances à zéro et on garde le signe commun
- **Signes différents :** On soustrait les distances à zéro et on garde le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro
- **Soustraction :** Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé

Exemple 1.2

Exemples de calculs :

$$
\begin{aligned}
(+5) + (+3) &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-4) + (-2) &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(+7) + (-3) &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-5) + (+8) &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(+6) - (+2) &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-3) - (-5) &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

1.2 Multiplication et division de nombres relatifs

1.2.1 La règle des signes

Propriété 1.3

Règle des signes **Règle des signes pour la multiplication et la division :**

- $(+) \times (+) = (+)$ et $(+) \div (+) = (+)$
- $(-) \times (-) = (+)$ et $(-) \div (-) = (+)$
- $(+) \times (-) = (-)$ et $(+) \div (-) = (-)$
- $(-) \times (+) = (-)$ et $(-) \div (+) = (-)$

Méthode : On détermine d'abord le signe du résultat, puis on calcule avec les distances à zéro.

Exemple 1.3

Calculer les produits et quotients suivants :

Multiplication :

$(+4) \times (+3) = \dots\dots\dots\dots$

$(-5) \times (-2) = \dots\dots\dots\dots$

$(+6) \times (-3) = \dots\dots\dots\dots$

$(-7) \times (+4) = \dots\dots\dots\dots$

Division :

$(+15) \div (+3) = \dots\dots\dots\dots$

$(-20) \div (-4) = \dots\dots\dots\dots$

$(+24) \div (-6) = \dots\dots\dots\dots$

$(-35) \div (+7) = \dots\dots\dots\dots$

1.3 Généralisation de la règle des signes

1.3.1 Produit de plusieurs facteurs

Propriété 1.4

Produit de plusieurs facteurs **Pour un produit de plusieurs facteurs :**

- Si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, le résultat est **positif**
- Si le nombre de facteurs négatifs est **impair**, le résultat est **négatif**

Exemple 1.4

Déterminer le signe des produits suivants :

- $A = (-2) \times (+3) \times (-4) \times (-1)$: .... facteurs négatifs, donc A est ....
- $B = (+5) \times (-2) \times (-3) \times (+1) \times (-4)$: .... facteurs négatifs, donc B est ....
- $C = (-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$: .... facteurs négatifs, donc C est ....

1.3.2 Nombres inverses

Définition 1.1

Nombres inverses Deux nombres relatifs sont des **nombres inverses** si leur produit est égal à 1. Soit a et b deux nombres relatifs. a et b sont dits « inverses » si et seulement si $a \times b = 1$.

Exemple 1.5

- L'inverse de 5 est ..... car $5 \times$ ..... $= 1$
- L'inverse de $-\frac{2}{3}$ est ..... car $-\frac{2}{3}\times$ ..... $= 1$
- L'inverse de -4 est ..... car $-4\times$ ..... $= 1$

1.4 Expressions numériques et enchaînements d'opérations

Méthode 1.1

Calcul d'expression numérique **Pour calculer une expression numérique :**

1) On effectue en premier les calculs dans les **parenthèses les plus intérieures**
2) On calcule les **puissances** éventuelles
3) On effectue ensuite les **multiplications et divisions** avant les additions et soustractions
4) Si plusieurs multiplications/divisions se suivent, on calcule dans le **sens de la lecture**
5) Si plusieurs additions/soustractions se suivent, on calcule dans le **sens de la lecture**

Exemple 1.6

Calculer les expressions suivantes :

$A = 5 + 3 \times (-2)$
$= \dots\dots\dots\dots$
$= \dots\dots\dots\dots$

$B = (-8) \div 2 + 3 \times (-1)$
$= \dots\dots\dots\dots$
$= \dots\dots\dots\dots$

$C = [(-6) + 4] \times (-2)$
$= \dots\dots\dots\dots$
$= \dots\dots\dots\dots$

$D = 12 \div (-3) \times 2$
$= \dots\dots\dots\dots$
$= \dots\dots\dots\dots$

1.5 Exercices d'application

Exercices

Exercice 1 : Calculs avec les nombres relatifs
Calculer les expressions suivantes :

a) $(-3) \times (+4) \times (-2)$

b) $(+15) \div (-3) \times (-2)$

c) $[(-5) + (+3)] \times (-4)$

d) $(+8) \div (-2) + (-3) \times (+2)$

Exercice 2 : Déterminer le signe
Sans faire le calcul, déterminer le signe des produits suivants :

a) $(-2) \times (+3) \times (-4) \times (-1) \times (+5)$

b) $(+1) \times (-2) \times (-3) \times (+4) \times (-5)$

c) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$

Exercice 3 : Nombres inverses
Trouver l'inverse de chacun des nombres suivants :

a) 7

b) -3

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{2}{5}$

Exercice 4 : Expressions complexes
Calculer les expressions suivantes en respectant les priorités :

a) $(-6) \times (+2) + (-8) \div (-4)$

b) $[(-3) + (+5)] \times (-2) - (+4)$

c) $(+12) \div (-3) \times (+2) + (-5)$

d) $(-10) \div (+2) - (-3) \times (-4)$

2. Théorème de Pythagore et sa réciproque

2.1 Introduction

Le théorème de Pythagore est l'un des théorèmes les plus célèbres et les plus utiles de la géométrie. Il porte le nom de Pythagore, mathématicien et philosophe grec du VIe siècle avant J.-C., bien que cette relation ait été découverte par plusieurs civilisations antérieures (Babyloniens, Égyptiens, Chinois).

Ce théorème établit une relation fondamentale entre les côtés d'un triangle rectangle et trouve de nombreuses applications dans la vie courante : architecture, navigation, cartographie, sport, etc.

Problématique du chapitre : Comment calculer des longueurs dans un triangle rectangle ? Comment déterminer si un triangle est rectangle ?

2.2 Activité d'approche : découverte par manipulation

Objectif : Découvrir la relation entre les aires des carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle.

Matériel : Papier quadrillé, ciseaux, règle graduée

Consigne :

1. Construire plusieurs triangles rectangles sur papier quadrillé
2. Construire un carré sur chacun des trois côtés
3. Compter le nombre de carreaux (ou calculer l'aire) de chaque carré
4. Chercher une relation entre ces trois nombres

Constat : Pour tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

2.3 Définitions et vocabulaire

Définition 2.1 : Vocabulaire du triangle rectangle

Un triangle ayant un angle droit est un triangle rectangle. Les deux côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle sont les **côtés de l'angle droit**. Le côté restant est l'**hypoténuse** du triangle rectangle. C'est le **côté opposé** à l'angle droit.

Propriété 2.1 : Hypoténuse

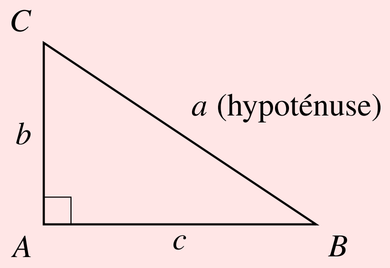
Si un triangle est rectangle alors son plus grand côté est l'hypoténuse. (Admise)

2.4 Le théorème de Pythagore

2.4.1 Énoncé du théorème

Théorème 2.1 : Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
Formulation mathématique :
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (**Égalité de Pythagore**)



2.4.2 Démonstration du théorème de Pythagore par la méthode des aires

Considérons un carré de côté $(a + b)$ contenant quatre triangles rectangles identiques de côtés a, b et d'hypoténuse c.

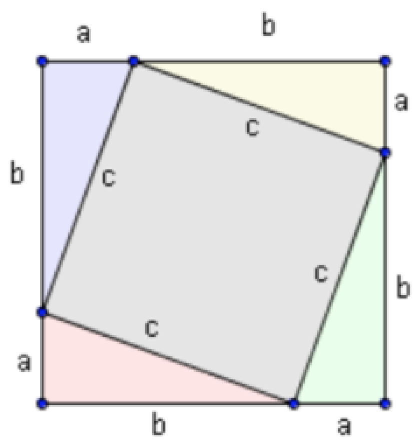


FIGURE 2.1 – Configuration 1

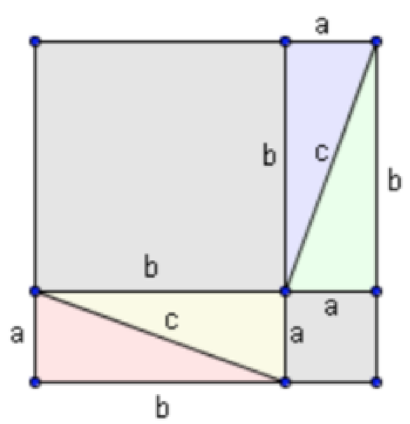


FIGURE 2.2 – Configuration 2

Configuration 1 : Aire 1 = $(a + b)^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$
Configuration 2 : Aire 2 = $(a + b)^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 = 2ab + a^2 + b^2$
Comme l'aire est la même dans les deux configurations (Aire 1 = Aire 2) :

$$2ab + c^2 = 2ab + a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Ce qui démontre le théorème de Pythagore.

2.5 Applications du théorème de Pythagore

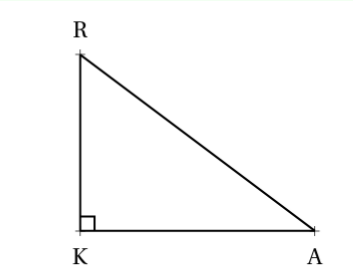
2.5.1 Calculer la longueur de l'hypoténuse

Remarque 2.1 : Important

$a^2 = a \times a$. À ne pas confondre avec $a \times 2 = a + a = 2a$

Exemple 2.1

On étudie le triangle RAK rectangle en K tel que KR = 4,95 cm et KA= 6,6 cm.
Calculons la mesure du côté [AR].
Dans le triangle RAK rectangle en K, d'après le théorème de Pythagore on a :



.... = ... + ...

.... = ... + ...

.... = ... + ...

AR^2 = ...

Comment trouver AR ?
On ne connaît pas immédiatement un nombre dont le carré vaut exactement 68,0625.
Notons x ce nombre. Comme $8^2 = 64 < 68,0625 < 81 = 9^2$, on en déduit que $8 < x < 9$.
En utilisant la calculatrice, on trouve que $8,2^2 = 67,24 < 68,0625 < 68,89 = 8,3^2$ et donc que $8,2 < x < 8,3$.
On constate alors que $8,25^2 = 68,0625$.
Finalement $AR = 8,25$ cm.

Propriété 2.2 : La racine carrée

Pour tout nombre positif a, il existe un unique nombre **positif** dont le carré vaut exactement le nombre a.
Ce nombre s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$.
Par définition : $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

Exemple 2.2 : Carrés parfaits

Quelques carrés parfaits à connaître :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Donc $\sqrt{0}$ = ... ; $\sqrt{1}$ = ... ; $\sqrt{9}$ = ... ; $\sqrt{16}$ = ... ;
$\sqrt{25}$ = ... ; $\sqrt{36}$ = ... ; $\sqrt{49}$ = ... ; $\sqrt{64}$ = ... ;
$\sqrt{81}$ = ... ; $\sqrt{100}$ = ... ; $\sqrt{121}$ = ... ; $\sqrt{144}$ = ...

2.5.2 Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Méthode 2.1 : Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Pour calculer la longueur d'un côté de l'angle droit :

1. Identifier la longueur de l'hypoténuse et celle de l'autre côté de l'angle droit
2. Appliquer la formule : hypoténuse^2 = côté$_1^2$ + côté$_2^2$
3. Isoler le côté inconnu : côté^2 = hypoténuse^2 - autre côté^2
4. Calculer la racine carrée du résultat

Exemple 2.3

Un triangle DEF est rectangle en D. $DE = 5$ cm et $EF = 13$ cm.
Calculer DF.
Solution :

— Le triangle est rectangle en D, donc .... est l'hypoténuse.

— D'après le théorème de Pythagore : .... = ... + ...

— .... = ... + ...

— .... = ... + ...

— .... = ... + ...

— DF = ... = ...cm

2.6 La réciproque du théorème de Pythagore

2.6.1 Énoncé de la réciproque

Théorème 2.2 : Contra-posée du théorème de Pythagore

Si dans un triangle l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée **alors** ce triangle n'est pas rectangle. (*Admise*)

Démonstration 2.1 : Contra-posée du théorème de Pythagore

C'est une conséquence de la logique des propositions.
Prenons un exemple simple :

Propriété : Si nous sommes le 25 décembre alors je ne vais pas à l'école. La propriété contra-posée est : Si je vais à l'école alors nous ne sommes pas le 25 décembre. On comprend que quand une propriété est vraie alors la propriété contra-posée est également vraie. Dans le cas du théorème de Pythagore, si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle n'est pas rectangle car s'il était rectangle l'égalité serait vérifiée !

Théorème 2.3 : Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

2.6.2 Utilisation de la réciproque

Méthode 2.2 : Démontrer qu'un triangle est rectangle

Pour démontrer qu'un triangle est rectangle :

1. Identifier le plus grand côté du triangle
2. Calculer le carré de sa longueur
3. Calculer la somme des carrés des deux autres côtés
4. Comparer les résultats :
   - Si égalité : le triangle est rectangle
   - Si inégalité : le triangle n'est pas rectangle

Exemple 2.4

Un triangle a pour côtés 9 cm, 12 cm et 15 cm. Est-il rectangle ?
Solution :

— Le plus grand côté mesure 15 cm
— $15^2 = \ldots\ldots\ldots$
— $9^2 + 12^2 = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$
— Puisque .... = ... + ..., le triangle est rectangle
— L'angle droit est opposé au côté de 15 cm

Exemple 2.5

Un triangle a pour côtés 7 cm, 8 cm et 10 cm. Est-il rectangle ?
Solution :

— Le plus grand côté mesure 10 cm
— $10^2 = \ldots\ldots\ldots$
— $7^2 + 8^2 = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$
— Puisque .... ≠ ...., le triangle ....

2.7 Applications et résolution de problèmes

2.7.1 Problèmes de la vie courante

Exercices

Exercice 1 : L'échelle

Une échelle de 4 m est appuyée contre un mur. Son pied est à 1,5 m du mur. À quelle hauteur le sommet de l'échelle touche-t-il le mur ?
Solution :

- Triangle rectangle : mur, sol, échelle
- Hypoténuse : échelle = 4 m
- Un côté : distance au mur = 1,5 m
- Autre côté : hauteur = ?

$h^2 + 1,5^2 = 4^2$
$h^2 + 2,25 = 16$
$h^2 = 13,75$
$h = \sqrt{13,75} \approx 3,7$ m

Exercice 2 : Vérification d'équerrage

Un maçon vérifie qu'un angle est droit en mesurant les côtés d'un triangle formé par deux murs et une diagonale. Il mesure : 3 m, 4 m et 5 m. L'angle est-il droit ?
Solution :

- Plus grand côté : 5 m
- $5^2 = 25$
- $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
- Égalité vérifiée $\Rightarrow$ l'angle est droit

2.7.2 Utilisation de la calculatrice

Compétence : Utiliser la touche $\sqrt{}$ (racine carrée) de la calculatrice.

Exemple : Calculer $\sqrt{75}$

- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$

2.7.3 Calculs exacts et valeurs approchées

Calcul exact : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ cm
Valeur approchée : $\sqrt{50} \approx 7,07$ cm (arrondi au centième)

2.8 Exercices d'application

2.8.1 Exercices de base

Exercices

Exercice 1 : Calculs directs :

a) Triangle rectangle : côtés 3 cm et 4 cm. Calculer l'hypoténuse.

b) Triangle rectangle : hypoténuse 10 cm, un côté 6 cm. Calculer l'autre côté.

Exercice 2 : Réciproque : Les triangles suivants sont-ils rectangles ?

a) Côtés : 7 cm, 24 cm, 25 cm

b) Côtés : 6 cm, 7 cm, 8 cm

2.8.2 Exercices d'approfondissement

Exercices

Exercice 3 : Problème du terrain
Un terrain rectangulaire mesure 40 m sur 30 m. Calculer la longueur de sa diagonale.
Exercice 4 : Navigation
Un bateau part d'un port et navigue 12 km vers l'est puis 5 km vers le nord. À quelle distance se trouve-t-il du port ?
Exercice 5 : Architecture
Pour vérifier qu'un mur est perpendiculaire au sol, un architecte place un point A sur le mur à 3 m du sol, un point B au pied du mur, et un point C sur le sol à 4 m de B. Si AC = 5 m, le mur est-il perpendiculaire au sol ?

2.9 Activité TICE

2.9.1 Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

Objectif : Vérifier le théorème de Pythagore avec GeoGebra
Consignes :

1. Construire un triangle rectangle ABC
2. Construire les carrés sur chaque côté
3. Afficher les aires des trois carrés
4. Modifier la forme du triangle et observer
5. Conjecture sur la relation entre ces aires

2.10 Synthèse du chapitre

Ce qu'il faut retenir :

1. **Théorème de Pythagore :** Dans un triangle rectangle, hypoténuse^2 = côté$_1^2$ + côté$_2^2$
2. **Réciproque :** Si dans un triangle, le carré du plus grand côté égale la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est rectangle
3. **Applications :** Calcul de longueurs, vérification d'angles droits, résolution de problèmes concrets
4. **Méthodes :** Identification du triangle rectangle, application des formules, utilisation de la calculatrice

Liens avec d'autres chapitres :

— Racines carrées (chapitre précédent)

— Trigonométrie (chapitre à venir)

— Géométrie dans l'espace

— Fonctions (distance entre deux points dans un repère)

A. Progression annuelle (récapitulatif)

Cette progression correspond à la répartition établie pour l'année 2025–2026.

Période	**Séquences**
Période 1 (6 semaines)	S01 – Les nombres relatifs, S02 – Théorème de Pythagore, S03 – Calcul littéral 1, S04 – Proportionnalité
Période 2 (7 semaines)	S05 – Calcul littéral 2 (Factorisation), S06 – Nombres rationnels, S07 – Transformation dans le plan
Période 3 (6 semaines)	S08 – Arithmétique, S09 – Pyramide et Cônes, S10 – Puissance de 10 et d'un nombre entier, S11 – Statistiques
Période 4 (7 semaines)	S12 – Calcul littéral 3 Egalité, Mise en équation et résolution, S13 – Théorème de Thalès et sa réciproque, S14 – Notion de fonction, S15 – Trigonométrie
Période 5 (6 semaines)	S16 – Espace et Géométrie, S17 – Probabilités, S18 – Grandeurs composées, S19 – Triangles égaux - Agrandissement et réduction