Etudiant : Abdsalam/Abdelvetahe

Matricule : 24139

Nom : Abd Salam/Abdelvetahe

Matricule : 24139

1_TD1

Exercice1 : Étude d'un signal exponentiel

Soit le signal analogique s(t) définie par l'expression suivante :

1- Tracer l'allure de s(t) :

• pour $a = 1 \Rightarrow s(t) = e^{-t} u(t)$

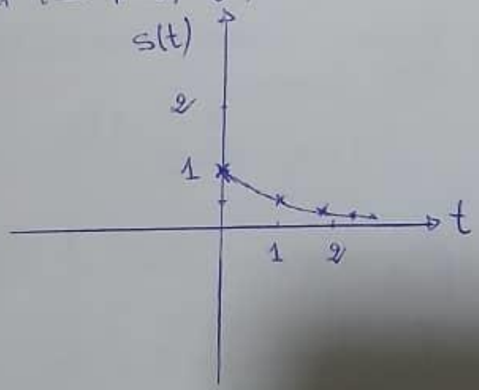
• pour $t < 0$: l'échelon $u(t) = 0$. Par conséquant, $s(t) = 0$. Le signal est nul "avant" l'origine.

• pour $t \geq 0$: L'échelon $u(t) = 1$. Le signal suit alors la courbe e^{-t}.

- A $t = 0$, $s(0) = e^{0} = 1$.

- A $t = 1$, $s(1) = 0{,}37$

- Quand $t \to +\infty$, $s(t) \to 0$



1

1

2°) Justification de la causalité :

un signal est dit causal s'il est nul pour tout temps négatif ($t<0$).
Ici, la présence de l'échelon d'Heaviside $u(t)$ garantit que :

$$s(t) = 0 \quad \text{pour } t<0$$

Le signal est donc bien causal.

3°) Énergie totale E_s :

On a :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

Comme le signal est nul pour $t<0$:

$$E_s = \int_0^{+\infty} (e^{-at})^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt$$

Calcule de primitive :

$$E_s = \left[\frac{e^{-2at}}{-2a} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{2a}$$

Comme $a>0$, l'énergie est finie ($E_s < +\infty$), c'est donc un signal à énergie finie.

4°) Puissance moyenne P_s :

On a :

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$$

Pour un signal à énergie finie, la puissance moyenne est toujours nulle.

$$P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{E_s}{T} = 0$$

5 - Parties paire et impaire :

Tout signal se décomposer en une partie paire $s_p(t)$ et une partie impaire $s_i(t)$:

- Partie paire $s_p(t)$:

La formule est $s_p(t) = \frac{s(t)+s(-t)}{2}$:

- $s(t) = e^{-at} u(t)$
- $s(-t) = e^{at} u(-t)$

$$s_p(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right)$$

- Partie impaire $s_i(t)$:

La formule est $s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$

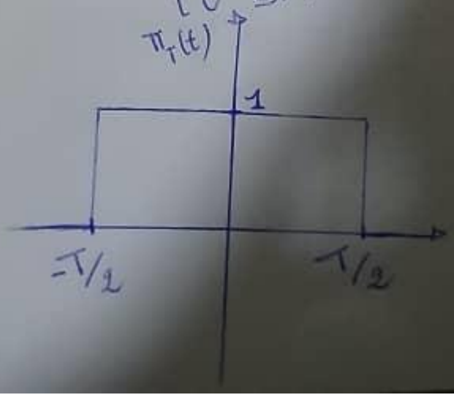
$$s_i(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right)$$

Exercice 2 :

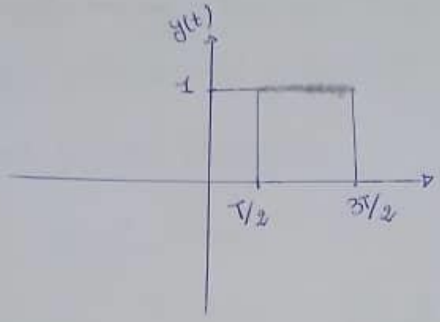
1 - Tracer $x(t)$:

on a : $x(t) = \Pi_T(t)$

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \cancel{T \leq T/2} \ -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$



2- Tracer le signal transformé $y(t) = x(t-T)$:



⊛ <u>Nom de l'opération :</u>

cette opération s'appelle une translation temporelle.

3- <u>Causalité de $x(t)$:</u>

Un signal est dit causal s'il est nul pour tout $t<0$.

- Ici, le signal $x(t)$ est égal à 1 pour $t \in [-T/2, T/2]$.
- puisqu'il existe des valeurs non nulles pour $t \in [-T/2, 0[$, le signal $x(t)$ n'est pas causal.

⊛ <u>Comment le rendre causal ?</u>

- Un signal causal commençant à l'origine est d'utiliser un décalage de $T/2$.
- Le nouveau signal serait alors : $z(t) = \Pi_T(t - T/2)$, qui est égal à 1 pour $t \in [0, T]$.

A_ TD2:

Exercice1: calcul de la TF d'une exponentielle causale

Soit le signal $s(t) = e^{-at} u(t)$ avec $a > 0$

1 - Définition de la Transformée de Fourier continue $S(f)$:

La Transformée de Fourier d'un signal temporel $s(t)$ est définie par l'intégrale suivante:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

2 - calcul explicite de $S(f)$ pour $s(t) = e^{-at} u(t)$:

Le signal est nul pour $t<0$ à cause de l'échelon unité $u(t)$. L'intégrale se réduit donc à l'intervalle $[0, +\infty[$:

$$S(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt$$

En intégrant, nous obtenons:

$$S(f) = \left[\frac{e^{-(a+j2\pi f)t}}{-(a+j2\pi f)} \right]_0^{+\infty}$$

Comme $a>0$, la limite en $+\infty$ est nulle ($e^{-\infty} = 0$). En $t=0$, l'exponentielle vaut 1

$$S(f) = 0 - \left(\frac{1}{-(a+j2\pi f)} \right) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

3- Module $|S(f)|$ (Spectre d'amplitude)

Le module d'un nombre complexe de la forme $1/(z)$ est égal à $1/|z|$.

Ici, $z = a + j(2\pi f)$.

$$\boxed{|S(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}}$$

4- D'après $|S(f)|$, une augmentation de a nécessite des fréquences f beaucoup plus grandes pour que le dénominateur augmente significativement et fasse chuter l'amplitude.

<u>Exercice 2 : Propriétés et Signaux Sinusoïdaux</u>

On considère un signal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

1- Forme de sommes d'exponentielles complexes :

En utilisant les formules d'Euler :

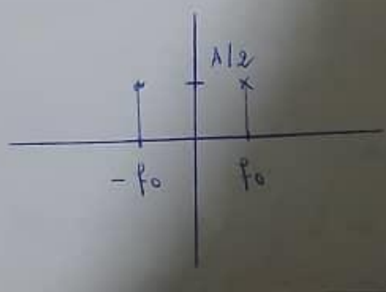
$$x(t) = \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

2- Transformée de Fourier $X(f)$:

En utilisant la propriété de l'impulsion de Dirac $\delta(f)$:

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

3- Tracée du spectre d'amplitude $|X(f)|$:



4- Application : Effet du fenêtrage (cosinus fenêtré)

Soit $y(t) = x(t) \cdot \Pi_T(t)$. Qualitativement, multiplier par une porte dans temps revient à effectuer un produit de convolution par un sinus cardinal dans le domaine fréquentiel :

- Élargissement
- Apparition de lobes secondaires

Exercice 3 : Décalage temporel

Démonstration de $\mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = S(f)\, e^{-2j\pi f\tau}$:

posons $s_\tau(t) = s(t-\tau)$. par définition de la TF :

$$\mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Effectuons le changement de variable $u = t-\tau$, d'où $t = u+\tau$ et $dt = du$:

$$\mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u)\, e^{-j2\pi f(u+\tau)}\, du$$

$$\mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u)\, e^{-j2\pi f u}\, e^{-j2\pi f\tau}\, du$$

Le terme $e^{-j2\pi f\tau}$ ne dépend pas de u, on peut le sortir de l'intégrale :

$$\mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = e^{-j2\pi f\tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(u)\, e^{-j2\pi f u}\, du}_{S(f)}$$

$$\mathcal{F}\{s(t-\tau)\} = S(f)\, e^{-j2\pi f\tau}$$

B_TD3:

Exercice 1: Théorème de Shannon et Audio

1- Fréquence d'échantillonage minimale (f_s):

D'aprés théorème de shannon:

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max}$$

- La frequence minimale théorique est donc: 40KHz

$$\Rightarrow \boxed{f_s = 40KHz}$$

2- Pourquoi 44,1KHZ plutôt que 40KHZ?

L'industrie a choisi 44,1KHZ pour deux raisons principales:

- Le filtrage anti-repliement (anti-aliasing): Dans la réalité, on utilise des filtres passe-bas pour supprimer les fréquences au dessus de 20KHZ avant l'échantillonage.

- Compatibilité historique: ce chiffre permettait d'enregistrer de l'audio sur matériel vidéo (format NTSC et PAL) existant à l'époque du développement du CD).

3- Échantillonage d'un signal à 30 KHZ

Si on échantillonne un signal de $f_0 = 30KHZ$ avec une fréquence $f_s = 44,1KHZ$, nous rencontrons un problème de repliement de spectre (aliasing).

La fréquence perçue ($f_{perçue}$) se calcule ainsi: $f_{perçue} = |f_s - f_0| = |44,1KHz - 30KHz| = 14,1KHZ$

$$\Rightarrow \boxed{f_{perçue} = 14,1KHZ}$$

Résultat : Au lieu d'un son inaudible à 30 KHZ, on entendra un sifflement bien réel à 14,1 KHz.

Exercice 2 : Calcul de débit et stockage

1 - Calcul du débit binaire (D) :

On a :

$$D = f_s \times L \times n$$

$$\Rightarrow D = 44100 \times 16 \times 2 = 1411200 \text{ bps}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = 1411200 \text{bps}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1411200}{8} = 176400 \text{ octets/s}$$

$$\Rightarrow D = \frac{176400}{1000} = 176{,}4 \text{ KO/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = 176{,}4 \text{ KO/s}}$$

2 - Poids total d'une chanson de 4 minutes :

On a :

$$\text{Taille} = 176400 \times 240 = 42336000 \text{ octets}$$

$$\Rightarrow \text{Taille} = 42336000 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Taille} = 42{,}336 \text{ Mo}}$$

3- Facteur de compression en MP3 :

on a :

$$K = \frac{1411,2}{128} \simeq 11,025$$

$$\Rightarrow K \simeq 11,025$$

Exercice 3 : Quantification et image

1- Nombre de nuances de gris :

$2^8 = 256$ nuances de gris

2- Poids de l'image non compressé en Mo :

- Nombre de pixels : $1024 \times 1024 = 1048576$ pixels
- Poids total en bits : 1048576×8 bits $= 8388608$ bits
- Conversion en octets : $8388608 / 8 = 1048576$ octets
- Conversion en (Mo) : $1048576 / 10^6 \simeq 1,05$ Mo

3- Quantification sur 1 bit :

- Nombre de nuances : $2^1 = 2$. Il n'y a plus que deux états possibles : Le noir ou le blanc.
- Aspect visuel : L'image perd tous ses dégradés de gris. Elle devient très contrastée, composée uniquement de zones purement noires et de zones purement blanches.
- Nom de ce type d'image : On appelle cela une image binaire (ou parfois "image en mode trait").