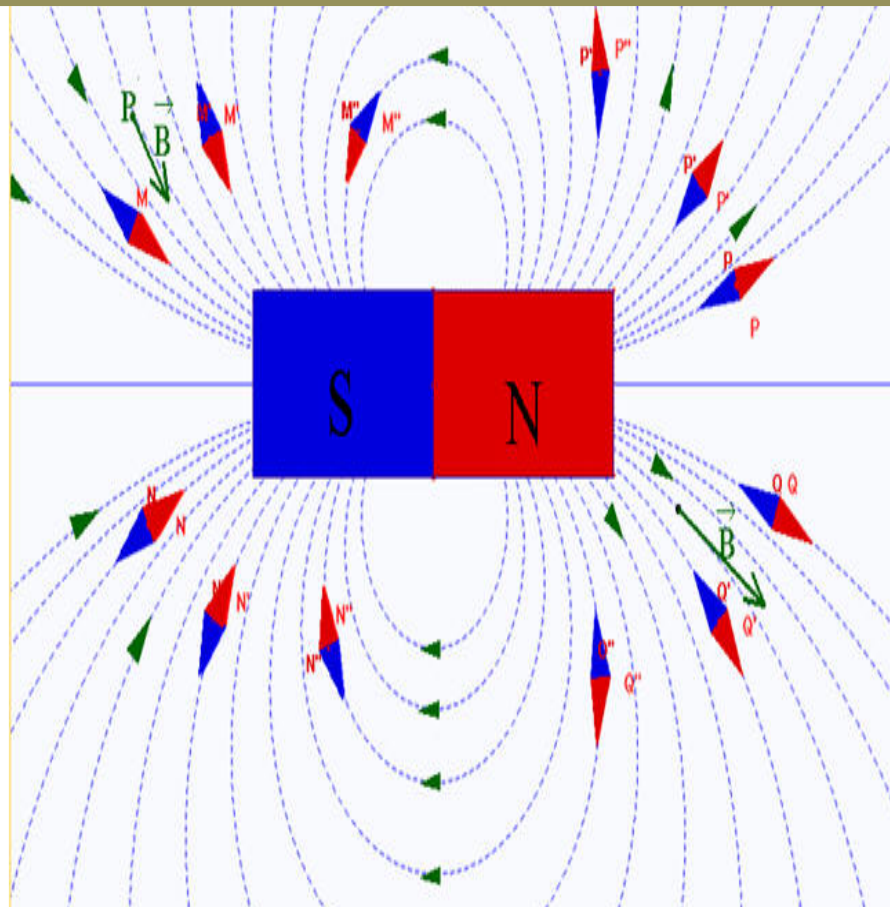


# Electromagnétisme dans le vide

## Cours et Exemples d'application

*Filière SMP-S3*

Prof. Mohamed GOUIGHRI



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels sur les Propriétés électriques de la matière</b>	<b>2</b>
1.1	Rappels de calcul vectoriel . . . . .	2
1.1.1	Opérateurs vectoriels . . . . .	2
1.1.2	Champ dérivant de potentiels . . . . .	3
1.1.3	Intégrales vectorielles . . . . .	4
1.2	Rappels d'électrostatique . . . . .	5
1.2.1	Densité de charges électriques . . . . .	5
1.2.2	Loi de Coulomb . . . . .	6
1.3	Champ et potentiel électrostatiques . . . . .	7
1.3.1	Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle . . . . .	7
1.3.2	Propriété de symétrie . . . . .	9
1.4	Théorème de Gauss . . . . .	12
1.4.1	Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle . . . . .	12
1.4.2	Théorème de Gauss . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Magnétostatique dans le vide</b>	<b>13</b>
2.1	Historique . . . . .	13
2.1.1	Aimants : sources de champ magnétique . . . . .	13
2.1.2	Propriétés du champs magnétique : . . . . .	13
2.2	Les forces magnétiques . . . . .	14
2.2.1	La force de Laplace . . . . .	15
2.2.2	La Force de Lorentz . . . . .	16
2.2.3	Travail de la force de Lorentz et énergie mécanique . . . . .	16
2.3	Les sources du champ magnétique . . . . .	16
2.3.1	Rappel : Courant électrique . . . . .	16
2.3.2	Répartition volumique de courant : . . . . .	17
2.3.3	Répartition linéique de courant : . . . . .	18
2.3.4	Répartition surfacique de courant : . . . . .	18
2.4	Propriétés du champs magnétostatiques : . . . . .	19
2.4.1	Définition : Loi de Biot et Savart . . . . .	19
2.4.2	Règles de l'observateur d'Ampère et de la main droite . . . . .	20
2.4.3	Propriétés de symétrie des distributions de courants . . . . .	21
2.4.4	Applications . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Théorème d'Ampère et Flux magnétique</b>	<b>28</b>
3.1	Théorème d'Ampère et Propriétés du champ magnétique . . . . .	28
3.1.1	Circulation sur un contour fermé du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant . . . . .	28
3.1.2	Généralisation . . . . .	29
3.1.3	Formes intégrale et locale . . . . .	30
3.1.4	Intérêt du théorème d'Ampère . . . . .	31

3.1.5	Exemple d'application du théorème d'Ampère . . . . .	31
3.2	Flux magnétique et Potentiel vecteur . . . . .	32
3.2.1	Potentiel vecteur . . . . .	32
3.2.2	Flux magnétique . . . . .	33
3.2.3	Équation locale du potentiel vecteur et jauge de Coulomb . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Induction électromagnétique</b>	<b>36</b>
4.1	Force de Lorentz. . . . .	36
4.2	Loi de Faraday . . . . .	36
4.2.1	Spire mobile et aimant fixe . . . . .	36
4.2.2	Spire immobile et aimant en mouvement . . . . .	38
4.2.3	Loi locales de l'induction : Cas général . . . . .	39
4.2.4	Potentiel vecteur et potentiel scalaire en régime variable . . . . .	40
4.2.5	Le théorème de Maxwell-Ampère . . . . .	40
4.3	Auto-induction et Induction mutuelle . . . . .	41
4.3.1	Auto-induction (Induction propre) . . . . .	41
4.3.2	Inductance mutuelle . . . . .	43
4.4	Application des phénomènes d'induction . . . . .	46
4.4.1	Générateur de courant alternatif . . . . .	46
4.4.2	Courants de Foucault . . . . .	47

# Chapitre 1

## Rappels sur les Propriétés électriques de la matière

### 1.1 Rappels de calcul vectoriel

#### 1.1.1 Opérateurs vectoriels

Nous nous plaçons dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de la métrique euclidienne usuelle, et reporté à un repère cartésien orthonormé  $(O \vec{i} \vec{j} \vec{k})$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ .

- Si en tout point de  $\mathcal{D}$  on définit un réel  $U(x, y, z)$ , on dit que  $U$  est un champ de scalaires sur  $\mathcal{D}$ .

- Si en tout point de  $\mathcal{D}$  on définit un vecteur  $\vec{V}(x, y, z)$ , alors on a un champ de vecteurs sur  $\mathcal{D}$ .

Il existe un certain nombre d'opérateurs usuels, dit opérateurs vectoriels, qui à un champ de scalaires ou de vecteurs associent un autre champ de scalaires ou de vecteurs. Ce sont principalement, exprimés en coordonnées cartésiennes :

- le gradient :  $\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$

- la divergence :  $\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

- le rotationnel :  $\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$

- et le laplacien  $\Delta$  :

Scalaire :  $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

Vectoriel :  $\Delta \vec{V} = (\Delta V_x) \vec{i} + (\Delta V_y) \vec{j} + (\Delta V_z) \vec{k}$

Rappelons que tous ces opérateurs sont linéaires, on peut écrire leurs expressions à l'aide d'un opérateur "nabla"

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} U &= \vec{\nabla} U \\ \text{div } \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \\ \vec{\text{rot}} \vec{V} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \\ \Delta U &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) \end{aligned}$$

Par ailleurs on a l'expression de la différentielle totale de la fonction correspond à la somme des différentielles partielles

$$\begin{aligned} dU &= \partial_x U + \partial_y U + \partial_z U \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{y,z} dx + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{x,z} dy + \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{x,y} dz \end{aligned}$$

On définit alors le vecteur gradient de la fonction, en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

En remarquant que  $d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ , la différentielle totale de la fonction peut s'écrire comme le produit scalaire de deux vecteurs :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{l}$$

et du laplacien :

$$\begin{aligned}\Delta U &= \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}U) \\ \Delta \vec{V} &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{V})\end{aligned}$$

Le tableau suivant donne les différents opérateurs en coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques

Système de coordonnées	cartésienne $M(x, y, z)$	cylindrique $M(\rho, \theta, z)$	sphérique $M(r, \theta, \varphi)$
Base	$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$
$\overrightarrow{OM}$	$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$	$\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$	$r\vec{u}_r$
$d\overrightarrow{OM}$	$dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
$\vec{V}$	$V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y + V_z\vec{u}_z$	$V_\rho\vec{u}_\rho + V_\theta\vec{u}_\theta + V_z\vec{u}_z$	$V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta + V_\varphi\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla}$	$\vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\vec{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{u}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div} \vec{V}$	$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right]$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \text{rot} \vec{V}$	$\begin{vmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}$
$\Delta U$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

### 1.1.2 Champ dérivant de potentiels

- Soit un champ de vecteur  $\vec{V}$  défini sur  $\mathcal{D}$ . S'il existe un champ de scalaire  $U$ , défini également sur  $\mathcal{D}$ , tel qu'en tout point de  $\mathcal{D}$  on a :

$$\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$$

On dit que  $\vec{V}$  dérive du potentiel scalaire  $U$ . Il est facile de montrer que si  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel scalaire alors ;

$$\text{rot} \vec{V} = \vec{0}.$$

- Si maintenant, au champ  $\vec{V}$  on peut associer un autre champ vectoriel  $\vec{A}$  tel qu'en tout point de  $\mathcal{D}$  on a :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

alors  $\vec{V}$  dérive du potentiel vecteur  $\vec{A}$ . On montre que  $\text{div } \vec{V} = 0$ . Le tableau suivant donne quelques formules d'analyse vectorielle.

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$	$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{0}$
$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$	$\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$
$\text{div } (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$	$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$
$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \begin{matrix} \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} + \\ (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \end{matrix}$	$\text{div } (U \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U + U \text{div } \vec{V}$
$\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \begin{matrix} \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \\ (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \end{matrix}$	$\overrightarrow{\text{rot}} (U \vec{V}) = U \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} - \vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} U$

### 1.1.3 Intégrales vectorielles

- Soit un champ de vecteur  $\vec{V}$ , et un arc de courbe  $\mathcal{C}$ . On appelle circulation de  $\vec{V}$  le long de l'axe  $\widehat{AB}$  de  $\mathcal{C}$  l'intégrale

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

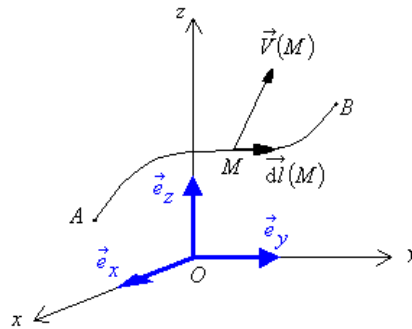


FIGURE 1.1 – circulation de  $\vec{V}$ .

$d\vec{l}$  étant l'élément de longueur porté par la tangente. En particulier si  $\vec{V}$  dérive du potentiel  $U$ ;

$$\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$$

donc

$$\mathcal{C}_{AB} = - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\vec{l} = -[dU]_A^B = U(A) - U(B)$$

Si la courbe est fermée, donc la circulation est nulle.

- Soit ce même champ de vecteur  $\vec{V}$  et une surface (S) quelconque,  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  un élément de cette surface. On appelle flux de  $\vec{V}$  à travers cette surface l'intégrale :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

le vecteur étant dirigé vers l'extérieur, càd de la concavité vers la convexité.

Deux formules importantes permettant dans certaines cas de réduire le degré des intégrales multiples.

- **Théorème de Stokes :**

Soient  $\vec{V}$  un champ de vecteurs,  $\mathcal{C}$  une courbe fermée et  $S$  une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

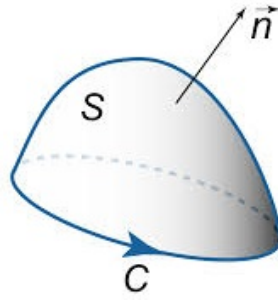


FIGURE 1.2 – flux de  $\vec{V}$ .

La circulation de  $\vec{V}$  le long de  $C$  est égale au flux de  $\text{rot} \vec{V}$  à travers  $S$ , quelle que soit la surface  $S$  s'appuyant sur  $C$ .

- **Théorème de Green Ostrogradski** : Soient  $\vec{V}$  un champ de vecteurs,  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  limité par la surface  $S$ , on a

$$\oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div} \vec{V} \cdot d\vartheta$$

Le flux de  $\vec{V}$  à travers  $S$  est égale à l'intégrale de  $\text{div} \vec{V}$  sur tout le domaine  $\mathcal{D}$ .

## 1.2 Rappels d'électrostatique

### 1.2.1 Densité de charges électriques

Il existe deux types de charges électriques :

- Deux corps portant le même type de charges électriques se repoussent.
- Deux corps portant des charges électriques de types différents s'attirent.

Pour distinguer ces deux types de charges l'une sera notée charge positive, l'autre charge négative.

La charge électrique macroscopique  $Q$  d'un corps comporte un nombre important de charges élémentaires  $e$  ( $Q = Ne$  avec  $N$  entier relatif très grand). Vu la faible dimension de cette charge élémentaire, on considère qu'à l'échelle macroscopique, la répartition de la charge  $Q$  se fait de façon continue sur le corps matériel. Cette répartition peut être modélisée par des densités de charges électriques qui dépendent de la géométrie du corps chargé (filiforme, surfacique ou volumique).

#### Distributions continues de charges avec une densité volumique $\rho$

C'est le cas d'un corps matériel de volume ( $\mathcal{V}$ ) pouvant être chargé par une quantité de charge  $Q$ . Cette charge peut être répartie uniformément dans le volume ( $\mathcal{V}$ ). Dans ce cas, la densité volumique de charge (charge par unité de volume), notée  $\rho$ , s'exprime par :

$$\rho = \frac{Q}{\mathcal{V}}$$

Si la répartition n'est pas uniforme, il est possible de définir en tout point  $M$  du volume ( $\mathcal{V}$ ) une densité volumique de charge  $\rho(M)$ . On considère alors un volume élémentaire  $d\mathcal{V}$  autour de  $M$  suffisamment petit. On peut alors écrire :

$$\rho(M) = \frac{dQ}{d\mathcal{V}}$$

La charge totale  $Q$  contenue dans le volume chargé  $\mathcal{V}$  est définie par l'intégrale suivante :

$$Q = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M) d\mathcal{V}$$

#### Distributions continues de charges avec une densité surfacique $\sigma$

C'est le cas d'un corps matériel de surface  $S$  pouvant être chargé avec une quantité de charge  $Q$ . Cette

charge peut être répartie uniformément sur la surface  $S$ . Dans ce cas, on définit la densité surfacique de charge (charge par unité de surface), notée  $\sigma$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Si la répartition n'est pas uniforme, On peut alors écrire :

$$\sigma(M) = \frac{dQ}{dS}$$

La charge totale portée par la surface chargée est donnée par la relation :

$$Q = \iint_{M \in S} \sigma(M) dS$$

### Distributions continues de charges avec une densité linéique $\lambda$

C'est le cas d'un corps matériel filiforme, de longueur  $L$  et de diamètre négligeable, pouvant être chargé par la quantité de charge  $Q$ . Cette charge peut être répartie uniformément sur le corps. On définit la densité linéique de charge (charge par unité de longueur), notée  $\lambda$

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Si la répartition n'est pas uniforme, On peut alors écrire :

$$\lambda(M) = \frac{dQ}{dl}$$

La charge totale portée par le fil chargé est donnée par la relation :

$$Q = \int_{M \in L} \lambda(M) dl$$

## 1.2.2 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb exprime la force électrique exercée entre deux charges ponctuelles en fonction de la valeur des charges et de la distance qui les sépare.

### Enoncé de la loi de Coulomb pour des charges ponctuelles

La force électrostatique entre deux charges électriques ponctuelles est proportionnelle à la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette interaction est portée par la droite qui joint les deux charges.

La force électrostatique  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  exercée par la charge ponctuelle en  $A$  sur celle située en  $B$  s'écrit :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}$$

avec :  $\vec{u}_{A \rightarrow B} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ ,  $\epsilon_0$  représente la permittivité du vide ou constante diélectrique du vide.

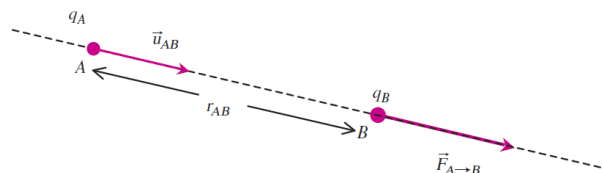


FIGURE 1.3 – Action d'une charge ponctuelle  $q_A$  située en  $A$  sur une charge ponctuelle  $q_B$  située en  $B$ .

### Principe de superposition

Lorsqu'un système comporte  $N$  charges ponctuelles  $\{q_i\}_{i=1,N}$  placées en des points  $\{A_i\}_{i=1,N}$ , la résultante



$\vec{F}_k$  des forces électrostatiques sur une charge  $q_k$  du système est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par chaque charge  $q_i$  ( $i \neq k$ ) :

$$\vec{F}_k = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq k}^{i=1,N} \frac{q_i}{r_{ik}^2} \vec{u}_{i \rightarrow k}$$

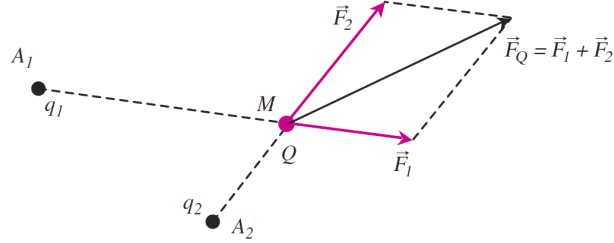


FIGURE 1.4 – La charge  $Q$  en  $M$  subit l'action  $\vec{F}_1$  de la charge  $q_1$  en  $A_1$  et  $\vec{F}_2$  de la charge  $q_2$  en  $A_2$ . La force résultante  $\vec{F}_Q$  agissant sur la charge  $Q$  est égale à la somme vectorielle des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ .

## 1.3 Champ et potentiel électrostatiques

### 1.3.1 Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle

La force électrostatique qui s'exerce par la charge  $Q$  placée en  $(O)$  sur la charge test  $q$  placée en  $(M)$  est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r_{OM}^2} \vec{u}_{O \rightarrow M} = q \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{O \rightarrow M}}{r_{OM}^2} \right]$$

Dans cette expression, le terme entre crochets ne dépend que de la valeur de la charge  $Q$ , de la nature du milieu environnant  $\epsilon_0$  et du point  $M$  de l'espace. C'est donc une caractéristique liée à la charge  $Q$  et représente le champ électrique créé dans son environnement.

Le champ électrostatique créé, en un point  $M$  de l'espace, par une charge ponctuelle  $Q$  placée en un point  $O$ , est défini par :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{O \rightarrow M}}{r_{OM}^2}$$

La force subie par une charge ponctuelle test  $q$  placée en  $M$  peut donc s'exprimer par :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = q\vec{E}(M)$$

La circulation élémentaire  $\delta C$  du champ  $\vec{E}(M)$  est par définition :

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

En utilisant l'expression  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + d\vec{l}_\perp$  du déplacement élémentaire on obtient :

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \cdot (dr\vec{u}_r + d\vec{l}_\perp) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

En remarquant que  $\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$ , On obtient :

$$\delta C = -d\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

La circulation du champ électrostatique entre deux positions peut s'écrire comme l'opposé de la variation d'une fonction  $V$  appelée potentiel électrostatique.

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \\ &= V(A) - V(B) = -\Delta(V) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à définir le potentiel électrostatique par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_M} + cte$$

La différentielle du potentiel peut s'écrire

$$dV(M) = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot d\vec{l} = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Ce qui implique que

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

### Champ et potentiel créés par une répartition volumique de charges électriques

Le volume  $\mathcal{V}$  chargé avec une densité volumique de charge  $\rho(p)$  tel que  $dq = \rho(p) d\mathcal{V}$

Champ élémentaire :

$$d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(p) \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\mathcal{V}$$

Champ résultant :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \mathcal{V}} d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\mathcal{V}$$

Potentiel élémentaire :

$$dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(p)}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(p)}{PM} d\mathcal{V}$$

Potentiel résultant :

$$V(M) = \int_{P \in \mathcal{V}} dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{PM} d\mathcal{V}$$

### Champ et potentiel créés par une répartition surfacique de charges électriques

Soit une surface  $S$  chargée avec une densité surfacique de charge  $\sigma(P)$ . La charge élémentaire  $dq$  portée par une surface élémentaire  $dS$  autour d'un point  $M$  est  $dq = \sigma(P) dS$  :

Champ élémentaire :

$$d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$$

Champ résultant :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in S} d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in S} \frac{\sigma(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$$

Potentiel élémentaire :

$$dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(p)}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

Potentiel résultant :

$$V(M) = \int_{P \in S} dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in S} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

### Champ et potentiel créés par une répartition linéique de charges électriques

Courbe  $C$ , longueur  $L$  avec une densité linéique de charge  $\lambda(P)$  tel que  $dq = \lambda(P) dL$ .

Champ élémentaire :

$$d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} dL$$

Champ résultant :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in C} d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\lambda(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} dL$$

Potentiel élémentaire :

$$dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(p)}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)}{PM} dL$$

Potentiel résultant :

$$V(M) = \int_{P \in C} dV_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\lambda(P)}{PM} dL.$$

Les calculs permettant de déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés par une distribution de charges peuvent très rapidement se révéler compliqués. En fait, par une étude des symétries liées à la répartition des charges il est possible de simplifier ces calculs.

### 1.3.2 Propriété de symétrie

Le calcul analytique des champs et potentiels électrostatiques créés par des distributions de charges n'est pas toujours aisé et le recours à des considérations de symétrie peut s'avérer incontournable.

Nous allons considérer le cas où la distribution de charges électriques présente :

- un plan de symétrie
- un plan d'anti-symétrie
- une invariance par translation parallèlement à un axe
- une invariance par rotation autour d'un axe.

#### Symétrie plane : Transformée d'une grandeur scalaire (potentiel électrostatique)

On considère deux points  $M$  et  $M_S$  placés symétriquement par rapport à un plan  $(\pi)$ .

Si la charge  $q(M)$  (ou la densité de charge  $\rho(M)$ ) située en  $M$  est égale à la charge  $q(M_S)$  (ou à la densité de charge  $\rho(M_S)$ ) située en  $M_S$  alors le plan est un plan de symétrie  $(\pi_S)$ .

Si la charge  $q(M)$  (ou la densité de charge  $\rho(M)$ ) située en  $M$  est égale à l'opposé de la charge  $q(M_S)$  (ou la densité de charge  $\rho(M_S)$ ) située en  $M_S$  alors le plan est un plan d'anti-symétrie  $(\pi_{AS})$ .

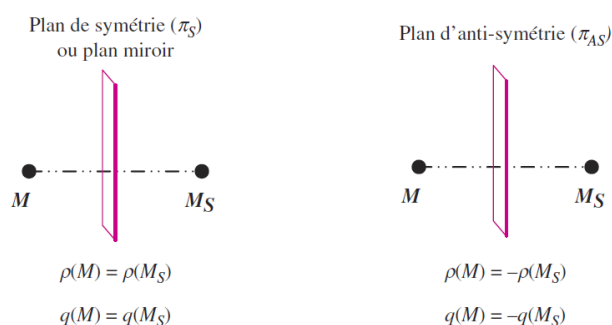


FIGURE 1.5 – Plan de symétrie  $(\pi_S)$  et d'anti-symétrie  $(\pi_{AS})$ . Le point  $M_S$  est le symétrique de  $M$  par rapport aux plans  $(\pi_S)$  et  $(\pi_{AS})$ .

Une transformation par un plan de symétrie  $(\pi_S)$  laisse inchangée une grandeur scalaire telle que le potentiel électrostatique. Une transformation par un plan d'anti-symétrie  $(\pi_{AS})$  change une grandeur scalaire

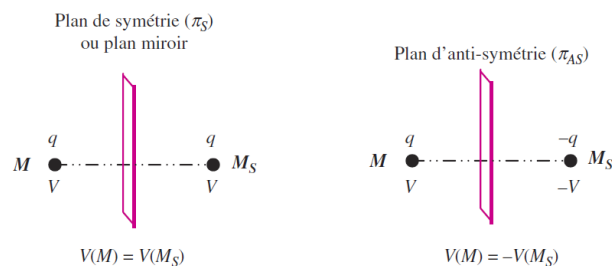


FIGURE 1.6 – Plan de symétrie  $(\pi_S)$  et d'anti-symétrie  $(\pi_{AS})$ . Le point  $M_S$  est le symétrique de  $M$  par rapport aux plans  $(\pi_S)$  et  $(\pi_{AS})$ .

(telle que le potentiel électrostatique) en son oppose.

Si le point  $M$  est dans le plan d'anti-symétrie il se confond avec son symétrique  $M_S$ . On a alors :

$$M \in \pi_{AS} \rightarrow V(M) = -V(M_S) = -V(M) \Rightarrow V(M) = 0$$

Le potentiel est nul dans un plan d'anti-symétrie pour les charges.

### Symétrie plane : Transformée d'une grandeur vectorielle (champ électrostatique)

La symétrie plane transforme une grandeur vectorielle comme dans un miroir Par rapport à un plan de

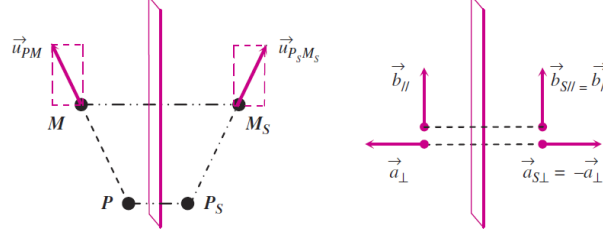


FIGURE 1.7 – Transformation d'un vecteur par une symétrie plane.

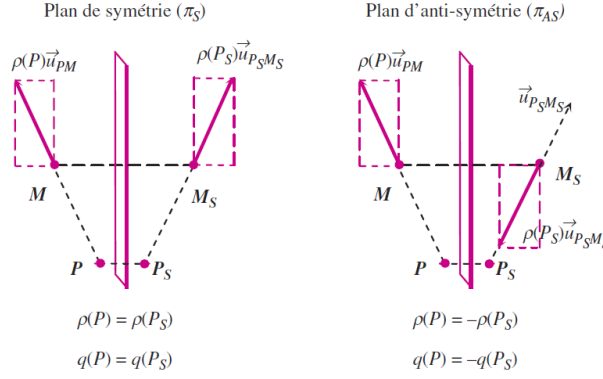


FIGURE 1.8 – Transformation d'un vecteur multiplié par un scalaire par un plan de symétrie ( $\pi_S$ ) et par un plan d'anti-symétrie ( $\pi_{AS}$ ). Dans ce cas on a choisi  $\rho(P)$  ou  $q(P) > 0$ .

symétrie pour les charges, le vecteur champ électrostatique se transforme comme dans un miroir. Si le point

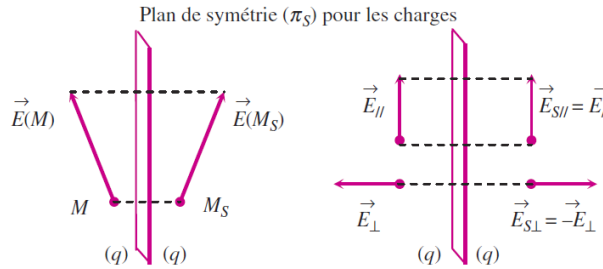


FIGURE 1.9 – Transformation du vecteur champ électrostatique par un plan de symétrie ( $\pi_S$ ).

$M$  appartient au plan de symétrie il se confond avec son symétrique  $M_S$ . Le vecteur champ électrostatique est dans le plan de symétrie. Le vecteur champ électrostatique n'a pas de composante dans le plan d'anti-symétrie : il est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie.

### Invariance par translation

Il y a invariance par translation parallèlement à un axe  $\Delta$  confondu avec l'axe  $Oz$  d'un repère cartésien si la densité de charges  $\rho$  reste inchangée lorsqu'on passe d'un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  à un point  $M'$

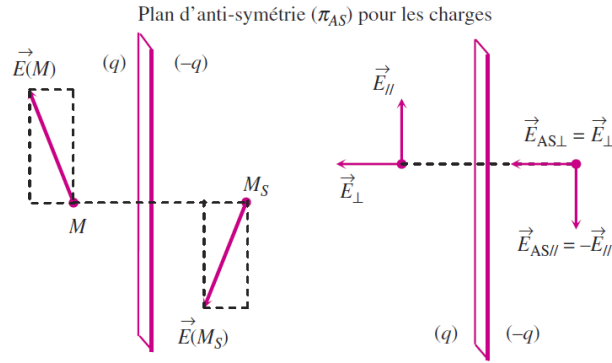


FIGURE 1.10 – Transformation du vecteur champ électrostatique par un plan d'anti-symétrie ( $\pi_{AS}$ ).

de coordonnées  $(x, y, z')$ . On peut donc écrire pour tout  $z$  et  $z'$

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y, z')$$

Dans ces conditions, le potentiel électrostatique  $V(M)$  et le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  restent inchangés par translation le long de l'axe  $Oz$  :

$$\begin{aligned} V(M) &= V(x, y, z) = V(x, y) \\ \vec{E}(M) &= \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) \end{aligned}$$

### Invariance par rotation

La densité de charges électrique  $\rho(M)$  est invariante par l'opération  $C_\infty^\Delta$  si, pour une rotation d'un angle quelconque autour de l'axe  $\Delta$  qui déplace  $M$  en un point  $M'$ , la densité reste inchangée :  $\rho(M) = \rho(M')$ . Dans ces conditions, le potentiel électrostatique  $V(M)$  reste inchangé par rotation autour de l'axe de symétrie  $Oz$  et ne dépend donc pas de la variable  $\theta$ . De même, par rotation autour de l'axe  $\Delta$  qui amène un point  $M$  en  $M'$ , le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  se superpose au vecteur champ électrostatique  $\vec{E}(M')$ . Ces grandeurs ne dépendent pas de la variable  $\theta$ .

$$\begin{aligned} V(M) &= V(r, \theta, z) = V(r, z) \\ E(M) &= E(r, \theta, z) = E(r, z) \end{aligned}$$

Remarque : Tout plan contenant un axe de symétrie de révolution est un plan de symétrie.

Si le point  $M$  est sur un axe de symétrie : Le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  devant se superposer à lui-même par une rotation quelconque il faut nécessairement que le champ électrostatique soit suivant l'axe de symétrie.

### Récapitulatif

Si le point  $M$  appartient à :

- un plan de symétrie des charges alors :  $\vec{E}(M)$  est dans le plan
- un plan d'anti-symétrie des charges alors :  $\vec{E}(M)$  est perpendiculaire au plan et le potentiel est nul
- deux plans de symétrie des charges alors  $\vec{E}(M)$  est suivant la droite commune aux deux plans
- un axe de symétrie des charges alors  $\vec{E}(M)$  est suivant cet axe

Si la répartition des charges est invariante :

- par translation suivant une direction  $Oz$  alors le champ et le potentiel ne dépendent pas de la variable  $z$
- par rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe  $Oz$  alors le champ et le potentiel ne dépendent pas de la variable  $\theta$

## 1.4 Théorème de Gauss

### 1.4.1 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle  $Q$  située en un point  $O$  de l'espace. Le vecteur champ électrostatique en un point  $M$  a pour expression

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{OM}}{r^2}, \quad OM = r$$

On considère une surface élémentaire  $dS$  orientée par sa normale  $\vec{n}$ . Le flux élémentaire du champ électrostatique à travers la surface élémentaire  $dS$  est :

$$d\Phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(r) \vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} dS}{r^2}$$

### 1.4.2 Théorème de Gauss

Dans le vide, le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée  $S$  quelconque délimitant un volume intérieur fini  $\mathcal{V}_{int}$  est égale à la somme algébrique  $Q_{int}$  des charges dans ce volume divisé par  $\epsilon_0$ .

$$\Phi = \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

La surface fermée choisie est appelée "Surface de Gauss".

Si le champ  $\vec{E}$  est créé par une distribution continue de charge, on aura,  $\mathcal{V}$  étant le volume intérieur à  $S$  :

$$\Phi = \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M) dV$$

on applique le théorème de la divergence

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E}(M) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M) dV$$

Le volume d'intégration  $\mathcal{V}$ , de même que la surface de Gauss  $S$ , est quelconque. L'identité des deux intégrales (portant toutes les deux sur ce même volume  $\mathcal{V}$  d'intégration) implique la relation :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

qui constitue la forme locale du théorème de Gauss. Puisqu'elle relie deux grandeurs prises au même point, et en un seul point.

## Chapitre 2

# Magnétostatique dans le vide

### 2.1 Historique

L'électromagnétisme est la branche de la physique qui étudie les effets de l'électricité, en englobant les effets dépendants ou indépendants du temps. Elle est née à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, de la découverte des effets magnétiques de l'électricité et de la mise en évidence d'un lien entre des phénomènes électriques et magnétiques.

Avant la découverte de l'électromagnétisme, les effets de l'électricité étaient traités dans des registres différents selon qu'ils étaient générés respectivement par des forces électriques ou par des forces magnétiques. En 1864 James Maxwell unifiait des lois antérieures de l'électrostatique, de l'électrocinétique et de la magnétostatique, en une théorie permettant d'expliquer la propagation des ondes électromagnétiques. Cette théorie unifiée a donné naissance à l'électromagnétisme et s'est imposée au fil des ans comme l'une des grandes branches de la physique.

Comme pour la force électrostatique et l'interaction gravitationnelle, l'interaction magnétique peut se modéliser par la présence d'un champ : ainsi, un aimant crée un champ magnétique dans l'espace qui l'environne et un objet placé dans ce champ peut interagir avec cet aimant comme une charge  $q$  interagit avec une autre charge  $Q$  lorsqu'elle se trouve dans une région où règne un champ créé par  $Q$ .

Nous allons voir que les phénomènes électriques et magnétiques sont intimement liés, à un point tel qu'ils sont en réalité deux facettes d'une seule et même caractéristique du monde physique qui nous entoure : l'électromagnétisme.

#### 2.1.1 Aimants : sources de champ magnétique

Comme pour l'électrostatique, les premières observations concernant les phénomènes de magnétisme remontent à l'antiquité. Des corps naturels tels que la magnétite (ou oxyde de fer  $Fe_3O_4$ ) ont la propriété d'attirer des morceaux de fer. Ce sont les aimants naturels.

Les substances attirées par l'aimant sont dites "magnétiques". On trouve principalement le fer, le cobalt, le nickel, et certains de leurs composés. Convenablement traités, ces corps magnétiques peuvent donner naissance à des aimants artificiels.

#### 2.1.2 Propriétés du champ magnétique :

*Similarités* avec la force électrique

1. Il y a 2 types de pôles
2. Les pôles opposés s'attirent, les pôles similaires se repoussent

*Différence*

3. Ils n'existent qu'en paires

Une charge électrique  $q$  au repos crée en  $M$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  un *champ électrostatique* En divisant progres-

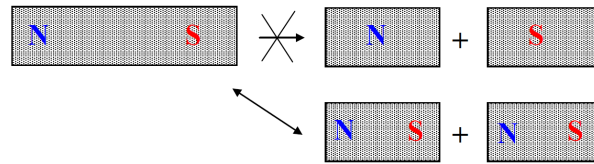


FIGURE 2.1 – Aimant.

sivement le dipôle électrostatique, on arrive à séparer les charge électriques ; pour les aimants, personne n'est encore arrivé à séparer les pôles magnétiques.

**Direction et sens du vecteur champ magnétique :** La direction et le sens du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en un point M de l'espace sont ceux de l'orientation (Sud-Nord) qu'indique une petite boussole placée en ce point.

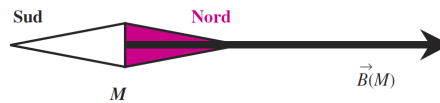


FIGURE 2.2 – La direction Sud nord de l'aiguille d'une boussole placée en un point M indique le sens et la direction du champ magnétique en ce point.

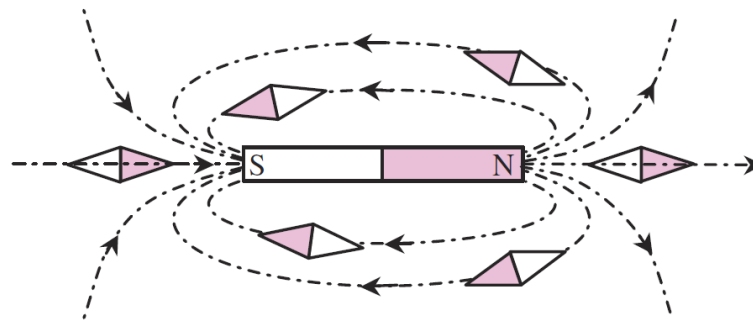


FIGURE 2.3 – Les lignes de champ magnétique sortent par le pôle nord de l'aimant et rentrent dans le pôle sud.

## 2.2 Les forces magnétiques

La mesure d'un champ passe par la mesure des effets que produit ce champ. A titre d'exemples, on peut citer :

- le champ électrique  $\vec{E}$  se définit à partir de la force électrostatique exercée par le champ sur une charge électrique q :  $\vec{F}_E = q\vec{E}$
- le champ de pesanteur  $\vec{g}$  se définit à partir de la force exercée par la Terre sur une masse m (poids d'une masse m) :  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
- En 1820, Hans Christian Oersted fait l'observation suivante : un fil parcouru par un courant dévie l'aiguille d'une boussole placée a proximité. Cette expérience démontrait alors qu'un courant électrique peut générer un champ magnétique dans l'espace environnant :

1. Le courant électrique crée une force sur l'aimant. Sans courant – aucune force
2. Charges sans mouvements : pas de champ magnétique ; champ magnétique n'exerce pas de force sur les charges au repos.



## 2.2.1 La force de Laplace

### Cas d'une charge électrique $q$ en mouvement

La force de Laplace est la force subie par une charge électrique  $q$  en mouvement placée dans un champ magnétique.

Soit  $q$  une charge électrique située en un point  $M$ , animée d'un vecteur vitesse  $\vec{v}$  et soit  $\vec{B}$  le champ magnétique régnant au point  $M$ . La charge  $q$  subit une force  $\vec{F}_L$  dite de Laplace telle que :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette force permet de définir le champ  $\vec{B}$  (par l'intermédiaire de la charge test  $q$ , de la même manière qu'en électrostatique).

Compte tenu des propriétés du produit vectoriel, la force magnétique est orthogonale au plan formé par le vecteur vitesse et le vecteur champ magnétique. Par ailleurs, son intensité est déterminée par l'expression :

$$F_L = qvB \sin \alpha$$

Où  $\alpha$  représente l'angle formé par les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$ . Le sens de la force magnétique est déterminé en imaginant la progression d'un tirebouchon qui tournerait de  $\vec{v}$  vers  $\vec{B}$ .

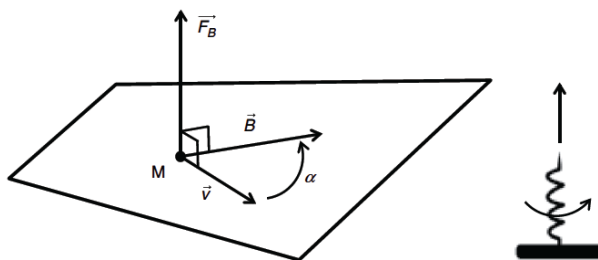


FIGURE 2.4 – Illustration du sens de la force magnétique.

### Cas d'un conducteur parcouru par un courant

La force de Laplace élémentaire  $d\vec{F}_L$  qui agit sur une portion  $d\vec{l}$  élémentaire d'un fil conducteur orienté parcouru par un courant d'intensité algébrique  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrit :

$$d\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

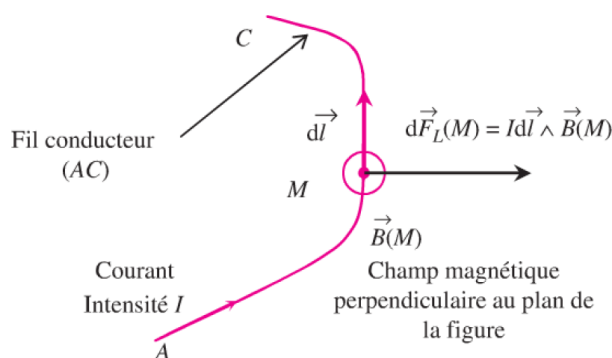


FIGURE 2.5 – Force de Laplace élémentaire exercée par un champ magnétique sur la portion élémentaire  $dl$  d'un conducteur parcouru par un courant  $I$

*Propriétés :*

- Le fil conducteur étant orienté, l'intensité  $I$  est une grandeur algébrique : elle est positive si le courant circule dans le sens positif choisi pour le conducteur.

- La force de Laplace est perpendiculaire à l'élément de courant  $I d\vec{l}$  et au champ magnétique  $\vec{B}$  : cette force est perpendiculaire au plan défini par le conducteur et le champ magnétique.
- L'ensemble  $(I d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F}_L)$  forme un trièdre direct.

La force de Laplace résultante  $\vec{F}_L$  appliquée sur un conducteur  $(AC)$  s'obtient par ;

$$\vec{F}_L = \int_A^C d\vec{F}_L = \int_A^C (I d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

### 2.2.2 La Force de Lorentz

Si la charge  $q$  est soumise à la fois à un champ électrique  $\vec{E}$  et à un champ magnétique  $\vec{B}$ , elle subit non seulement l'interaction magnétique, mais également une force électrostatique. Dans ces conditions, la force globale subie par la charge  $q$  résulte donc à la fois de l'interaction électrostatique et de l'interaction magnétique. Elle est alors appelée force de Lorentz et a donc pour expression :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

### 2.2.3 Travail de la force de Lorentz et énergie mécanique

Le travail élémentaire est

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

où  $d\vec{OM}$  est un déplacement élémentaire de la charge située en  $M$ , l'origine du repère étant en  $O$ . La vitesse  $\vec{v}$  est reliée à  $d\vec{OM}$  par  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} dW &= q\vec{E} \cdot d\vec{OM} + (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} \\ &= q\vec{E} \cdot \vec{v} dt + (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \\ &= q\vec{E} \cdot \vec{v} dt \end{aligned}$$

La puissance de la force de Lorentz est

$$\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (\text{en Watts})$$

La force magnétique ne travaille pas ; sa puissance est nulle ; seule la force électrique travaille.

## 2.3 Les sources du champ magnétique

Le but est d'étudier les champs magnétiques créés par des conducteurs parcourus par des courants. Ces courants peuvent être volumiques, surfaciques ou linéiques.

### 2.3.1 Rappel : Courant électrique

Des charges en mouvements constituent des courants. On définit l'intensité du courant à l'instant  $t$  comme la vitesse d'écoulement des charges ;

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Où  $dQ$  est la charge qui traverse une section du conducteur à l'instant  $dt$ .  $I$  s'exprime en ampère.

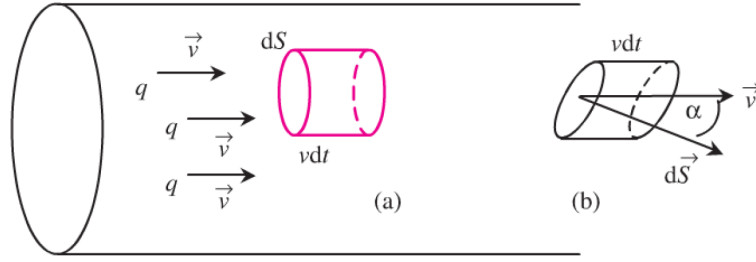


FIGURE 2.6 – Flux de charges mobile à travers une surface

### 2.3.2 Répartition volumique de courant :

Un courant électrique correspond à un déplacement de charges électriques élémentaires. L'intensité d'un courant est liée au débit ou flux des charges mobiles. Dans un conducteur, les charges mobiles  $q$ , de densité volumique  $n$ , se déplacent à la vitesse  $\vec{v}$ . La densité de courant  $j$  correspond à la quantité de charges qui traversent par unité de temps une section droite de surface unité (flux de charges par unité de temps et de surface). Si  $dQ$  est la charge élémentaire qui traverse pendant la durée  $dt$  une section élémentaire de surface  $dS$  perpendiculaire au déplacement des charges mobiles (figure 2.6 a) on a par définition :

$$j = \frac{dQ}{dS dt}$$

La charge  $dQ$  est aussi celle qui est située dans un volume élémentaire  $d\vartheta$  de section  $dS$  et de longueur  $vdt$ . On a donc :  $dQ = nq d\vartheta = nq dS v dt$  soit :

$$j = nqv$$

Le vecteur densité de courant se définit simplement par :

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

Ce vecteur a pour direction le sens de déplacement des charges positives et il est de sens opposé au déplacement de charges négatives.

Dans le cas général où la surface  $dS$  n'est pas perpendiculaire au déplacement des charges (figure 2.6 b) le volume  $d\vartheta$  qui correspond à la base par la hauteur peut s'écrire :

$$d\vartheta = v \cos \alpha dS dt = d\vec{S} \vec{v} dt$$

La charges  $dQ/dt$  qui traverse par unité de temps la surface  $dS$  s'écrit alors :

$$\frac{dQ}{dt} = nq \frac{d\vartheta}{dt} = nq d\vec{S} \vec{v} = \rho \vec{v} d\vec{S} = \vec{j} d\vec{S}$$

Où  $\rho = nq$  est la densité volumique. L'intensité  $I$  d'un courant parcourant un conducteur correspond à la charge électrique qui traverse une section  $S$  du conducteur par unité de temps c'est-à-dire au flux du vecteur densité de courant à travers cette surface.

$$I = \iint_S \vec{j} d\vec{S}.$$

**Flux de  $\vec{j}$  et conservation de la charge :** On considère un volume  $\vartheta$  délimité par une surface fermée  $S$ . Soit  $\rho$  la densité volumique de charges mobiles dans le milieu. La charge totale  $Q(t)$  comprise dans le volume à l'instant  $t$  est :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\vartheta$$

La conservation de la charge électrique permet d'écrire :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -I(t), \text{ à travers } S$$

Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{\vartheta} \rho(M, t) d\vartheta \right) = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Le volume  $\vartheta$  étant fixe :

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{\vartheta} \rho(M, t) d\vartheta \right) = \iiint_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial t} \rho(M, t) d\vartheta$$

Finalement, le principe de conservation de la charge conduit à :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(M, t) d\vartheta = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

### 2.3.3 Répartition linéique de courant :

Ce type de distribution se trouve dans des fils électriques idéalisés en négligeant leur diamètre. Un élément de courant filiforme (figure 2.7) de longueur vectorielle  $d\vec{l}$  a en fait une section  $dS$  très faible mais non nulle ; il est donc limité par un vecteur surface  $d\vec{S}$  parallèle à  $d\vec{l}$ . De plus il canalise le courant, donc  $\vec{j}$  est parallèle à  $d\vec{l}$ , notons donc  $\vec{u}$  le vecteur unitaire tel que ;  $\vec{j} = j\vec{u}$ . L'intensité est  $I = j dS$  et le volume  $d\vartheta = dl dS$ . On

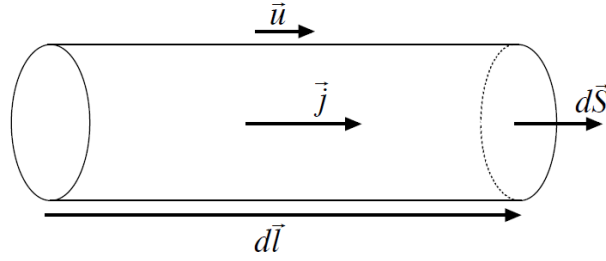


FIGURE 2.7 – *Element de courant filiforme*

peut écrire :

$$\vec{j} d\vartheta = (j\vec{u}) (dl dS) = (j dS) (dl \vec{u}) = I d\vec{l}$$

L'élément de courant peut donc se noter ici  $I d\vec{l}$ .

On définit alors la densité linéique de charge par  $\lambda = \frac{dq}{dl}$ .

### 2.3.4 Répartition surfacique de courant :

Un élément de courant surfacique (figure 2.8) de longueur vectorielle  $d\vec{L}$  dans le sens du courant et une largeur  $dl$ , a en fait une épaisseur  $\varepsilon$  très faible mais non nulle ; le courant traverse donc une surface  $dl\varepsilon$ . La densité de courant et la longueur sont parallèles tel que ;  $\vec{j} = j\vec{u}$  et  $d\vec{L} = dL\vec{u}$ . L'intensité est alors  $I = j dl\varepsilon$ , la surface de l'élément, épaisseur négligée, a pour valeur  $dS = dl dL$  et son volume, épaisseur non négligée, est  $d\vartheta = dl dL \varepsilon$ .

On introduit une densité de courant surfacique, notée  $\vec{j}_S = \frac{I}{dl} \vec{u} = j\varepsilon \vec{u} = \varepsilon \vec{j}$ .

Donc on peut écrire :

$$\vec{j} d\vartheta = (j\vec{u}) (dl dL \varepsilon) = \left( \vec{j}_S \right) (dl dL) = \vec{j}_S dS$$

L'élément de courant peut donc se noter ici  $\vec{j}_S dS$ .

On définit alors la densité surfacique de charge par  $\sigma = \frac{dq}{dS}$  :

#### Remarque

habituellement,  $d\vec{S}$  est vectoriel et normal à la surface ; ici  $dS$  est scalaire et l'élément de courant tangentiel, dans le sens du courant.

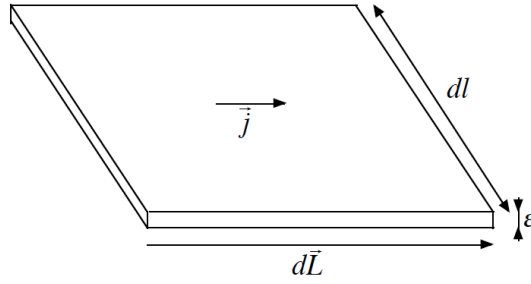


FIGURE 2.8 – *Element de courant surfacique*

## 2.4 Propriétés du champs magnétostatiques :

La magnétostatique étudie l'apparition d'un champ magnétique en présence de courants permanents. Ces courants permanents caractérisent des déplacements de charges constants et qui ne dépendent pas du temps.

- le champ électrique, lorsque toutes les charges qui créent ce champ sont immobiles : c'est le domaine de l'électrostatique ;
- le champ magnétique, lorsque les courants qui créent ce champ sont constants dans le temps : c'est le domaine de la magnétostatique.

### 2.4.1 Définition : Loi de Biot et Savart

Jean Baptiste Biot et Félix Savart ; montre lorsqu'un courant constant d'intensité  $I$  traverse un circuit filiforme de longueur élémentaire  $dl$ , ce conducteur crée en tout point  $M$  de l'espace environnant un champ d'induction magnétique donné par :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{PM}}{PM}$  et  $r$  est la distance séparant l'élément de courant du point  $M$ . Cette loi démontre que les courants électriques sont des sources de champ magnétique.

Pour obtenir le champ total en un point  $M$  il faut ajouter la contribution de tous les éléments de courant constituant le circuit. On a alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Il est parfois commode d'exprimer cette relation en fonction de la densité de courant  $\vec{j}$  dans le fil conducteur. Suivant le type de distribution, nous écrirons ce champ sous l'une des formes suivantes.

*Distribution volumique*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{p \in V} \vec{j}(p) \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} d\vartheta$$

*Distribution surfacique*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \vec{j}_S(p) \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} dS$$

*Distribution filiforme*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C Id\vec{P} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

**Propriétés :**

- $B \perp dl$ ,  $r$  (la triade  $dl$ ,  $r$ ,  $B$  est directe).
- $B \sim I$
- $B \sim \frac{1}{r^2}$
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  : perméabilité magnétique du vide
- $\mu_0$  est reliée à la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la relation  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

-  $B[T - Tesla] : 1T = 1N/(1A1m)$

## 2.4.2 Règles de l'observateur d'Ampère et de la main droite

### Règle de l'observateur d'Ampère

Bien que la direction et le sens de  $\vec{B}(M)$  soient facilement déterminables par le fait que ce champ est le résultat d'un produit vectoriel, on utilise parfois la règle dite de l'observateur d'Ampère (ou plus familièrement du bonhomme d'Ampère) pour les déterminer. Un observateur placé sur le conducteur de telle sorte qu'il soit traversé par le courant  $i$  des pieds à la tête et faisant face au point  $M$ , " voit " le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  dirigé vers sa gauche (voir figure).

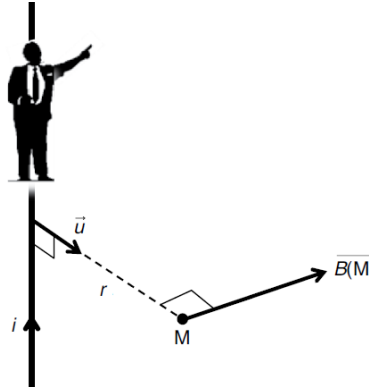


FIGURE 2.9 – Règle de l'observateur d'Ampère

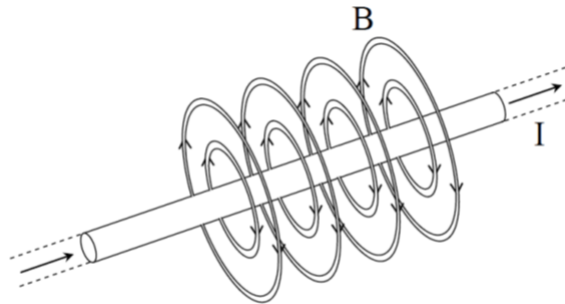


FIGURE 2.10 – Champ magnétique créé par un segment de courant.

### Règle de la main droite (aussi appelée règle du tire-bouchon) :

Cette règle permet de déterminer la direction du champ magnétique connaissant le sens du courant. Imaginons qu'on ferme la main droite sur le courant avec le pouce dans la direction de circulation : le champ magnétique est alors dans la direction indiquée par les autres doigts. Ou encore : les doigts étant repliés dans la direction du courant, le pouce indique la direction du champ au centre de la boucle.

#### Exemple :

Un fil infiniment long porte un courant  $I$  selon l'axe  $z$ . Calculer le champ magnétique à un point  $P$  quelconque (voir figure (2.11)). Il faut calculer  $R$  et  $\vec{u}$ , et aussi  $I d\vec{l}$ . En coordonnées cylindriques,  $R$  est donné par :

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \text{ et le vecteur unitaire } \vec{u} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

L'élément  $I d\vec{l}$  est dans la direction  $z$

$$I d\vec{l} = I dz \vec{e}_z$$

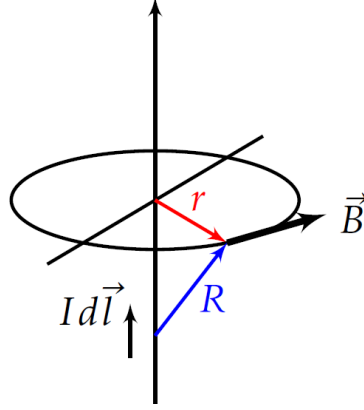


FIGURE 2.11 – fil infiniment long porte un courant  $I$

L'élément différentiel du champ magnétique est donc :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} Idz\vec{e}_z \wedge \frac{(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Irdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Pour trouver le champ total, on fait l'intégrale, selon  $z$  :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Irdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

(voir document :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$ )

### 2.4.3 Propriétés de symétrie des distributions de courants

Tout comme pour le champ électrostatique, la connaissance des symétries et invariances que présentent les sources permet de déduire certaines caractéristiques du champ résultant.

D'après la loi de Biot et Savart le champ magnétique élémentaire est proportionnel à un produit vectoriel ( $\vec{j}(p) \wedge \vec{u}$  ou  $Id\vec{l} \wedge \vec{u}$ ). L'étude du comportement du produit vectoriel pour différentes symétries permet de déduire les propriétés de symétrie que présente le champ magnétique résultant. Ces propriétés sont différentes de celles du champ électrostatique.

#### Plan de symétrie ( $\pi_s$ ) ou plan miroir pour les courants

La figure 2.12 montre comment le produit vectoriel se transforme par rapport à un plan de symétrie. On constate qu'un plan de symétrie se comporte comme un plan d'anti-symétrie pour le produit vectoriel donc pour le champ magnétique.

Un plan de symétrie pour les courants (voir 2.12 et 2.13 )

- transforme la composante du vecteur champ magnétique parallèle au plan en son opposé :  $B_{S//} = -B_{//}$
- laisse inchangée la composante du vecteur champ magnétique perpendiculaire au plan :  $B_{S\perp} = B_{\perp}$

Si le point  $M$  est dans le plan de symétrie il se confond avec son symétrique  $M_S$ . On a alors :

$$\left. \begin{array}{ll} M \text{ et } M_S \text{ symétriques}/\pi_s & \Rightarrow \vec{B}_{//}(M_S) = -\vec{B}_{//}(M) \\ M \in \pi_s, M \equiv M_S & \Rightarrow \vec{B}_{//}(M_S) = \vec{B}_{//}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$$

Le vecteur champ magnétique n'a pas de composante dans le plan de symétrie : il est perpendiculaire au plan de symétrie.

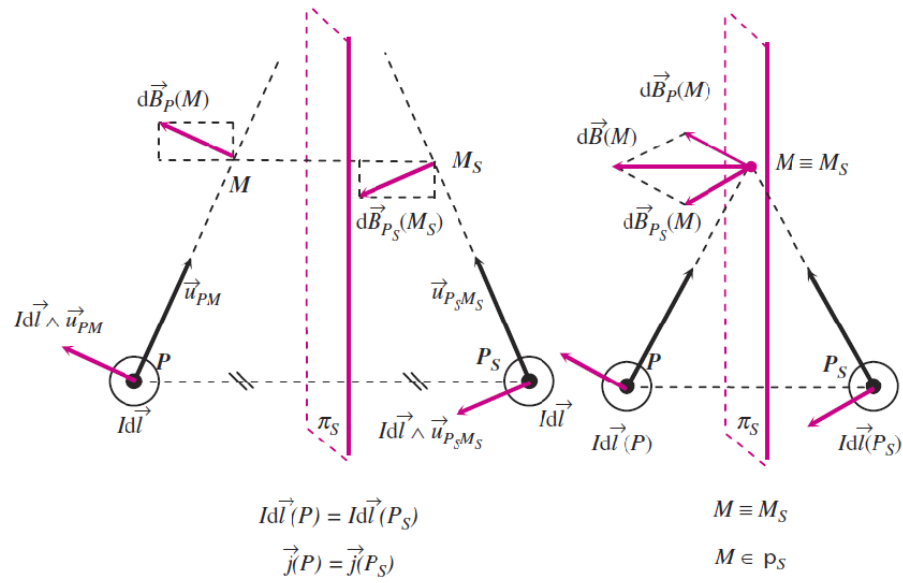


FIGURE 2.12 – Transformation du produit vectoriel par un plan de symétrie ( $\pi_s$ ). Les points  $P_S$  et  $M_S$  sont respectivement les symétriques des points  $P$  et  $M$  par rapport au plan  $\pi_s$ . Les courants sont symétriques par rapport à ce plan.

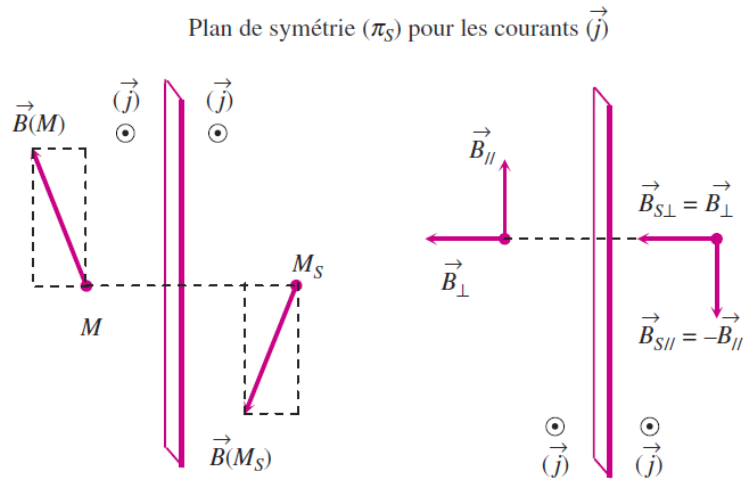


FIGURE 2.13 – Transformation du vecteur champ magnétique par un plan de symétrie  $\pi_s$



### Plan d'anti-symétrie $\pi_{AS}$ pour les courants

La figure (2.14) montre comment le produit vectoriel se transforme par rapport à un plan d'anti-symétrie. On constate qu'un plan d'antisymétrie se comporte comme un plan de symétrie pour le produit vectoriel donc pour le champ magnétique.

Un plan d'anti-symétrie pour les courants ( figures 2.14 et 2.15) :

- laisse inchangée la composante du vecteur champ magnétique parallèle au plan :  $B_{AS//} = B_{//}$
- transforme la composante du vecteur champ magnétique perpendiculaire au plan en son opposé :  $B_{AS\perp} = -B_{\perp}$ .

On remarque que par rapport à un plan d'antisymétrie le vecteur champ magnétique se transforme comme dans un miroir.

Si le point  $M$  est dans le plan d'anti-symétrie il se confond avec son symétrique  $M_S$ . On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ et } M_S \text{ symétriques}/\pi_{AS} \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M_S) = -\vec{B}_{\perp}(M) \\ M \in \pi_{AS}, M \equiv M_S \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M_S) = \vec{B}_{\perp}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$$

Le vecteur champ magnétique n'a pas de composante perpendiculaire au plan d'anti-symétrie : il est dans

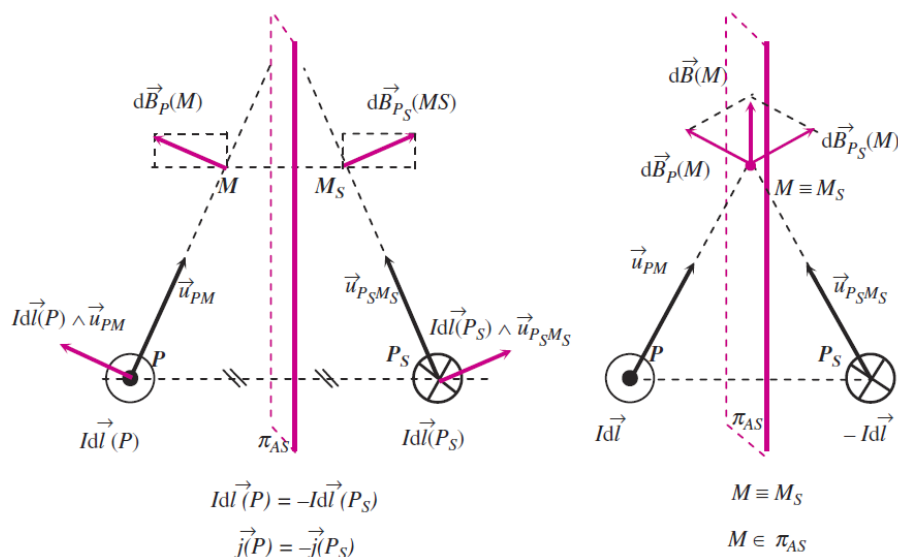


FIGURE 2.14 – Transformation du produit vectoriel par un plan d'anti-symétrie  $\pi_{AS}$ . Les points  $P_S$  et  $M_S$  sont respectivement les symétriques des points  $P$  et  $M$  par rapport au plan  $\pi_{AS}$ . Les courants sont anti-symétriques par rapport à ce plan.

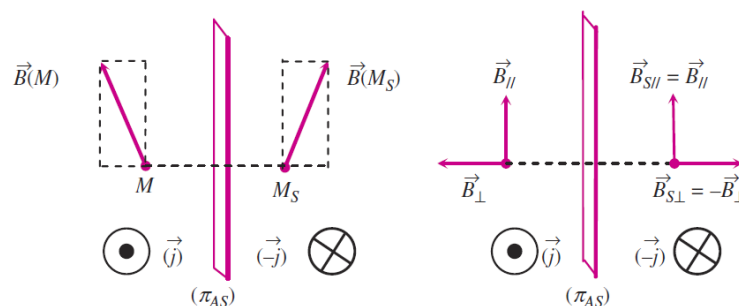


FIGURE 2.15 – Transformation du vecteur champ magnétique par un plan d'antisymétrie  $\pi_{AS}$

le plan d'anti-symétrie.

Le champ magnétique ne se comporte pas comme le champ électrique au cours d'une transformation par un plan de symétrie ou d'anti-symétrie. Le champ électrique qui se comporte comme un vecteur position

est dit vecteur polaire (ou " vrai " vecteur) alors que le champ magnétique est dit vecteur axial (ou pseudo vecteur).

**Conclusion :** Un plan de symétrie pour les courants apparaît comme un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique. De même, un plan d'anti-symétrie pour les courants apparaît comme un plan de symétrie pour le champ magnétique.

#### Les invariances :

Tout comme pour le champ électrique, si les sources du champ magnétique présentent des invariances par translation ou rotation le champ magnétique présentera les mêmes invariances.

*Invariance par translation :*

Lorsqu'une distribution est invariante par une translation de  $\Delta z$  parallèlement à l'axe ( $Oz$ ), un observateur percevra la même distribution s'il est au point de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  ou en un point translaté du précédent de coordonnées  $(x, y, z + n\Delta z)$ , où  $n$  est un entier. Le champ sera donc identique en ces deux points :  $\vec{B}(x, y, z + n\Delta z) = \vec{B}(x, y, z)$ . Ce n'est possible que pour les distributions illimitées dans la direction de la translation.

Pour une distribution invariante par (toute) translation selon la direction de l'axe ( $Oz$ ), le champ magnétique ne dépendra pas de la variable  $z$  et aura la forme  $\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$ .

*Invariance par rotation*

Pour une distribution invariante par une rotation  $\mathcal{R}$  d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{n}$  ( $n$  entier) autour de l'axe ( $Oz$ ), deux observateurs placés en  $M$  et  $M' = \mathcal{R}(M)$  percevront la même distribution. Le champ au point  $M'$  est le même qu'au point  $M$ , à une rotation autour de l'axe ( $Oz$ ).

C'est le cas d'une spire circulaire ou d'une bobine constituée de plusieurs spires circulaires de même axe de révolution, le courant électrique d'intensité  $I$  parcourant la bobine restera invariant par rotation d'un angle  $\theta$  autour de cet axe : l'intensité du champ magnétique ne dépendra pas de la variable  $\theta$ .

## 2.4.4 Applications

### Exemple 1 : Champ magnétique créé par un courant circulant dans un fil rectiligne.

Le cas du fil rectiligne de longueur finie peut paraître inutile car pour qu'un courant puisse circuler il faut nécessairement avoir un circuit fermé. Cependant, lorsqu'on se place près d'une portion du circuit rectiligne la contribution du reste du circuit à l'expression du champ magnétique est souvent négligeable devant celle de la portion rectiligne.

On considère donc un segment de fil conducteur  $A_1A_2$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  (figure 2.16). Cette portion de fil définit tout naturellement un axe  $zz'$  et un point  $M$  de l'espace sera repéré en coordonnées cylindriques. Si le point  $H$  est le projeté de  $M$  sur le fil on a :  $\vec{HM} = r\vec{u}_r$  où  $\vec{u}_r$  est le vecteur radial unitaire des coordonnées cylindriques.

*Symétries et invariances*

Le plan contenant la portion de fil (axe  $zz'$ ) et le point  $M$  est un plan de symétrie pour les courants. Il contient les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$ . On en déduit que le champ magnétique doit être perpendiculaire à ce plan c'est-à-dire suivant la direction du vecteur unitaire orthoradial  $\vec{u}_\theta$ ;

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$$

L'axe  $zz'$  est un axe de symétrie pour le courant  $I$  : il y a invariance par rotation d'un angle  $\theta$  quelconque autour de cet axe : l'intensité du champ magnétique ne dépend pas de la variable  $\theta$ . Si  $z_M$  est l'abscisse de  $M$  par rapport à une origine  $O$  sur l'axe  $zz'$  alors on a :

$$\vec{B}(M) = B(r, z_M)\vec{u}_\theta$$

Les lignes de champ magnétique sont donc des cercles centrés sur le fil.

*Calcul du champ élémentaire créé par un élément de courant  $I d\vec{l}$  situé au point  $P$*

L'expression du champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant  $I d\vec{l}$  est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

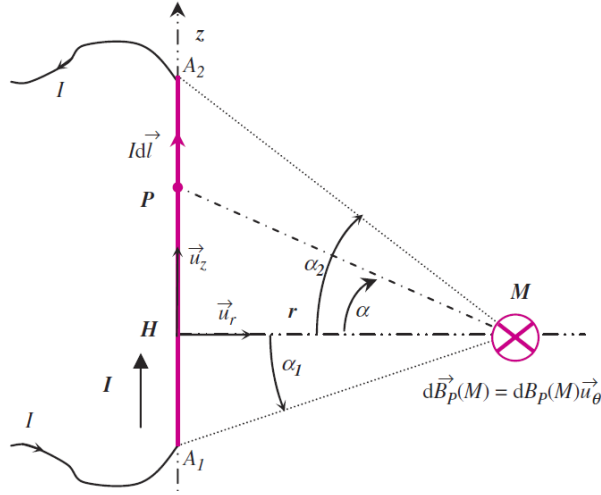


FIGURE 2.16 – Champ magnétique créé par un fil rectiligne  $A_1A_2$  parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

Le champ total est obtenu en additionnant les contributions de tous les éléments de courant quand le point  $P$  décrit tout le fil. La méthode de calcul consiste alors à exprimer les différents termes dépendant de la position de  $P$  en fonction d'une variable caractérisant cette position.

Le point  $P$  peut être repéré par son abscisse  $z$  telle que :  $\overrightarrow{HP} = z\vec{u}_z$ , La longueur élémentaire  $dl$  peut s'écrire :  $d\vec{l} = dz\vec{u}_z$ . Dans ces conditions, le produit vectoriel  $d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM} &= d\vec{l} \wedge (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}) \\ &= dz\vec{u}_z \wedge (-z\vec{u}_z + r\vec{u}_r) \\ &= rdz\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

En appelant  $\alpha$  l'angle entre  $MP$  et  $MH$  (voir figure 2.16) on :

$$\tan \alpha = \frac{z}{r}$$

Les variables  $z$  et  $\alpha$  ne sont pas indépendantes. On a la relation : Une petite variation  $dz$  de la variable  $z$  entraîne une variation  $d\alpha$

$$\begin{aligned} d(\tan \alpha) &= d\left(\frac{z}{r}\right) \Rightarrow (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{r} \\ \Rightarrow r dz &= \frac{r^2 d\alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

Le triangle  $HPM$  étant rectangle en  $H$  le théorème de Pythagore donne :  $PM^2 = r^2 + z^2$ , donc  $PM^3 = (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ , On a aussi :  $\cos \alpha = \frac{r}{PM}$ , donc  $\frac{1}{PM^3} = \frac{\cos^3 \alpha}{r^3}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} d\vec{B}_p(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos^3 \alpha}{r^3} \frac{r^2 d\alpha}{\cos^2 \alpha} \vec{u}_\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

*Expression du champ magnétique pour un fil fini*

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \int_{A_1}^{A_2} d\vec{B}_p(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha \vec{u}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{u}_\theta [\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

remarque : Il est facile de vérifier que le module du champ  $B(M)$  est toujours positif, quelque soit la position du point  $M$ .

Le sens du champ est donné par la règle habituelle du tire-bouchon : Le champ a le sens de rotation qu'il faut donner au tire-bouchon placé le long du fil pour qu'il se déplace dans le sens du courant  $I$ .

Si le fil est infini :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

### Exemple 2 : Champ magnétique créé par une spire circulaire

On considère une spire circulaire conductrice de centre  $O$ , d'axe  $z'Oz$  caractérisée par son rayon  $R$  et parcourue par un courant  $I$  (figure 2.17).

On cherche à exprimer le champ magnétique créé par ce courant  $I$  en un point  $M$  situé sur l'axe de la spire. Le point  $M$  est repéré par son abscisse  $OM = z$ .

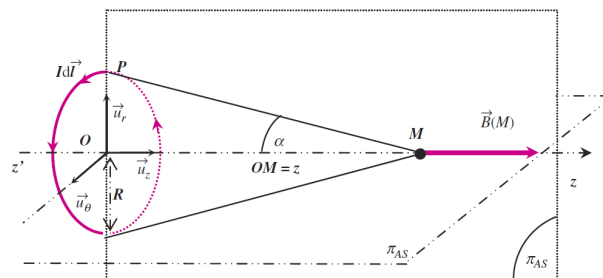


FIGURE 2.17 – Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point  $M$  de son axe. Les plans  $\pi_{AS}$  sont des plans d'anti-symétrie..

#### Symétrie et invariance

Tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie pour les courants : il y en a une infinité. Le champ magnétique doit être dans tous ces plans, donc suivant leur intersection c'est-à-dire l'axe  $Oz$  (voir figures 2.17 et 2.18). Finalement on peut écrire :

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_z$$

Le plan contenant la spire et perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie pour les courants. Le champ magnétique sur l'axe est perpendiculaire à ce plan et reste donc inchangé par symétrie par rapport au plan de la spire. Dans ces conditions il suffit de déterminer le champ pour  $z > 0$  et on aura :

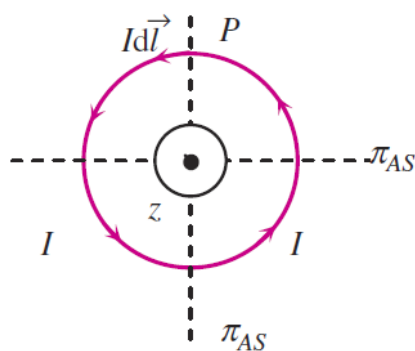


FIGURE 2.18 – Tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie pour les courants.

$$B(-z) \vec{u}_z = B(z) \vec{u}_z$$

$B(z)$  est une fonction paire.

#### Application de la loi de Biot et Savart

D'après la loi de Biot et Savart l'élément de courant  $Id\vec{l}$  ( $P$ ) en un point  $P$  de la spire crée le champ

magnétique élémentaire en  $M$  :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in \text{spire}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Pour tout point  $P$  de la spire la distance  $PM$  est identique (figure 2.17).

$$\begin{aligned} \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \vec{PM} &= \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \vec{PO} + \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \vec{OM} \\ &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

le vecteur  $\vec{OM} = z\vec{u}_z$  est indépendant de la variable d'intégration repérant le point  $P$  sur la spire. Ce vecteur peut sortir du symbole intégrale et  $C_2$  s'écrit alors :

$$C_2 = \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \vec{OM} = \left( \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{OM}$$

Le calcul de cette intégrale revient à additionner des vecteurs élémentaires  $d\vec{l}$  c'est à dire, en utilisant la relation de Chasles, de mettre bout à bout ces vecteurs pour obtenir le vecteur résultant. Par exemple, si on passe d'un point initial  $P \equiv P_1$  à un point final  $P \equiv P_2$ , on a :

$$\int_{P \equiv P_1}^{P \equiv P_2} d\vec{l} = \vec{P_1 P_2}$$

Dans le cas de la spire le point  $P$  fait un tour complet c'est à dire que le point initial est confondu avec le point final  $P_1 \equiv P_2$  :

$$\int_{P \equiv P_1}^{P \equiv P_2} d\vec{l} = \vec{0}$$

Il ne reste donc que l'intégrale  $C_1$  à déterminer. En utilisant les vecteurs de la base des coordonnées polaires permettant de repérer le point  $P$  (figure 2.17), on a :

$$\begin{aligned} C_1 &= \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \vec{PO} \\ &= \oint_{P \in \text{spire}} dl \vec{u}_\theta \wedge (-R\vec{u}_r) \\ &= \oint_{P \in \text{spire}} R d\theta \vec{u}_\theta \wedge (-R\vec{u}_r) \\ &= 2\pi R^2 \vec{u}_z \end{aligned}$$

Finalement le champ magnétique a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \vec{PM} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} (2\pi R^2 \vec{u}_z) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Pythagore on a :

$$PM^3 = (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = R^3 \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2PM^3} (R^2 \vec{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} (\vec{u}_z)$$

Il est possible aussi d'exprimer  $\vec{B}(M)$  en introduisant la variable  $\alpha$  qui est l'angle sous lequel le point  $M$  voit un rayon de la spire  $\tan \alpha = \frac{R}{z}$ . On a alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} (\sin \alpha)^3 (\vec{u}_z)$$

## Chapitre 3

# Théorème d'Ampère et Flux magnétique

### 3.1 Théorème d'Ampère et Propriétés du champ magnétique

Cette loi est une conséquence de la loi de Biot et Savart. Elle confirme que les courants électriques sont des sources de champ magnétique.

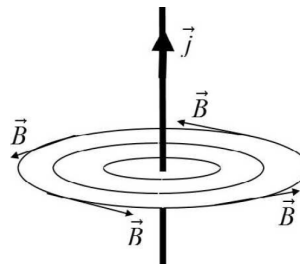


FIGURE 3.1 – Lignes de champ magnétique

#### 3.1.1 Circulation sur un contour fermé du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant

Soit un fil rectiligne infini parcouru par un courant  $I$ . Comme il a été démontré dans le chapitre précédent, le champ magnétique créé par ce courant ne dépend que de la distance  $r$  du point au fil. Son expression, obtenu par la loi de Biot et Savart, est en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On s'intéresse à la circulation de ce champ sur un contour fermé ( $C$ ) entourant le fil (figure 3.2). On oriente le vecteur normal à toute surface s'appuyant sur ce contour comme le courant  $I$ . L'orientation de la surface définit le sens positif sur le contour par la règle habituelle du tire-bouchon.

Un déplacement élémentaire sur le contour s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

L'expression de la circulation élémentaire est par définition :

$$\begin{aligned} dC &= \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

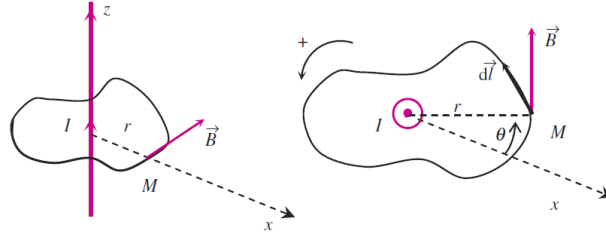


FIGURE 3.2 – Champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant  $I$ . Circulation de ce champ sur un contour fermé orienté entourant le fil.

Sur le contour fermé la circulation totale est donnée par :

$$C = \oint dC = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

Sur un tour complet, l'angle varie dans ce cas de 0 à  $2\pi$  (voir figure 3.2). On obtient alors :

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I$$

Considérons le cas où le contour fermé est en dehors du fil ( figure 3.3). L'expression de la circulation sur

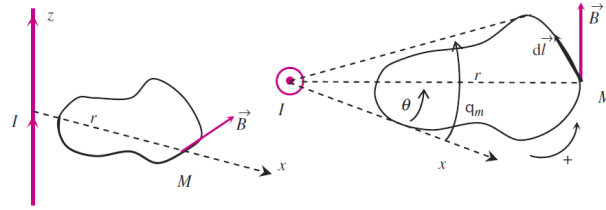


FIGURE 3.3 – Champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant  $I$ . Circulation de ce champ sur un contour fermé orienté en dehors du fil.

le contour fermé reste la même ; seules les bornes d'intégration changent. En partant d'un angle  $\theta = 0$  par exemple, cet angle va passer par une valeur  $\theta_m$  pour finir par reprendre la valeur  $\theta = 0$ . On a donc :

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^0 d\theta = 0$$

Dans ce cas la circulation est nulle.

Conclusion : Dans le cas du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant on peut dire que :

- Si le courant ne traverse pas cette surface, la circulation du champ est nulle..
- Le contour ( $C$ ) est orienté, selon la règle du tire-bouchon par rapport au sens du courant  $I$ . Ceci influe sur le signe de l'intégrale.

– Dans le cas électrostatique, la circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est toujours nulle.

– Si le contour enlace le courant, c'est à dire que le courant  $I$  traverse la surface orientée s'appuyant sur le contour fermé, alors la circulation du champ est égale à  $C = \mu_0 I$ .

### 3.1.2 Généralisation

On peut montrer que ce résultat obtenu pour le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant se généralise pour toutes formes de courants. Cette généralisation constitue le théorème d'Ampère. Considérons un contour fermé ( $C$ ) quelconque orienté et une surface ( $S$ ) quelconque mais s'appuyant sur le

contour ( figure 3.4 :  $(S)$  à la forme d'un bonnet). En tout point de  $(S)$ , la normale à la surface est orientée à partir de l'orientation choisie pour le contour en utilisant la règle habituelle du " tire-bouchon " (voir figure 3.4). Différents circuits filiformes parcourus par des courants et sources d'un champ magnétique traversent ou pas cette surface.

Remarque :

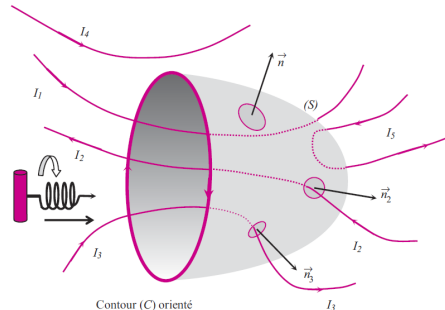


FIGURE 3.4 – Contour quelconque  $(C)$  orienté et surface  $(S)$  quelconque s'appuyant sur le contour : la normale en différents points de la surface est automatiquement orientée par la règle du "tire-bouchon". Les courants sources de champ magnétique traversent ou pas cette surface dans le sens de la normale ou en sens opposé.

Les courants qui traversent toute surface s'appuyant sur le contour sont dits " courants enlacés " par le contour.

### Théorème d'Ampère

La circulation du vecteur champ magnétique sur un contour fermé orienté quelconque est égale au produit de la perméabilité  $\mu_0$  du vide par la somme algébrique des intensités des courants enlacés par le contour.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}$$

Les intensités sont algébriques : Les courants sont comptés positivement si leur orientation correspond à l'orientation de la surface, elle-même orientée à partir du contour (règle du tire-bouchon).

Exemple : L'application du théorème d'Ampère dans le cas de la figure 3.4 donne :

$$\sum I_{\text{enlacé}} = I_1 - I_2 + I_3 + (I_5 - I_5) = I_1 - I_2 + I_3$$

### 3.1.3 Formes intégrale et locale

La circulation du champ  $\vec{B}$  le long d'une courbe  $\Gamma$ , est proportionnelle au courant traversant la surface  $S$  délimitée par la courbe  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

D'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

Soit  $\iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  et donc

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

Cette équation montre que la densité de courant  $\vec{j}$  crée un champ  $\vec{B}$  qui tourne autour de  $\vec{j}$  (qui se confond alors avec l'axe de rotation de  $\vec{B}$  )



### 3.1.4 Intérêt du théorème d'Ampère

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir déterminer le champ magnétique en tout point  $M$  de l'espace créé par des courants. Pour cela il faut être capable de trouver un contour fermé  $(C)$  qui passe par le point  $M$  et pour lequel on puisse calculer facilement la circulation du champ magnétique.

Si le champ est en tout point colinéaire au contour on aura :

$$\vec{B}(M) // d\vec{l} \Rightarrow \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = B(M) dl$$

Si de plus l'intensité  $B(M)$  du champ magnétique est la même en tout point du contour alors, avec  $B(M) = B$  :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} B(M) dl = B \oint_{(C)} dl = BL$$

La circulation est, dans ce cas, égal au produit du champ  $B$  par le périmètre du contour fermé. Il suffit alors d'utiliser le théorème d'Ampère : si  $I_{et}$  est la somme algébrique des courants enlacés alors :

$$BL = \mu_0 I_{et} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{et}}{L}$$

Remarques :

- On peut compléter un contour non fermé qui répond aux critères précédents par des portions de courbes pour lesquelles la circulation du champ magnétique est nulle, c'est-à-dire pour lesquelles le champ magnétique est perpendiculaire au déplacement ( $\vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = 0$ )
- L'application du théorème d'Ampère ne sera simple que s'il y a suffisamment d'éléments de symétrie et d'invariances pour avoir une idée de l'allure des lignes de champs et donc de pouvoir choisir le bon contour fermé.

#### Méthode :

Pour tous les systèmes qui seront étudiés, la méthodologie pour déterminer le champ magnétique est la suivante :

- Inventaire des éléments de symétrie et des invariances des courants (sources de champs)
- En déduire les lignes de champ c'est-à-dire avoir une idée de la direction du champ et de quelles variables le module dépend
- Pour calculer le champ en un point donné, choisir un contour fermé passant par ce point, pour lequel la direction du champ est tangent et le module  $B$  constant
- Déterminer l'expression mathématique de la circulation du champ magnétique sur le contour fermé choisi
- Déterminer la somme algébrique des courants enlacés
- Appliquer le théorème d'Ampère pour déduire le champ magnétique

### 3.1.5 Exemple d'application du théorème d'Ampère

#### Cas du fil infini parcouru par un courant

Un point  $M$  de l'espace est tout naturellement repéré en coordonnées cylindriques : l'axe  $Oz$  est confondu avec le fil infini et on pose  $H$  le projeté de  $M$  sur l'axe. On a alors (voir figure 3.5) :

$$\overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r$$

On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique en ce point créé par le courant d'intensité  $I$  circulant dans le fil.

*Etude des symétries :*

Le courant présente la symétrie cylindrique.

En coordonnées cylindriques on a :  $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$

Tout plan  $(\pi_S)$  contenant le fil et le point  $M$  est un plan de symétrie pour le courant (source du champ magnétique). Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan défini par les vecteurs  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$  et est donc obligatoirement orthoradial :  $\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$

Remarque :

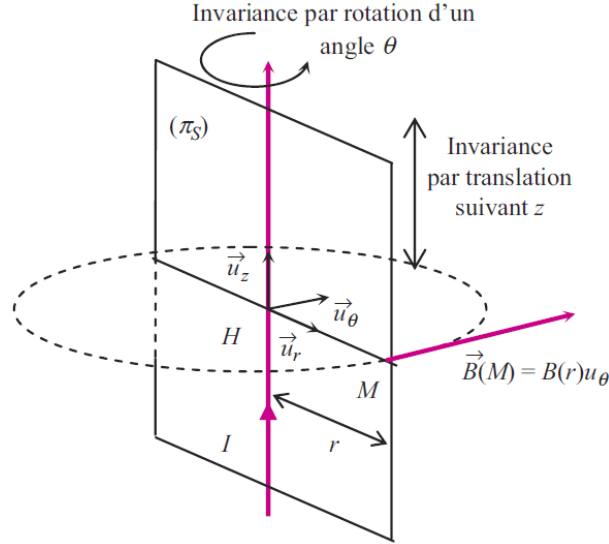


FIGURE 3.5 – Fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I$  : symétrie cylindrique.

Le plan perpendiculaire au fil et contenant  $M$  est un plan d'antisymétrie, le champ magnétique est donc dans ce plan.

Le fil est infini. Il y a donc invariance par translation le long de l'axe  $Oz$ . Le champ ne dépend pas de  $z$ .

Le fil est un axe de symétrie : il y a invariance par rotation d'un angle  $\theta$  autour du fil. L'intensité du champ ne dépend pas de  $\theta$ .

Donc  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$

Choix du contour fermé orienté :

L'étude précédente montre que les lignes de champ sont des cercles de rayon  $r$  et que, sur un cercle, le module du champ magnétique est constant. Le contour fermé à choisir est donc : Un cercle de centre  $H$  et de rayon  $HM = r$ .

Le contour est orienté comme  $\vec{u}_\theta$ . La surface du cercle est orientée alors comme l'axe  $Oz$  :  $\vec{n} = \vec{u}_z$ .

Circulation du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \oint_{(M \in C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} &= \oint_{(M \in C)} B(r) \vec{u}_\theta dl \vec{u}_\theta \\ &= \oint_{(M \in C)} B(r) dl = B(r) \oint_{(M \in C)} dl \\ &= B(r) 2\pi r \end{aligned}$$

Théorème d'Ampère :

Le seul courant traversant la surface s'appuyant sur le contour est le courant d'intensité  $I$  dans le même sens que la normale  $\vec{n} = \vec{u}_z$ .

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} = \mu_0 I$$

Donc  $B(r) 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ .

## 3.2 Flux magnétique et Potentiel vecteur

### 3.2.1 Potentiel vecteur

La loi de Biot-Savart étant applicable à toute distribution de courants statiques, si on considère une distribution de courants repartis dans un volume  $V$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$ , le champ  $\vec{B}$

crée par cette distribution en un point M de l'espace environnant s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left( \vec{j} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\vartheta$$

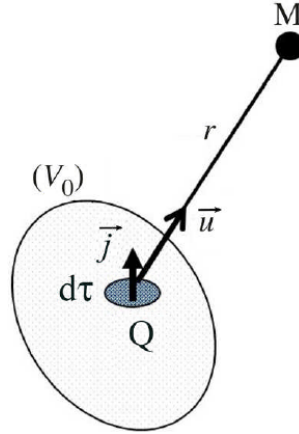


FIGURE 3.6 – *pot*

où  $\vec{r} = \overrightarrow{QM}$  et  $\vec{j} d\vartheta$  représente le courant contenu dans le volume élémentaire  $d\vartheta$  centré en un point Q du volume V.

En utilisant  $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right)$ , le champ s'écrit :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left( \vec{j} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\vartheta$$

L'utilisation de l'identité

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{a}) = f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Conduit à

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left( \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) - \frac{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j})}{r} \right) d\vartheta$$

Dans l'élément de volume  $d\vartheta$ , le vecteur  $\vec{j}$  est pratiquement constant, ce qui implique que  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) = 0$ . et conduit à :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) d\vartheta = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$$

avec

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{r} d\vartheta$$

Donc à tout champ  $\vec{B}$ , on peut associer un champ vectoriel  $\vec{A}$ , appelé " potentiel vecteur", donné par la relation

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$$

### 3.2.2 Flux magnétique

Le champ magnétostatique  $\vec{B}$  est donc un champ de rotationnel. On en déduit que

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

puisque  $\text{div} \vec{B} = \text{div} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$ . Cette équation est absolument générale, aucune condition particulière sur la forme du circuit n'ayant été nécessaire pour l'établir. Elle s'applique à toutes les distributions de courants.

Cette propriété locale du champ magnétique a un équivalent macroscopique. En effet, si nous calculons le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée  $S$  enveloppant le volume  $V$ , en vertu du théorème de Green, nous obtenons :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} d\vartheta = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Par analogie, la valeur nulle du flux magnétique à travers une surface fermée nous permet de conclure à l'inexistence de charges magnétiques isolées qui seraient l'équivalent des charges électriques. Ce qui implique que les lignes de champ magnétique sont des lignes fermées.

### Flux conservatif

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque est toujours nul. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif.

Il faut noter que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'est pas unique, plusieurs champs de vecteurs différents pouvant satisfaire l'équation  $\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A}) = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} \phi)$ ,  $\forall \phi$ ; puisque le rotationnel d'un gradient est nul. Le potentiel vecteur n'est donc défini qu'à un gradient de champ scalaire  $\phi$ .

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{r} d\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{r} \quad (3.1)$$

$d\vec{l}$  étant un élément infinitésimal du circuit parcouru par le courant uniforme  $I$ . Ainsi, le calcul de chacune des composantes du potentiel vecteur revient à une intégrale de volume de la composante de la densité de courant correspondante.

## 3.2.3 Équation locale du potentiel vecteur et jauge de Coulomb

### Choix de jauge de Coulomb

Le choix d'un potentiel scalaire  $\phi$  permettant de définir complètement le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est appelé "choix de jauge". Nous dirons que  $\vec{B}$  est invariant par changement de jauge puisque l'ajout de n'importe quel potentiel scalaire  $\phi$  ne modifie pas le champ  $\vec{B}$ . Cette propriété est très utile. Elle permet en particulier de choisir le potentiel vecteur le plus adapté au problème traité, c'est-à-dire celui qui simplifie au maximum les calculs. En magnétostatique le potentiel vecteur  $\vec{A}$  satisfait la jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

### Équation locale du potentiel vecteur

Pour obtenir l'équation locale devant être vérifiée par le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , considérons la propriété locale du champ magnétique :

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

En introduisant dans cette équation, la relation  $\vec{B} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$  et utilisant la relation  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \cdot \vec{A}$ . Comme nous pouvons toujours choisir pour potentiel vecteur celui correspondant à la jauge de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Donc le potentiel vecteur s'écrit simplement :

$$\nabla^2 \cdot \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

### Exemples de potentiels vecteurs : Fil rectiligne parcouru par un courant uniforme

Considérons un fil rectiligne infini, de section  $\pi a^2$ , parcouru par un courant permanent  $I$ . Nous choisirons le système de coordonnées cylindriques pour calculer les composantes de  $\vec{B}$ , l'axe  $z$  étant confondu avec le fil. Dans ce repère, la densité de courant  $\vec{j}$  a pour composantes :

$$\begin{aligned} J_r &= J_\theta = 0 \\ J_z &= \frac{I}{\pi a^2} \end{aligned}$$

### Calcul du potentiel vecteur

Par symétrie, le potentiel vecteur en un point  $M(r, \theta, z)$  doit être parallèle à l'axe  $Oz$  (le potentiel vecteur a la même symétrie que la densité de courant  $\vec{J}$  comme le montre la relation (3.1)) et son module ne peut dépendre que de  $r$  :

$$\vec{A} = A_z(r) \vec{u}_z$$

Pour déterminer la composante  $A_z$ , il suffit de résoudre l'équation :

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2}$$

chap 4, nous obtenons pour la composante  $z$  du potentiel vecteur :

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r) + cte$$

### Calcul du champ magnétique

En coordonnées cylindriques  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , le rotationnel du potentiel vecteur est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Nous retrouvons là l'expression calculée directement à partir de la définition du champ magnétique.

### Récapitulatif

Forme différentielle	intégrale	sens physique
$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	conservation de charge
$\vec{rot} \vec{E} = \vec{0}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	force conservative
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	pas de charge magnétiques
$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$	courants stationnaires

Ce récapitulatif montre qu'en régime stationnaire (indépendant du temps),

- les champs électriques et magnétiques sont complètement découplés ;
- le champ électrique ne peut être créé que par des charges électriques ;
- le champ magnétique ne peut être créé que par des courants électriques.

## Chapitre 4

# Induction électromagnétique

### 4.1 Force de Lorentz.

En électrostatique, une charge  $q$  placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  subit une force

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Si cette charge est mobile en présence d'un champ magnétique, dans un repère où sa vitesse est  $\vec{v}$  elle subit une force de la forme :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$$

appelée force de Lorentz. Si la particule est immobile  $\vec{v}_e = \vec{0}$ , seule subsiste la force  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Si d'autre part les charges présentes dans le système sont mobiles en présence d'un champ  $\vec{B}$  et en absence de  $\vec{E}$ , on constate que le mouvement des charge crée un courants, la force dans ce cas est  $\vec{F} = q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ . Le but du chapitre est d'étudier la variation du champ magnétique.

### 4.2 Loi de Faraday

#### 4.2.1 Spire mobile et aimant fixe

Soit un circuit électrique (une spire  $\Gamma$ ), que nous orientons arbitrairement. Il est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . On déplace la spire dans ce champ magnétique, Si les deux bornes de la bobine sont reliées à un Ampèremetre, nous constatons l'existence d'un courant. ceci est expliquer comme suit : un porteur de charge libre présent dans le circuit, de charge  $q$ , (par exemple un électron) s'il a une vitesse  $\vec{v}_e$ . En absence de champ électrique, le porteur de charge subit une force magnétique de la forme ;

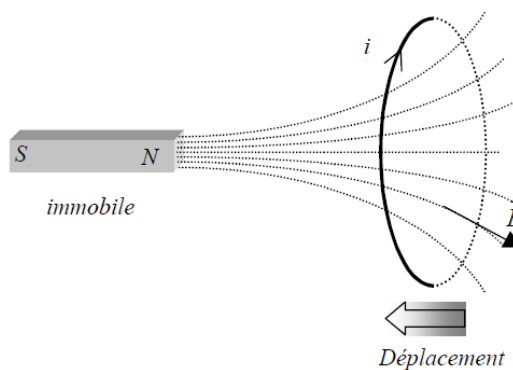


FIGURE 4.1 – Spire mobile dans un champ magnétique

$$\vec{F} = q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

susceptible de faire circuler les charges de conduction du circuit.

Par définition, on appellera force électromotrice d'induction  $e$  (f.e.m) sur  $(\Gamma)$  la circulation de  $\frac{\vec{F}}{q}$  sur  $(\Gamma)$ .

$$e = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

il faut noter que pour une pile  $e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ,  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Dans le cas générale  $W = qe$ , avec le travail élémentaire est donné par  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ .

Calculons maintenant le flux coupé  $\delta\varphi_c$  du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface latérale lors du déplacement de la spire entre l'instant  $t$  et  $t + \delta t$ . Si on décompose la surface à des petites surfaces

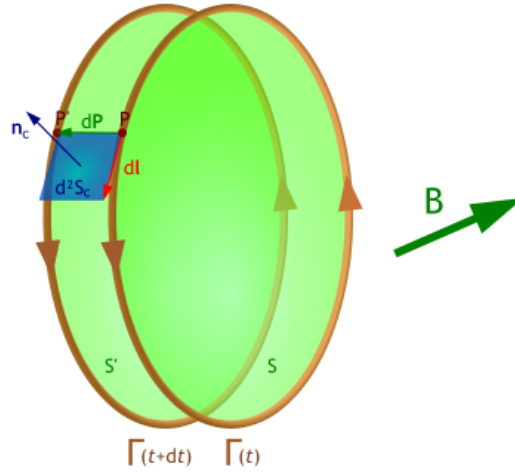


FIGURE 4.2 – flux coupé du champ magnétique à travers la surface latérale de la spire

$$\delta^2\varphi_c = \vec{B} \cdot d\vec{S}_{laterale}$$

le carré du  $\delta^2\varphi_c$  signifie que petit de deuxième ordre ( $dl$  et  $\delta t$ )

$$\begin{aligned} dS_{laterale} &= dl \times v \times \delta t \times \sin \theta \\ &= \left\| \vec{v} \delta t \wedge d\vec{l} \right\| \end{aligned}$$

Donc le flux élémentaire sur la surface  $dS_{laterale}$ .

$$\begin{aligned} \delta\varphi_c &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{laterale} \\ &= \iint \vec{B} \cdot (\vec{v} \delta t \wedge d\vec{l}) \\ \Rightarrow \frac{\delta\varphi_c}{\delta t} &= \iint \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{l}) \end{aligned}$$

sachant que le produit mixte satisfait la propriétés suivante :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi_c}{\delta t} &= \iint d\vec{l} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{v}) \\ &= - \iint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= -e \end{aligned}$$

D'autre part calculons maintenant le flux du champ magnétique à travers la surface de la spire à  $t$  et à  $t + \delta t$

$$\varphi(t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{spire}$$

$$\varphi(t + \delta t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}'_{spire}$$

Sachant que  $\text{div } \vec{B} = 0$ , donc le flux à travers toute surface fermée est nul,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{spire} + \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{laterale} - \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}'_{spire} = 0$$

le signe - est à cause de l'orientation de la surface

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(t) + \delta\varphi_c - \varphi(t + \delta t) &= 0 \\ \Rightarrow \delta\varphi_c &= \varphi(t + \delta t) - \varphi(t) \\ \Rightarrow \delta\varphi_c &= \varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt} \delta t - \varphi(t) \\ \Rightarrow \frac{\delta\varphi_c}{\delta t} &= \frac{d\varphi(t)}{dt} \end{aligned}$$

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Étapes à suivre pour connaître le sens du courant induit dans la spire :

- 1- choisir un sens positif
- 2- Tracer  $d\vec{S}$ , tenant compte du sens choisi
- 3- Tracer  $\vec{B}$
- 4- déduire le signe de  $\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{spire} > 0$  si  $\cos \theta > 0, (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ .
- 5- variation de  $\varphi$  : quand la spire approche de l'aimant  $\vec{B} \nearrow \Rightarrow \varphi \nearrow$

$$\Rightarrow \delta\varphi > 0 \Rightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} > 0$$

6- signe de  $e = -\frac{d\varphi(t)}{dt} < 0$ , donc le courant  $I$  est dans le sens opposé au sens positif.

**Remarque :** Si on change le sens positif, alors le sens de  $d\vec{S}_{spire}$  change, donc  $\varphi < 0$

$$\Rightarrow \delta\varphi < 0 \Rightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} < 0$$

le signe de  $e = -\frac{d\varphi(t)}{dt} > 0$ , ce qui signifie que  $I$  est dans le bon sens, donc  $I$  ne dépend pas du choix du sens.

#### 4.2.2 Spire immobile et aimant en mouvement

Le même circuit électrique (une spire  $\Gamma$ ) est maintenant fixe dans le référentiel du laboratoire, par contre  $\vec{B}$  varie dans le temps. L'expérience montre alors que  $(\Gamma)$  est encore le siège d'un courant induit, traduisant le déplacement dans  $(\Gamma)$  des porteurs libres qu'il contient, et qu'on peut caractériser par une force électromotrice d'induction :

$$e = -\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

où  $\frac{d\varphi(t)}{dt}$  traduit la variation dans le temps du flux d'induction magnétique à travers  $(\Gamma)$  qui résulte de la variation de  $\vec{B}$ .

$e$  ne peut plus résulter de l'action sur les porteurs de la force magnétique puisque  $\vec{v}_e = \vec{0}$ . Donc si les



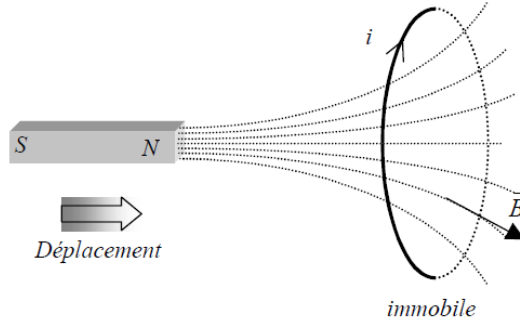


FIGURE 4.3 – *Spire immobile dans un champ magnétique variable*

porteurs libres sont entraînés autour de  $(\Gamma)$  c'est qu'une force électrique est apparue, produite par un champ électrique  $\vec{E}$ . Tel que

$$\begin{aligned} e &= \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi(t)}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Où  $(S)$  étant une surface quelconque s'appuyant sur  $(\Gamma)$  et on peut permuter la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport aux coordonnées spatiales.

### 4.2.3 Loi locales de l'induction : Cas général

On a montré que dans le cas ou le circuit est fixe et le champ magnétique variable, la f.e.m a la forme suivante :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

D'autre part et grâce au théorème du rotationnel.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Ce qui implique la relation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= -\iint_S \frac{\partial (\overrightarrow{rot} \vec{A})}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= -\iint_S \overrightarrow{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ e &= -\oint \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Dans le cas où le circuit est en mouvement et le champ magnétique statique la f.e.m, prend la forme ;

$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Dans le cas général la f.e.m s'écrit comme suit :

$$e = \oint \left( (\vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l}$$

#### 4.2.4 Potentiel vecteur et potentiel scalaire en régime variable

Le champ magnétique  $\vec{B}$  étant un vecteur à flux conservatif (  $\text{div } \vec{B} = 0$  ), même en régime variable, on peut introduire le potentiel vecteur  $\vec{A}$ ,

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

la relation de Maxwell-Faraday se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\Gamma} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\oint_{\Gamma} \left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

Ainsi, le champ  $\left( \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right)$  est à circulation conservative. Il existe donc, en régime variable, une fonction  $V$ , appelé potentiel scalaire, telle que :

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\text{grad } V$$

Soit

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Cette relation montre qu'en régime variable les potentiels  $V$  et  $\vec{A}$  sont indissociables. Aussi le couple  $(V, \vec{A})$  est appelé potentiel électromagnétique.

En régime stationnaire, ce couple se dissocie en un potentiel scalaire électrique et un potentiel vecteur magnétique, puisqu'on a, alors :  $\vec{E} = -\text{grad } V$  et  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

**Remarque :** Loi de Lenz

Si on prend dans la première expérience, on impose à la bobine un champ magnétique dirigé vers la gauche, celle-ci réagit en créant un champ magnétique opposé (vers la droite) via le courant induit qui s'établit.

*"Les phénomènes d'induction s'opposent par leur(s) effet(s) aux causes qui leur ont donné naissance".*

#### 4.2.5 Le théorème de Maxwell-Ampère

Le courant lié au mouvement des charges électriques sera noté  $I$  et le courant de déplacement qui correspond à un champ électrique variable sera noté  $I_D$ . On appelle le courant total  $I_T = I + I_D$ . A ces courants on associe respectivement :

- le vecteur densité de courant lié au mouvement des charges électriques  $\vec{j}$ ,
- le vecteur densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D$  défini par

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

le vecteur densité de courant total

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D$$

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total.

La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \mu_0 \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

On obtient le résultat fondamental : Un champ électrique variable crée un champ magnétique.

## 4.3 Auto-induction et Induction mutuelle

### 4.3.1 Auto-induction (Induction propre)

#### Définition et notations

Un circuit filiforme ( $C$ ) parcouru par un courant d'intensité  $I$  crée en tout point un champ magnétique  $\vec{B}$  que l'on qualifie de propre orienté par la règle du tire-bouchon. Le flux de ce champ propre à travers le circuit qui l'a créé est appelé le flux propre.

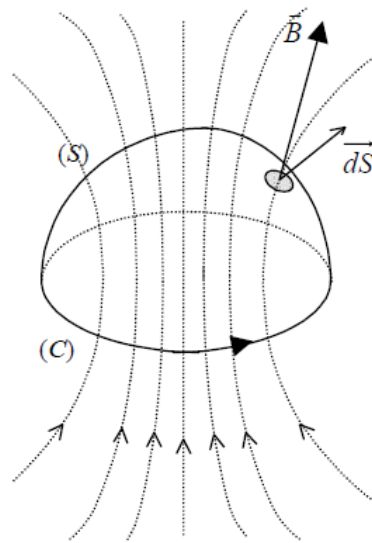


FIGURE 4.4 – Flux du champ magnétique créé par un circuit ( $C$ ).

Comme  $\vec{B}$  et donc  $\phi$  sont proportionnels à  $I$  (loi de Biot Savart), le rapport  $\frac{\phi_{propre}}{I}$  ne dépend plus du courant qui parcourt le circuit et constitue donc une caractéristique intrinsèque de celui-ci ; on l'appelle l'inductance propre, auto-inductance ou inductance noté  $L$  :

$$L = \frac{\phi_{propre}}{I} = \frac{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{I}$$

Les unités du Système d'Unité Internationales sont :

$L$  : Henry, symbole  $H$

$\phi$  : Weber, symbole  $Wb$  ( $1Wb = 1T.m^2$ )

Remarques :

- L'inductance propre  $L$  est une grandeur toujours positive.
- L'inductance propre  $L$  dépend de la géométrie du circuit

### Exemple 1 :

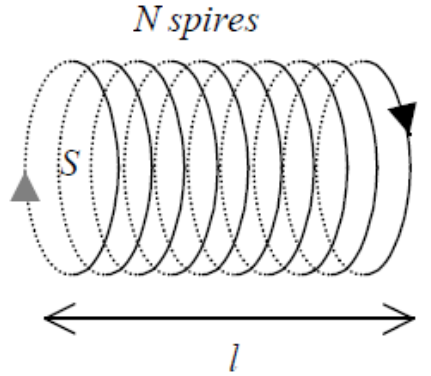
On considère un solénoïde de longueur  $l$  comportant  $N$  spires régulières, supposées jointives, de section  $S$ .

- Le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur du solénoïde (champ propre) est

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{e}_z$$

avec  $\vec{e}_z$  vecteur unitaire de l'axe du solénoïde

- Le flux propre  $\phi_{propre}$  est alors



$$\phi_{propre} = N\phi_0 = N(BS) = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} I$$

- L'inductance propre  $L$  du solénoïde est alors :

$$L = \frac{\phi_{propre}}{I} = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$$

### Loi d'Ohm aux bornes d'une portion de circuit présentant une inductance propre

La loi d'Ohm généralisée s'écrit

$$u_{AB} = RI_{AB} - e_{AB_{ext}} - e_{AB_{propre}}$$

La f.e.m. d'auto induction propre  $e_{AB_{propre}}$  est donnée par la loi de Faraday :

$$e_{AB_{propre}} = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Dans le cas où il n'y a pas de phénomène d'induction externe (le champ magnétique externe est nulle :  $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$ ) on obtient :

$$u_{AB} = RI_{AB} + L \frac{dI}{dt}$$

d'où le schéma équivalent est dans la figure (4.5), avec  $R$  est la résistance du circuit.

### Energie magnétique

On étudie la réponse d'un solénoïde (longueur  $l$  comportant  $N$  spires de section  $S$ ) de résistance  $R$  et d'inductance  $L$ . Pour cela on l'alimente par un générateur parfait délivrant une tension  $u$ . On suppose qu'il n'y a pas de champ magnétique externe et que l'inductance propre  $L$  est constante ; on a donc

$$\begin{aligned} u &= RI + L \frac{dI}{dt}, \quad \text{avec } u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ E = cte & \forall t > 0 \end{cases} \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{E}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right), \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

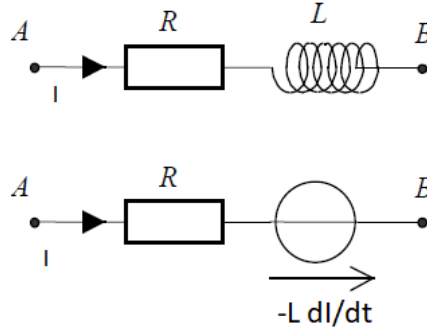


FIGURE 4.5 – *Auto-inductance*

Pour faire un bilan énergétique on multiplie l'équation différentielle par  $I dt$

$$\begin{aligned} u(I dt) &= RI(I dt) + L \frac{dI}{dt}(I dt) \\ \Rightarrow u I dt &= RI^2 dt + LI dI \end{aligned}$$

par le générateur

$$\Rightarrow \int_0^t E I dt = \int_0^t RI^2 dt + \int_0^t LI dI$$

énergie délivrée
énergie dissipée
énergie emmagasinée  
par le générateur
par effet Joule
par la bobine

Entre 0 et  $t_1$  le solénoïde accumule une énergie magnétique  $W_B$  avec

$$W_B = \frac{1}{2} LI^2$$

### 4.3.2 Inductance mutuelle

#### Flux de mutuelle inductance

Considérons maintenant deux circuits repérés par (1) et (2), l'un parcouru par un courant  $I_1$ , l'autre par  $I_2$ . En tout point le champ magnétique est somme du champ créé par le premier circuit et de celui créé par le second, donc est somme d'un terme proportionnel à  $I_1$  et d'un terme en  $I_2$ . On désigne par  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  :

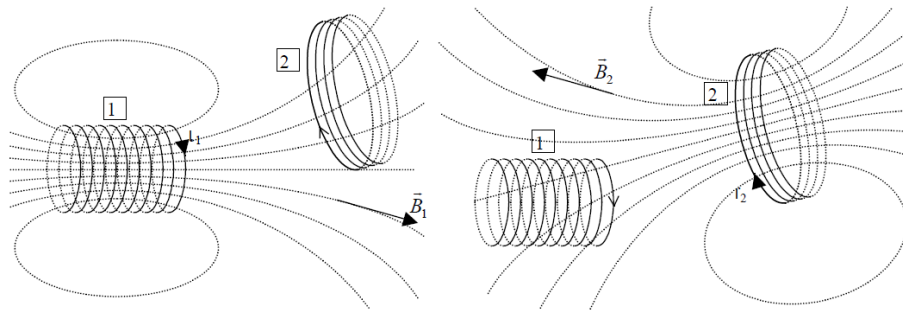


FIGURE 4.6 – *Inductance mutuelle*

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{(2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

le flux du champ magnétique  $\vec{B}_1$  à travers le circuit (2), et par  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  :

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{(1)} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}$$

le flux du champ magnétique  $\vec{B}_2$  à travers le circuit (1). Ces flux sont appelés les flux de mutuelle inductance.

### Expression de l'inductance mutuelle

Puisque les champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  sont respectivement proportionnels aux courants  $I_1$  et  $I_2$ , il en est donc de même pour le flux magnétique à travers l'un ou l'autre des circuits.

$$\begin{aligned}\phi_{1 \rightarrow 2} &= M_{12} I_1 \\ \phi_{2 \rightarrow 1} &= M_{21} I_2\end{aligned}$$

Nous admettrons que les deux coefficients  $M_{12}$  et  $M_{21}$  sont égaux et désignerons par inductance mutuelle  $M$  leur valeur commune :

$$M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2}.$$

La dimension d'une inductance mutuelle est celle d'une inductance propre et  $M$  se mesure donc en Henry.

#### Remarques :

- 1) Comme l'inductance propre  $L$ , l'inductance mutuelle  $M$  dépend de la géométrie des deux circuits.
- 2) Contrairement à l'inductance propre  $L$  toujours positive, l'inductance mutuelle  $M$  est une grandeur algébrique dont le signe dépend de l'orientation des deux circuits. Si l'on inverse l'orientation d'un des deux circuits l'inductance mutuelle  $M$  est changée en son opposé.
- 3) En général l'inductance mutuelle de deux circuits n'a de valeur notable que lorsqu'il s'agit de parties bobinées voisines.

### Couplage magnétique entre deux circuits

Si deux circuits sont en inductance mutuelle et en supposant qu'il n'y a pas d'autre source de champ magnétique, les flux totaux à travers chacune des deux bobines s'écrivent :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 &= \phi_{2 \rightarrow 2} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_2 I_2 + M I_1\end{aligned}$$

D'où les f.e.m. induites :

$$\begin{aligned}e_1 &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}\end{aligned}$$

On en déduit les différences de potentiel aux bornes de chacun des deux circuits :

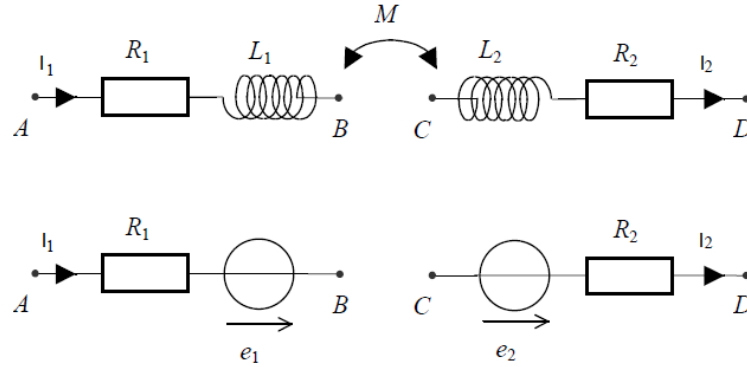


FIGURE 4.7 – Circuit équivalent

$$\begin{aligned}u_{AB} = v_1 &= R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ u_{CD} = v_2 &= R_2 I_2 - e_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}\end{aligned}$$

Les équations électriques de chacune des deux branches sont couplées par inductance mutuelle.

## Energie magnétique

### Expression de l'énergie magnétique

Soient deux circuits en inductance mutuelle. On suppose qu'il n'y a pas d'autre source de champ magnétique. Recherchons l'énergie stockée sous forme magnétique quand l'intensité du courant vaut  $I_1$  dans le circuit (1) et  $I_2$  dans le circuit (2).

Un bilan d'énergie appliqué au système  $\{L_1, R_1; L_2, R_2\}$  donne :

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ u_2 &= R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \\ \Rightarrow \quad u_1 (I_1 dt) &= R_1 I_1 (I_1 dt) + L_1 \frac{dI_1}{dt} (I_1 dt) + M \frac{dI_2}{dt} (I_1 dt) \\ u_2 (I_2 dt) &= R_2 I_2 (I_2 dt) + L_2 \frac{dI_2}{dt} (I_2 dt) + M \frac{dI_1}{dt} (I_2 dt) \\ \Rightarrow \quad u_1 I_1 dt - R_1 I_1^2 dt &= L_1 I_1 dI_1 + M I_1 dI_2 \\ u_2 I_2 dt - R_2 I_2^2 dt &= L_2 I_2 dI_2 + M I_2 dI_1 \end{aligned}$$

d'où une énergie magnétique élémentaire

$$\begin{aligned} dW_B &= dW_{B_{circuit1}} + dW_{B_{circuit2}} \\ &= (u_1 I_1 dt - R_1 I_1^2 dt) + (u_2 I_2 dt - R_2 I_2^2 dt) \\ &= (+M I_1 dI_2) + (+M I_2 dI_1) \\ &= L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M d(I_1 I_2) \end{aligned}$$

L'énergie magnétique d'un système de deux circuits couplés est, en l'absence d'autres sources de champ magnétique :

$$W_B = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  les flux totaux tel que :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 &= \phi_{2 \rightarrow 2} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_2 I_2 + M I_1 \end{aligned}$$

On a

$$W_B = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2)$$

Le terme  $M_{21} I_1$  est le flux que crée le champ du circuit 1 noté  $C_1$  à travers le circuit 2 noté  $C_2$  que l'on peut écrire sous l'un des deux formes :

$$M_{21} I_1 = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{C_2} \vec{A}_1(M) \cdot d\vec{l}_M$$

où, dans la second forme,  $d\vec{l}_M$  désigne un élément  $\overrightarrow{MM'}$  du second circuit et  $\vec{A}_1(M)$  le potentiel-vecteur créé par le premier circuit en  $M$ , soit

$$\vec{A}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_P}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

où  $d\vec{l}_P$  désigne un élément  $\overrightarrow{PP'}$  du premier circuit.

En reportant le second résultat dans le premier et en simplifiant par  $I_1$ , on tire :

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_P \cdot d\vec{l}_M}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

L'ordre des intégrations dans un intégrale double ne change pas le résultat, on en déduit que  $M_{12} = M_{21} = M$ .

### Schéma électrique équivalent.

On prendra garde que les f.e.m. d'induction dans les deux circuits ne sont plus respectivement  $e_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$  et  $e_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$ , mais :

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 &= -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

D'où le schéma électrique et le schéma équivalent tenant compte des résistances des spires sur la figure (4.8).

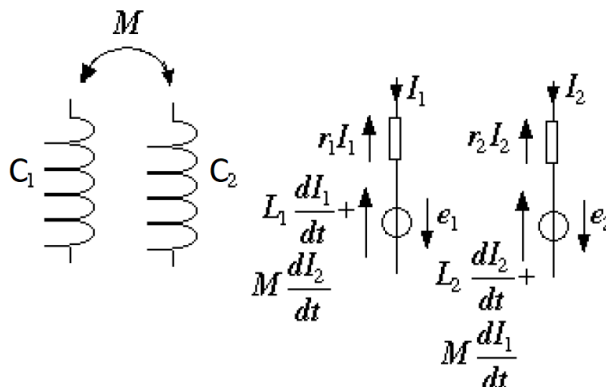


FIGURE 4.8 – *circuit couplés*

## 4.4 Application des phénomènes d'induction

### 4.4.1 Générateur de courant alternatif

Une bobine, comportant  $N$  spires, tourne autour d'un axe  $z'z$  vertical, à la vitesse angulaire  $\omega$  constante, dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et constant. Le champ est perpendiculaire à  $z'z$  (figure 4.9). A l'instant  $t$ , la normale  $\vec{n}$  à la bobine fait avec  $\vec{B}$  un angle  $\theta = \omega t$ . Le flux magnétique embrassé à cet instant

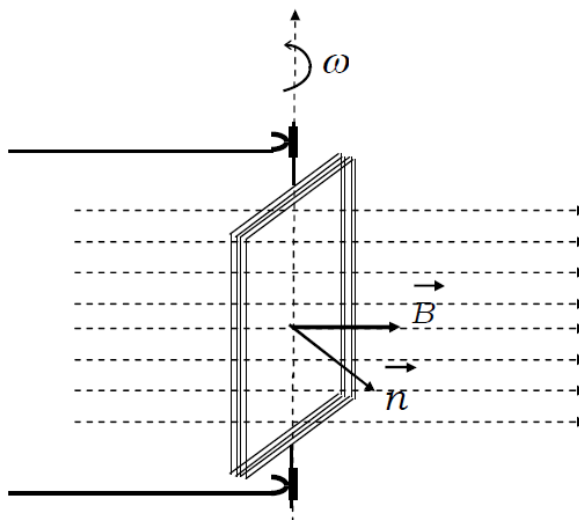


FIGURE 4.9 –

par la bobine est :

$$\Phi(t) = \Phi_M \cos(\omega t)$$



où  $\Phi_M = NBS$ . Il en résulte dans la bobine une f.é.m induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_M \sin(\omega t) = E_M \sin(\omega t).$$

C'est le principe de l'alternateur monophasé.

### Exercice

On considère le dispositif décrit dans le paragraphe précédent et représenté sur la figure 4.9. Le cadre a une longueur  $L = 12\text{cm}$ , une largeur  $l = 6\text{cm}$ , et comporte  $N = 250$  spires. Le champ magnétique a pour intensité  $B = 0,1$  tesla. Le cadre tourne en effectuant  $n = 3000$  tours par minute.

1) Calculer la force électromotrice induite dans le cadre.

2) Le cadre est, à présent, fermé, par l'intermédiaire d'un système, sur une résistance pure  $R$ . Il en résulte un courant électrique dont la valeur instantanée est  $i$ . Sachant que le cadre a une résistance  $r$  et une self  $L$ , trouver, à partir de la loi d'Ohm, la relation entre  $i$ ,  $t$ ,  $R$ ,  $r$  et  $L$ .

On néglige par la suite  $r$  et  $L$ , calculer le courant  $i$  sachant que  $R = 100\Omega$ .

3) Trouver l'expression du couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre.

Calculer sa valeur moyenne sur une période.

4) Ce couple est opposé au couple moteur, calculer la puissance moyenne qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement du cadre.

### Solution

1) L'expression de la f.é.m induite est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = E_M \sin(\omega t).$$

avec  $E_M = 2\pi f NBS$  où  $f = \frac{3000}{60} = 50$  tours par seconde, soit une période :  $T = 1/f = 2 \cdot 10^{-2}\text{s}$  d'où  $E_M = 56,52\text{volts}$

2) La loi d'Ohm permet d'écrire  $e - L\frac{di}{dt} - ri = Ri$  où  $u(t) = Ri$  est la d.d.p aux bornes de  $R$ . Si  $L \sim 0$  et  $r \sim 0$  l'équation précédente devient :

$$e(t) = u(t) = Ri$$

$$u(t) = U_M \sin(\omega t) \Rightarrow i(t) = \frac{u}{R} \sim \frac{E_M}{R} \sin(\omega t) \Rightarrow I_M = \frac{E_M}{R} = 0,56\text{A}$$

3) Le couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre a pour expression :  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{M} = NiS\vec{n}$  est le moment magnétique du cadre.

La valeur de son module à l'instant  $t$  est :  $\Gamma = NiSB \sin(\theta) = NSBI_M \sin^2(\omega t)$  et sa valeur moyenne est :

$$\Gamma_M = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma dt = NSBI_M \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} NSBI_M = 0,05\text{Nm}$$

4) Expression de la puissance instantanée qu'il faut fournir au cadre

$$p(t) = u(t)i(t) = U_M I_M \sin^2(\omega t)$$

Valeur moyenne de la puissance.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} U_M I_M = 15,8\text{watts}.$$

## 4.4.2 Courants de Foucault

Des courants électriques induits, appelés "courants de Foucault", prennent naissance dans une masse conductrice

- lorsque cette masse se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant,
- ou bien si la masse, étant immobile, le champ varie

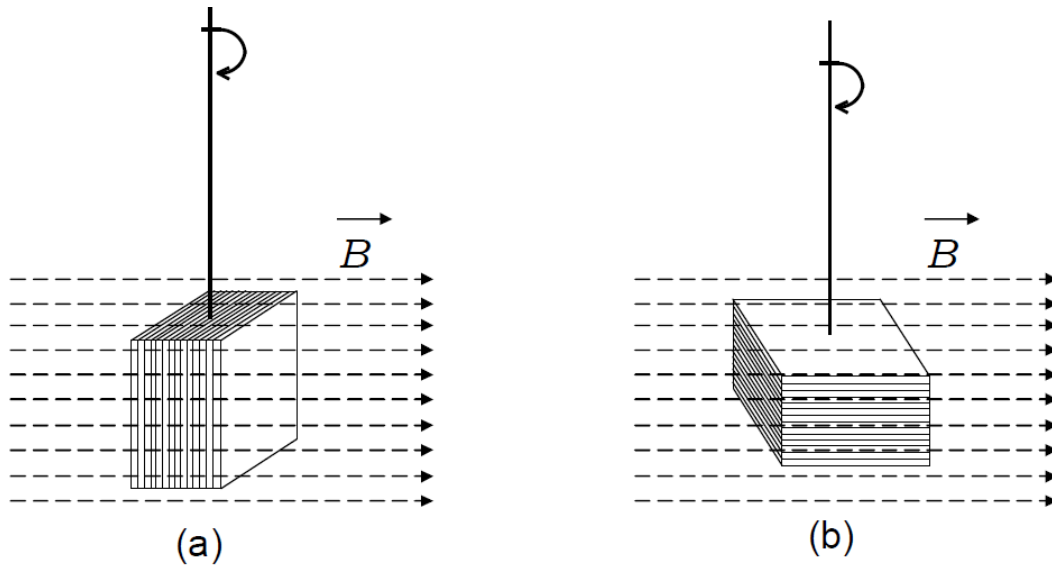


FIGURE 4.10 –

Dans le premier cas, ces courants créent des forces qui, en vertu de la loi de Lenz, s'opposent au mouvement. Ce phénomène a pour application le freinage électromagnétique.

Les courants de Foucault, en circulant dans la masse métallique, dissipent de l'énergie par effet Joule. Cette dissipation d'énergie entraîne un échauffement du métal. Dans les machines électriques (les transformateurs par exemple), on diminue les pertes par courants de Foucault par l'emploi de circuits magnétiques feuilletés. Les feuilles métalliques sont séparées les unes des autres par un vernis isolant. Les figures 4.10, mettent en évidence l'effet du feuilletage. Une masse tourne dans un champ invariant : si la masse est pleine le freinage est intense. Si la masse est feuilletée et les feuilles perpendiculaires aux lignes de champ, le freinage diminue légèrement, mais si elles sont parallèles le freinage est nettement atténué. Par contre les courants de Foucault sont avantageux pour la réalisation de fours à induction.