Faculté des Sciences
Département de Physique
Kénitra, Maroc

Travaux Pratiques de Physique

Licence Fondamentale SMP, S3

Module : Mécanique du Solide

Responsable :

Pr. Mohamed GOUIGHRI

Année Universitaire : 2022 - 2023

Quelques Consignes

Les travaux pratiques sont des développements des enseignements et doivent en permettre une meilleure compréhension, mais aussi ils doivent être considérés comme une initiation à: la méthodologie, la précision de la mesure, l'analyse et l'esprit critique.

Avant la séance de TP, vous devez lire l'énoncé et savoir répondre aux questions suivantes:

- Quel est le système étudié ?
- Comment est-il constitué ?
- Que va-t-on mesurer, avec quels moyens et dans quel but
- Quelles sont les conclusions attendues ?

Les parties théoriques du TP doivent être faites avant la séance pour vous permettre de vous consacrer pleinement aux mesures et à leur traitement.

Vous devez rendre à la fin de chaque séance, à votre enseignant un compte rendu par binôme. Ce compte-rendu doit synthétiser les résultats obtenus et sera noté.

Sommaire

Rappels : Ecriture et calcul des incertitudes

I. LECTURE DES MESURES.

Les appareils de mesure dans leur grande diversité donnent un affichage numérique ou analogique de la grandeur mesurée. Dans les deux cas, il y a une incertitude de mesure due à la précision de l'appareil et à l'exactitude de son calibrage (position du zéro et étalonnage de l'appareil). A cela se rajoute, dans le cas d'un affichage analogique, l'incertitude de lecture.

I.1 Affichages numériques.

On pourrait être tenté de croire qu'un tel affichage ne comporte pas d'erreur : ceci est FAUX. Cas d'un affichage stable : 8.35 V incertitude sur le dernier chiffre affiché, donc la mesure est au mieux à ± 0.01 V et au pire à ± 0.09 V.

Si on dispose de la notice de l'appareil, le constructeur indique la précision de la mesure, qui varie souvent d'un calibre à l'autre. Elle est généralement donnée en % de la mesure, ou en (% de la mesure ± 1 ou 2 « digit »), ce qui correspond à l'incertitude d'affichage expliquée ci- dessus. L'erreur de calibre et l'erreur d'affichage peuvent être du même ordre de grandeur : auquel cas il faut les ajouter, ou d'ordre différent, auquel cas il faut au moins s'aligner sur la plus grande.

(NB : « erreur » pour « incertitude »)

I.2 Affichages analogiques.

Le principe de l'incertitude due à la précision du calibre existe sur les appareils analogiques de la même façon que sur les appareils numériques. Elle se calcule de la même façon si on dispose des informations du constructeur. A cela se rajoute l'incertitude de lecture.

II – ECRITURE DES INCERTITUDES.

Par convention, le dernier chiffre d'un résultat numérique est celui sur lequel porte l'erreur ; si on écrit l'incertitude, celle-ci est arrondie à un chiffre, situé à la même précision que le dernier chiffre du résultat. On écrit (grandeur) = (meilleure estimation de la mesure) +/- (incertitude)

Ex : 23.4 ± 0.3 cm ; 23.0 ±0.5 cm ; mais PAS : 23 ± 0.5 cm ou 23.2 ± 20 mm !!!

Chiffres significatifs :

La notion de chiffre significatif est intimement liée à celle de précision. Plus un résultat contient de chiffres significatifs, plus il est précis. Pour déterminer le nombre de chiffres significatifs d'une valeur, on utilise la convention précédente d'écriture des résultats. Prenons par exemple 10,2. L'incertitude porte sur le dernier chiffre et sa valeur minimale est donc de 0,1. Ecrivons cette incertitude sous la forme d'un chiffre (et non plus d'un nombre), en utilisant la puissance de 10 adéquate : $0,1 = 1.\ 10^{-1}$. Il suffit ensuite d'écrire 10,2 en utilisant la même puissance de 10 : $10,2 = 102.\ 10^{-1}$. Il faut 3 chiffres pour écrire 102, ce sont les chiffres significatifs.

Ex : 0,025 : $0,025 \pm 0,001 = (25 \pm 1)\ 10^{-3}$ donc : 2 chiffres significatifs.

0,0250 : $0,0250 \pm 0,0001 = (250 \pm 1)\ 10^{-4}$ donc : 3 chiffres significatifs.

Bien que 0.025 et 0.0250 représentent la même valeur, écrire 0.0250 implique une précision 10 fois plus élevée que 0,025. Ecrire un zéro n'est donc jamais anodin...

La connaissance du nombre de chiffres significatif est utile lorsqu'on veut écrire une grandeur calculée à partir d'une mesure sans passer par le calcul d'incertitude de cette grandeur. En effet, en première approximation nous pouvons utiliser la règle du report du nombre de chiffres significatif. Ainsi si la mesure de m comporte 5 chiffres significatifs, toutes les valeurs calculées à partir de m comme $1/m$, m^2… devront être écrite avec 5 chiffres significatifs.

III - INCERTITUDES ABSOLUES ET INCERTITUDES RELATIVES.

L'incertitude absolue est une grandeur du même type que la mesure m ; elle a la même unité (s'il y a lieu). On la note Δm. Si on ajoute deux valeurs, on ajoute leurs incertitudes.

Ex : $L_1 = 23.4 \pm 0.2$ cm et $L_2 = 12.0 \pm 0.3$ cm : $L_1 + L_2 = 35.4 \pm 0.5$ cm

Il arrive souvent que l'on veuille comparer l'incertitude à sa mesure ; on parle alors d'incertitude relative. On la note $\frac{\Delta m}{m}$.

Ex : On pèse $m_1 = (200 \pm 2)$ g ; $m_2 = (2\,000 \pm 2)$ g ; $m_3 = (200 \pm 2)$ kg

L'incertitude absolue sur m_1 et m_2 est la même : 2 g ; celle sur m_3 est 1000 fois plus grande (2 kg).

L'incertitude relative sur m_1 est 2/200 soit 1%, l'incertitude relative sur m_2 est 2/2 000 soit 0.1% (10 fois plus petite) , l'incertitude relative sur m_3 est 2/200 = 1%, la même que sur m_1.

IV - CALCUL DES INCERTITUDES.

IV.1 Rappels sur la différentielle d'une fonction.

A toute fonction dérivable d'une seule variable, $y = f(x)$, on relie la variation locale de y à la variation locale de x par la forme dite " différentielle ", $dy = f'(x)\, dx$.

C'est à dire qu'autour de ce point x, on assimile la variation de f(x) avec le produit de la dérivée en x par la variation de x (on " linéarise " la fonction f en x). La différentielle s'écarte d'autant moins de la vraie variation de f(x) que l'intervalle dx est petit (tend vers zéro).

Ecriture : $y = a\,x^n \;\Rightarrow\; dy = a\,n\,x^{n-1}dx;\;\; Y = \ln(ax+b) \;\Rightarrow dY = \frac{a}{ax+b}dx$

Pour une fonction de plusieurs variables, on généralise en utilisant les dérivées partielles calculées en supposant une grandeur variable et les autres fixes :

Soit f(x,y) : $df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

IV.2 Utilisation de la différentielle.

Lorsqu'un résultat R est obtenu après un calcul utilisant des mesures m_i, on doit déterminer l'incertitude sur le résultat en fonction des incertitudes sur les différentes mesures. Selon les cas, il sera plus facile de déterminer l'incertitude absolue ΔR ou l'incertitude relative ΔR / R.

Quand les opérations en jeu sont des sommes ou des différences, on utilise les incertitudes absolues. Dans le cas où R s'écrit comme une fonction de plusieurs variables, on utilisera la différentielle pour exprimer la variation sur R à partir des variations Δm_i.

<u>Notations :</u> Soit G une grandeur physique.

G_m est la valeur mesurée de G.

G_e est la valeur "exacte " de G (mais forcément inconnue).

L'erreur absolue que l'on fait sur une mesure est notée :

$\delta G = G_m - G_e$ (δG est alors inconnue).

L'incertitude sur G, que l'on note ΔG et que l'on prend positive, est la limite supérieure de l'erreur (le pire des cas). Contrairement à δG, ΔG peut être estimée.

Cas général

Supposons que la grandeur physique G soit reliées à d'autres grandeurs physiques x, y, z… par une relation mathématique connue : G = f (x, y, z…).

Ce sont les valeurs de x, y et z que l'on mesure expérimentalement et dont on connaît les incertitudes de mesure Δx, Δy, Δz… La valeur de G est obtenue par le calcul (relation mathématique) et l'objectif est de connaître l'incertitude ΔG qui se répercute sur G du fait des incertitudes Δx, Δy, Δz...

Les différentes étapes du calcul de ΔG sont les suivantes :

G = f(x, y, z…)

1ère étape : Différencier

$$dG = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz + \ldots$$

avec $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ (dérivée partielle de f par rapport à la variable x)

On suppose que l'erreur de mesure est suffisamment petite pour que δG ≠ dG et donc :

$\delta G = f'_x\,\delta x + f'_y\,\delta y + f'_z\,\delta z + \ldots$

2ème étape : Chercher le maximum de δG

ΔG, la limite supérieure de l'erreur prise positive est définie par :

$$\Delta G = |\delta G|_{max} = |(f'_x\delta_x)_{max}| + \left|\left(f'_y\delta_y\right)_{max}\right| + |(f'_z\delta_z)_{max}| + \ \ldots$$

$$= \ |f'_x|\,|\delta_x|_{max} + \left|f'_y\right|\left|\delta_y\right|_{max} + |f'_z|\,|\delta_z|_{max} + \ \ldots = |f'_x|\,\Delta_x + \left|f'_y\right|\Delta_y + |f'_z|\,\Delta_z + \ \ldots$$

Exemple d'application : $G(x, y, z) = -xy - \frac{z}{x+1}$

1ère étape : différencier : $dG = \left(-y + \frac{z}{(x+1)^2}\right)dx - xdy - \frac{dz}{x+1}$

2ème étape : majorer $\Delta G = \left|-y + \frac{z}{(x+1)^2}\right|\ \Delta x + |-x|\,\Delta y + \frac{\Delta z}{|x+1|}$

Cas particulier : « dérivée logarithmique » et incertitudes relatives

Dans le cas où la grandeur G apparaît sous forme de produits ou quotients des autres grandeurs, on simplifie beaucoup les calculs en différentiant le logarithmique de G.

Soit une fonction $G(x, y, z) = x^a y^b z^c$, alors $\frac{\Delta G}{|G|} = |a|\,\frac{\Delta x}{|x|} + |b|\,\frac{\Delta y}{|y|} + |c|\,\frac{\Delta z}{|z|}$

<u>Exemple 1</u>: $G = \frac{x}{yz^2} = x^1 y^{-1} z^{-2}$

Alors on définit F telle que : $F = \ln G = \ln x + \ln y + 2 \ln z$

$$dF = d(lnG) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = \frac{1}{G}dG = \frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy - \frac{2}{z}dz$$

En écrivant de nouveau : $\Delta G = |\delta G|_{max}$

On obtient : $\frac{\Delta G}{|G|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{2\Delta z}{|z|}$

Cette technique de calcul est à connaitre « par coeur », on l'applique chaque fois que c'est possible (plus rapide que la méthode « générale).

<u>Exemple 2</u> : $I = RD/a^2$, on a : $\Delta I/I = \Delta R/R + \Delta D/D + 2\ \Delta a/a$

Remarque : " Estimation " rapide des incertitudes.

Dans certains cas seulement, on peut avoir une idée (généralement par excès) de l'incertitude en calculant R_{max} ou R_{min} par les valeurs des $m_i + \Delta m_i$ ou $m_i - \Delta m_i$

<u>Example</u>: V = 220 ± 3 volts, I = 4.5 ± 0.1 A ; on trouve R = V / I = 48.889 Ω. Que vaut ΔR ?

- Par les différentielles logarithmiques : $R = \frac{V}{I}\ donc\ lnR = lnV - lnI \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}$

AN: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{3}{220} + \frac{0.1}{4.5} = 0.036 \Rightarrow \Delta R = 1.753\ \Omega\ \ on\ peut\ ecrire\ R = 49 \pm 2\Omega$

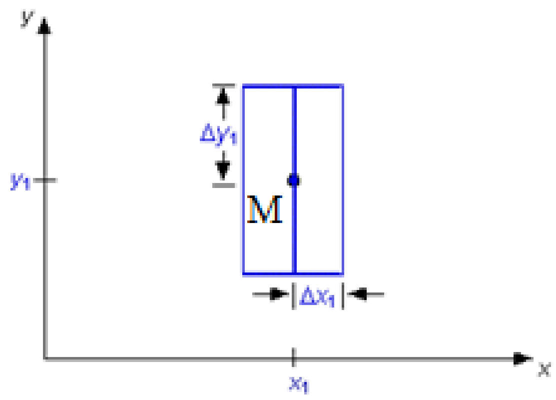
- Par estimation : $R_{max} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = \frac{223}{4.4} = 50.68\ \Omega$ et $R_{min} = \frac{V_{min}}{I_{max}} = \frac{217}{4.6} = 47.17\ \Omega$

$R = \frac{R_{max}+R_{min}}{2} = 48.925\ \Omega$ et $\Delta R = \frac{R_{max}-R_{min}}{2} = 1.755\ \Omega$ on peut ecrire $R = 49 \pm 2\Omega$.

V. pente, courbe et rectangle d'incertitude

Cette capsule vous présente les différentes étapes menant au calcul de la pente d'un graphique et de son incertitude.

Chacun des résultats expérimentaux possède son incertitude. On représente les domaines d'incertitude de ces résultats comme indiqué sur la figure ci-contre. Le résultat expérimental n'est pas un point sur le graphique mais plutôt un domaine de valeurs possibles ayant la forme d'un rectangle (lorsqu'il y a des incertitudes en ordonnée ainsi qu'en abscisse).



Rectangle d'incertitude

Rectangle d'incertitude centré sur le point M de cotés $2\Delta x_1$ et $2\Delta y_1$ avec :

$$x_1 - \Delta x_1 \leq x_1 \leq x_1 + \Delta x_1\ \ et\ \ y_1 - \Delta y_1 \leq y_1 \leq y_1 + \Delta y_1$$

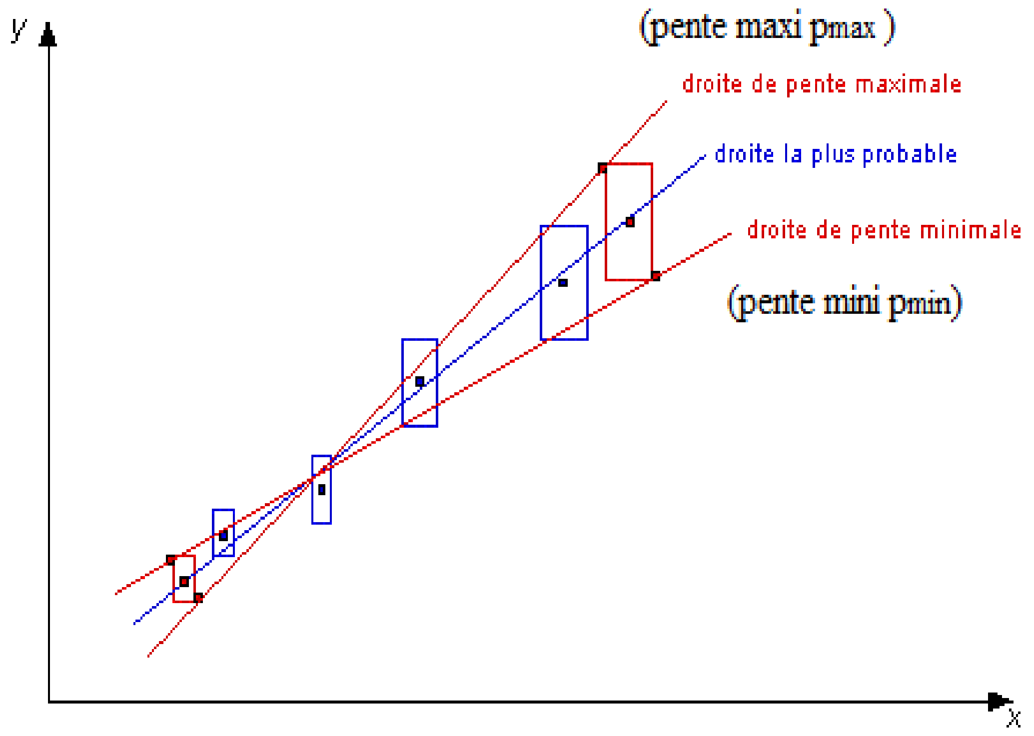
1. Les résultats expérimentaux sont placés sur le graphique. Les résultats expérimentaux et leurs incertitudes associées sont représentés sur le graphique par un ensemble de domaines d'incertitude en forme de rectangles.

2. La pente la plus probable est celle de la «meilleure» droite. En traçant cette droite, on doit minimiser les écarts entre celle-ci et les points expérimentaux (sans tenir compte des incertitudes). Normalement, la droite passe par tous les domaines d'incertitude. (par exemple : Excel trace cette droite en utilisant la régression linéaire).

3. Le calcul de la pente se fait en choisissant deux points sur la droite (les deux points d'extrémités : points sont indiqués en rouge). Ces points ne sont pas des points expérimentaux. Ils se situent légèrement à l'extérieur de la région dans laquelle se trouvent les points expérimentaux.

4. Pour obtenir l'incertitude associée à la pente la plus probable, on associe à chaque point, servant au calcul de la pente, un domaine d'incertitude. Ce domaine d'incertitude a les mêmes dimensions que celles du point expérimental le plus proche. Les domaines d'incertitude, ainsi obtenus (en rouge sur la figure), permettent de tracer les droites de pentes extrêmes (pente maxi et pente mini).

5. Les pentes extrêmes s'obtiennent à partir des droites extrêmes. Pour calculer ces pentes, on utilise les coordonnées des points apparaissant en rouge aux extrémités des rectangles. Les coordonnées de ces points peuvent être obtenues en utilisant l'équation de la droite la plus probable ainsi que l'incertitude associée au point expérimental le plus proche.



On exprime la pente avec son incertitude absolue sous la forme suivante : Pente = p ± Δp avec :

$$p = \frac{\Delta p_{max} + \Delta p_{min}}{2} \; et \; \Delta p = \frac{\Delta p_{max} - \Delta p_{min}}{2}$$

TP N°1: Pendule de torsion

I - But

Le but de cette manipulation a pour but de :

- vérifier l'isochronisme des oscillations.
- mesurer la constante de torsion d'un fil d'acier.
- mesurer le moment d'inertie du balancier.
- trouver le moment d'inertie d'un corps solide en rotation autour d'un axe vertical parallèle au fil.

II - Appareillage de mesure

Le pendule est constitué par un support rigide sur lequel est fixé, à ses deux extrémités A et A', un fil d'acier. La longeur AA'=L reste constante durant toute la manipulation. Le balancier est formé par une tige horizontale sur laquelle peuvent étre fixées deux surcharges de masse identique ***m***.

Le schéma représentatif est illustré dans la figure 1

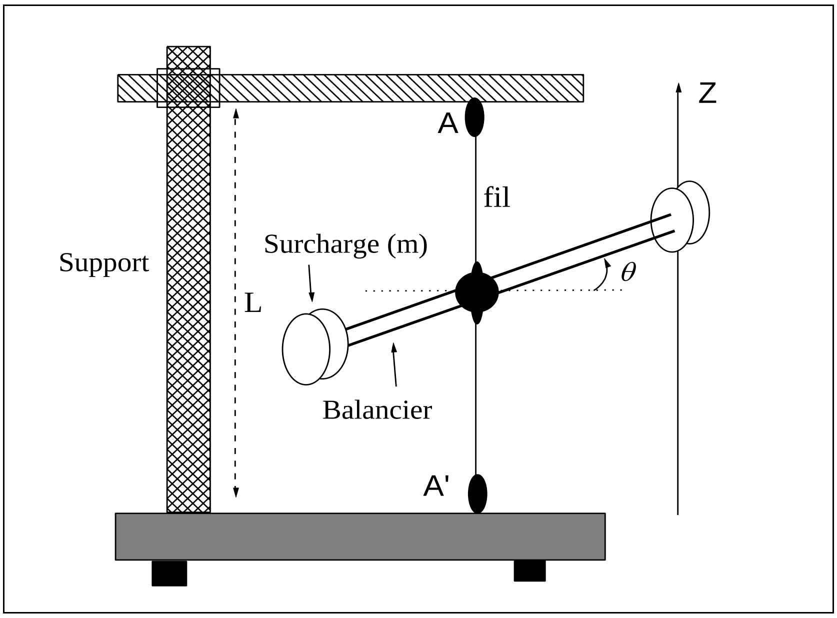


Figure 1: Schéma du pendule utilisé à la salle de TP.

III - Partie théorique

III.1 - Equation du mouvement

Soient C1 et C2 les constantes de torsion respectivement des parties inférieure et supérieure du fil. Soit I le moment d'inertie total (du balancier et des surcharges) par rapport à l'axe AA'.

Le balancier écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ est soumis au couple de rappel :

$$M_c = C_1\theta + C_2\theta = C\theta \qquad \text{avec} \quad C = C_1 + C_2 \tag{1}$$

Si l'on néglige les forces de frottement, l'équation du mouvement en équilibre s'écrit comme suite :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0 \tag{2}$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution générale s'écrit sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

C'est un mouvement sinusoidal de période T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \tag{4}$$

Les constantes θ_m et φ sont déterminées grâce aux conditions initiales. C et I étant fixés, la période ne dépend pas de l'amplitude. On dit que *les oscillations sont isochrones*.

Sans les surcharges, le balancier oscille avec une période T_o telle que :

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{C}} \tag{5}$$

Où I_o est le moment d'inertie, par rapport à AA', du balancier sans les surcharges.

III.2 - Moment d'inertie I

Soit I_{GZ} le moment d'inertie d'une seule surcharge par rapport à l'axe GZ parallèle à AA' et passant par le centre de gravité de la surcharge. En applicant le théorème d'hygens, le moment d'inertie total par rapport à AA' s'écrit:

$$I = I_o + 2I_{GZ} + 2mr^2 \tag{6}$$

avec *m* represente la charge d'une seule surcharge.

Si l'on place les deux surcharges à une distance r_1 de l'axe (AA'), le moment d'inertie total et la période d'oscillation seront :

$$I_1 = I_o + 2I_{GZ} + 2mr_1^2 \tag{7}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{C}} \tag{8}$$

De même à une distance r_2 de l'axe (AA'), le moment d'inertie total et la période d'oscillation seront :

$$I_2 = I_o + 2I_{GZ} + 2mr_2^2 \tag{9}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{C}} \tag{10}$$

On en déduit que la constante de torsion C et les moments d'inertie I_o et I_{GZ} à pour expressions:

$$C = 8\pi^2 m\frac{r_2^2 - r_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \tag{11}$$

$$I_o = \frac{C}{4\pi^2}T_o^2 = 2m\frac{r_2^2 - r_1^2}{T_2^2 - T_1^2}T_o^2 \tag{12}$$

$$I_{GZ} = \frac{C}{8\pi^2}(T_1^2 - T_o^2) - mr_1^2 \tag{13}$$

Remplaçant I dans l'expression de la période T, on obtient:

$$T^2 = \frac{8\pi^2}{C}mr^2 + \frac{4\pi^2}{C}(I_o + 2I_{GZ}) \tag{14}$$

La representation de T^2 en fonction de r^2 est une droite sous la forme ($y = ax + b$) dont la pente ' a 'nous permet de calculer la masse m et le coefficient ' b ' nous permet de dérminer le moment I_{GZ} .

IV - Manipulation

IV.1- Isochronisme des oscillations

Travail à faire pendant la séance de TP

a) Ecarter le balancier sans surcharges d'un angle θ_1 petit ($\theta_1 \leq 10°$) et mesurer la période correspondante à 10 oscillations.

b) Fraire de même pour un angle θ_2 un peu plus petit.

Rassemmbler les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Temps (s)	t_1	t_2	t_3	t_m	Δt_m	Δt_{ch}	Δt	T_o	ΔT_o
θ_1 petit									
θ_2 plus petit									

On donne :

- L'erreur du chronomètre est $\Delta t_{ch} = 0{,}1$ s
- L'incertitude de mesure est $\Delta t_m = \sup |t_m - t_i|$, t_m represente la valeur moyenne des trois mesures et i = 1, 2 et 3.
- L'incertitude totale est $\Delta t = \Delta t_{ch} + \Delta t_m$

c) Comparer les valeurs ainsi que les incertitudes des deux valeurs de l'angle θ.

d) Conclure.

IV.2- Détermination de C et I_o.

a) Placer les deux surcharges respectivement à la distance r_1 = 5 cm et r_2 = 10 cm de l'axe de balancier en faisant osciller le balancier à chaque cas. Prendre 10 oscillations et remplir le tableau suivant :

Temps (s)	t_1	t_2	t_3	t_m	Δt_m	Δt_{ch}	Δt	T	ΔT
$r_1(cm)$									
$r_2(cm)$									

On donne : Δr = 1 mm et m= (197.4 ± 0.1) g ou m= (353 ± 0.1) g. Vérifier la masse.

b) Calculer la constante de torsion de fil C et ΔC. Ecrire le résultat sous la forme : *(a ± Δa) unité.*

c) En déduire le moment d'inertie I_o et ΔI_o ainsi que I_{GZ} et ΔI_{GZ}. Ecrire les résultats trouvés sous la forme *(a ± Δa) unité*

IV.3 - Détermination de I_{GZ} expérimentalement

Le balancier étant toujours avec les deux surcharges.

a) Prendre la valeur de 10 oscillations pour chaque distance de r_3=3 cm à r_{10}= 10 cm. Remplir le tableau suivant.

Distance r_i (cm)	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_m(s)	Δt(s)	T(s)	ΔT(s)	T^2	$\Delta(T^2)$	r^2	$\Delta(r^2)$
								(s²)		(m²)	
r=3											
r=4											
r=5											
r=6											
r=7											
r=8											
r=9											
r=10											

On donne : Δr= 1 mm et $\Delta(r^2)=2\, r\, \Delta r$

b) En précisant les échelles choisies, représenter graphiquement T^2 en fonction de r^2 (points expérimentaux).

c) Représenter sur le même graphique les rectangles d'incertitudes $\Delta(T^2)$ et $\Delta(r^2)$.

d) Tracer les droites limites et calculer leurs pentes p_1 et p_2, et en déduire la pente moyenne $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$ et son incertitude $\Delta p = \frac{|p_1 - p_2|}{2}$.

e) Déterminer alors la masse m et son incertitude Δm. Ecrire le résultat sous la forme *(a ± Δa) unité*.

f) Calculer le moment d'inertie I_{GZ} et ΔI_{GZ}. Ecrire le résultat sous la forme *(a ± Δa) unité*

g) Comparer avec I_{GZ} trouvé précédemment. Conclure.

TP N°2 : Pendule pesant réversible

I - But

Le but de cette manipulation est d'étudier l'isochronisme d'un pendule pesant et de déterminer ses axes réciproques (voir explication-ci-après). Une application particulière de cette étude est la mesure de l'accélération de la pesanteur de Kénitra.

II - Rappels théoriques et principes

II.1- Schéma et principes du pendule reversible

Un pendule pesant est un système oscillant en rotation autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie.

Considérons un solide tournant autour d'un axe horizontal (Δ) au point O ne passant pas par son centre de gravité G et placé dans un champ de pesanteur. Déplacé de sa position d'équilibre (stable) dans laquelle le centre de gravité est à la verticale de l'axe, le solide se met à osciller de part et d'autre de cette position dite d'équilibre (Figure 1).

Dans ces conditions, la période est indépendante de la forme et de moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe. Elle ne dépend que de la distance OG et de l'intensité de la pesenteur g.

La mesure de la période T permet donc de déterminer g avec précision.

On pose :

- L : la distance entre O et le centre d'inertie G du pendule (L=OG).
- M : la masse du pendule
- θ : l'angle d'inclinisation du pendule

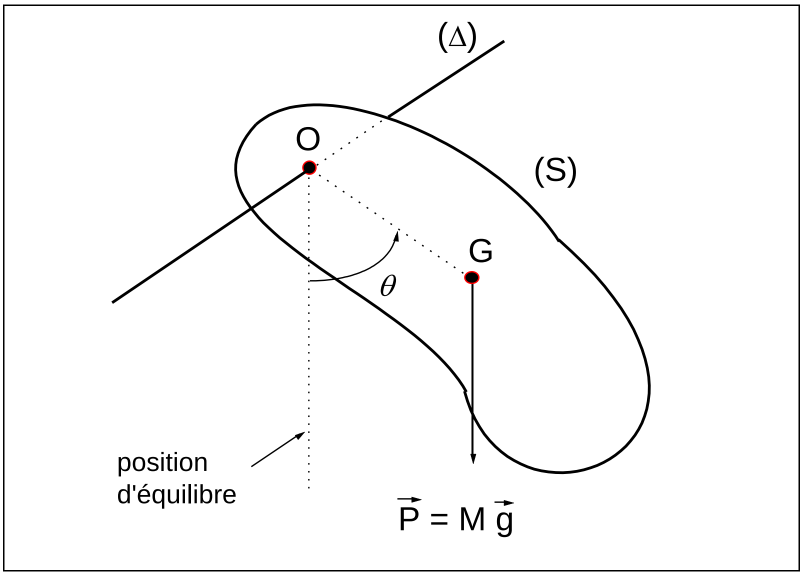


Figure 1 : Schéma et principe du pendule réversible

II.2- Etude du mouvement du pendule

On écart le système d'un angle θ de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale, il commence à osciller autour de sa position d'équilibre.

Le théorème du moment cinétique appliqué à (S) par rapport à un référentiel Galiléen donne :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = M(\vec{F}_{ext})/(\Delta) \tag{1}$$

où $M(\vec{F}_{ext})/(\Delta)$ represente la somme des moments des forces extérieures appliquées à (S) par rapport à (Δ) et J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ).

Or $$M(\vec{F}_{ext})/(\Delta) = -MgL\sin(\theta) \tag{2}$$

Ce qui donne :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL\sin(\theta) = 0 \tag{3}$$

Cette équation n'a pas de solution analytique, sa solution est numérique. Cependant, on peut la traiter dans l'approximation des petits angles. Dans ce cas, $\sin\theta \approx \theta$. On pose $\omega^2 = \dfrac{MgL}{J}$.

Donc l'équation précédente deviennt:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\,\theta = 0 \qquad (4)$$

C'est une équation différentielle du second ordre en θ sans second membre. Cette dernière équation à pour solution:

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t + \phi) \qquad (5)$$

Ou θ_0 est l'amplitude maximale et φ la phase. Le mouvement du pendule est donc sinusiodal de période:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MgL}} \qquad (6)$$

II.3- Expression de J

Par définition du moment d'inertie

$$J(S/\Delta) = \int r^2 dm \qquad (7)$$

R est la distance d'un point quelconque M du solide (S) à l'axe de rotation. Si l'on désigne par

$$J(S/\Delta) = J(S/\Delta_G) + Ml^2 \qquad (8)$$

Ou l est la distance entre Δ_G et Δ

II.4- Pendule simple synchrone d'un pendule pesant

Un pendule simple peut être considéré comme un pendule pesant ou le solide (S) est réduit à un pont matériel suspendu par un fil inextensible de masse négligeable. Le moment d'inertie du pendule simple par rapport à l'axe de rotation (Δ) est alors :

$$J = mL^2 \tag{9}$$

Ou m est la masse du point matériel et L la longueur de fil. D'après l'équation du mouvement

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgl}} \tag{10}$$

La période du pendule simple est :

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{11}$$

Le pendule simple qui a la même période que le pendule pesant est appelé pendule simple synchrone au pendule pesant. Sa longueur peut etre déterminer par

$T_s = T_p$

$$2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{12}$$

II.5- Axes réciproques d'un pendule pesant réversible

Si l'on pose $I_0^2 = J(S/\Delta)/M$

Le moment d'inertie J devient :

$$J = M\left(l^2 + I_0^2\right) \tag{13}$$

Et la période devient :

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l + \frac{l_0^2}{l}}{g}} \tag{14}$$

Si I=0 (G et O sont confondus), la période sera infinie. Elle est minimale pour $I=I_0$.

Si à une distance l_1 la période est Tp_1 et à une distance l_2 différente de l_1 la période est Tp_2, la relation entre l_1 et l_2 pour que Tp_1 soit égale à Tp_2 est :

$$Tp_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + \frac{l_o^2}{l_1}}{g}} = Tp_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2 + \frac{l_o^2}{l_2}}{g}} \tag{15}$$

D'où $l_1 l_2 = l_o^2$

Deux axes D1 et D2 situés dans un pland contenant le centre de gravité et placés de part et d'autre de celui-ci aux distances l_1 et l_2 sont dite des axes réciproques.

Les périodes d'oscillation du pendule autour de ces axes sont égales.

Soit $L=l_1+l_2$: la distance entre deux axes réciproques. Nous pouvant écrire :

$$l_1 + \frac{l_o^2}{l_1} = l_2 + \frac{l_o^2}{l_2} = l_1 + \frac{l_1 l_2}{l_1} = l_2 + \frac{l_1 l_2}{l_2} = l_1 + l_2 = L \tag{16}$$

D'où $$Tp_2 = Tp_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = T_s \tag{17}$$

La période du pendule pesant est la même que celle d'un pendule simple dont la longueur est égale à la distance entre les axes réciproques. C'est le pendule simple synchrone du pendule pesant.

III- Application au pendule disponible à la salle de TP.

Le pendule disponible à la salle de TP se présente selon le schéma de la figure 2 comprend une tige lestée en acier sur laquelle peut coulisser un bloc de section carrée (qui peut être immobilisée en toute position grâce à un vice de serrage). Le bloc repose par sa face inférieure (contenant un trait grave) sur deux pointes en acier trempé formant ainsi l'axe de rotation du pendule.

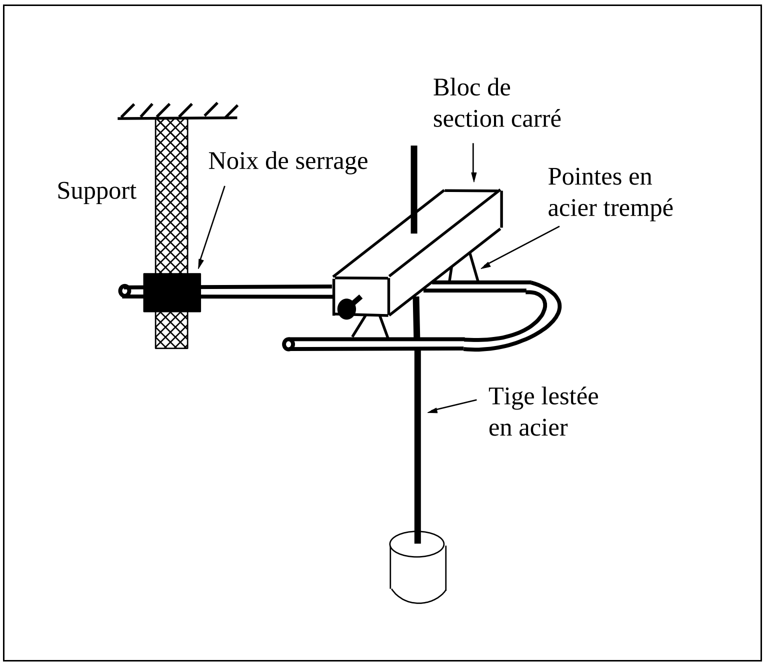


Figure 2 : Schéma du pendule disponible à la salle de TP

Schématiquement, le pendule pesant reversible peut être représenté comme l'indique la figure 3. L'axe de rotation du pendule est le support du trait gravé. A l'aide du théorème d'Hygens le moment d'inertie de l'ensemble (tige lestée + bloc de section carrée) par rapport à l'axe est :

$$J = J_1 + J_2 + ML^2 \tag{18}$$

$$\text{Si} \qquad J_0 = J_1 + J_2 \quad \text{alors} \quad J = J_0 + ML^2 \tag{19}$$

Par rapport à un repère galiléen, les forces extérieures agissant sur l'ensemble du système sont le poids Mg de la tige lestée et le poids mg du bloc.

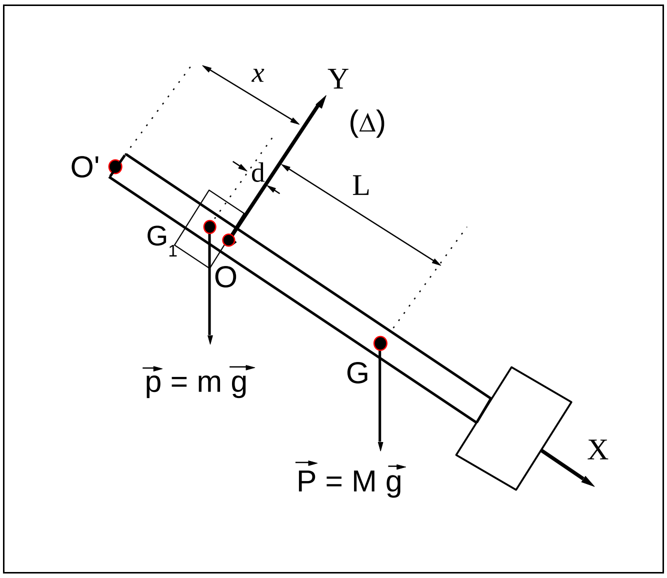


Figure 3 : Schéma du pendule

L'équation du mouvement est donc :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{MgL-mgd}{J_0+ML^2}\right)\theta=0 \tag{20}$$

La période du mouvement est alors :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_0+ML^2}{MgL-mgd}} \tag{21}$$

La langueur L du pendule simple synchrone à ce pendule pesant sera donnée par :

$$T_p^2=4\pi^2\frac{L}{g} \tag{22}$$

$$L=\frac{gT_p^2}{4\pi^2} \tag{23}$$

IV- Manipulation

IV.1- Isochronisme des petites oscillations.

Répondre aux questions :

a) En prenant deux valeurs de θ comme suite ($\theta_1 < \theta_2 \leq 10°$), faire osciller dans chaque cas le pendule et noter le temps t correspondant à 10 oscillations. Remplir le tableur 1.
b) Comparer les deux valeurs de T (pour θ_1 et θ_2) et conclure.

Temps (s)	t_1	t_2	t_3	t_m	Δt_m	Δt_{ch}	Δt	$T(s)$	$\Delta T(s)$
θ_1									
θ_2									

IV.2- Détermination expérimentale des axes réciproque du pendule révirsible

1- Soit x la distance de l'extrémité de la tige à l'axe de rotation (x=OO').

Faire varier x de pas de 10 cm et mesurer chaque fois la période de 10 oscillations. Rassembler les données dans le tableau ci-après.

Remarque :
Pour x faible, le pendule oscille surcharge en bas. Quand l'axe de rotation est au voisinage du centre de gravité de l'ensemble du système, la période tend vers l'infini. Pour continuer les mesures, il faut sortir le bloc, le retourner de façon à ne pas mettre le trait gravé vers la surcharge et l'enfiler à nouveau sur la tige. Le pendule oscille alors surcharge en haut.

x(cm)	Δx	t=10T (s)	Δt(s)	T= t/10 (s)	ΔT (s)
10					
20					
30					
40					
50					
60					
70					

80					
90					
96					

2- En précisant les échelles choisies, représenter graphiquement T en fonction de x.

3- Soit C_1 et C_2 les deux courbes de part et d'autre de x =OG

N.B. on rappelle que, pour x=OG, la période est infinie.

Tracer deux axes horizontaux Δ_1 (T_1= cte1) et Δ_2 (T_2=cte2) coupant respectivement la courbe en **trois points** notés O_1, O_2, O_3 et O'_1, O'_2 et O'_3.

4- Relever sur le graphique les coordonnées de ces points

5- Déterminer les deux distances : $L = X_3 - X_1$ et $L' = X'_3 - X'_1$

6- Calculer g_1 et g_2, en déduire $g_m = \frac{(g_1 + g_2)}{2}$ et $\Delta g_m = \frac{|g_1 - g_2|}{2}$. Ecrire le résultat sous la forme *(a ± Δa) unité.*

7- Comparer la valeur trouvée avec celle de la littérature. Conclure.