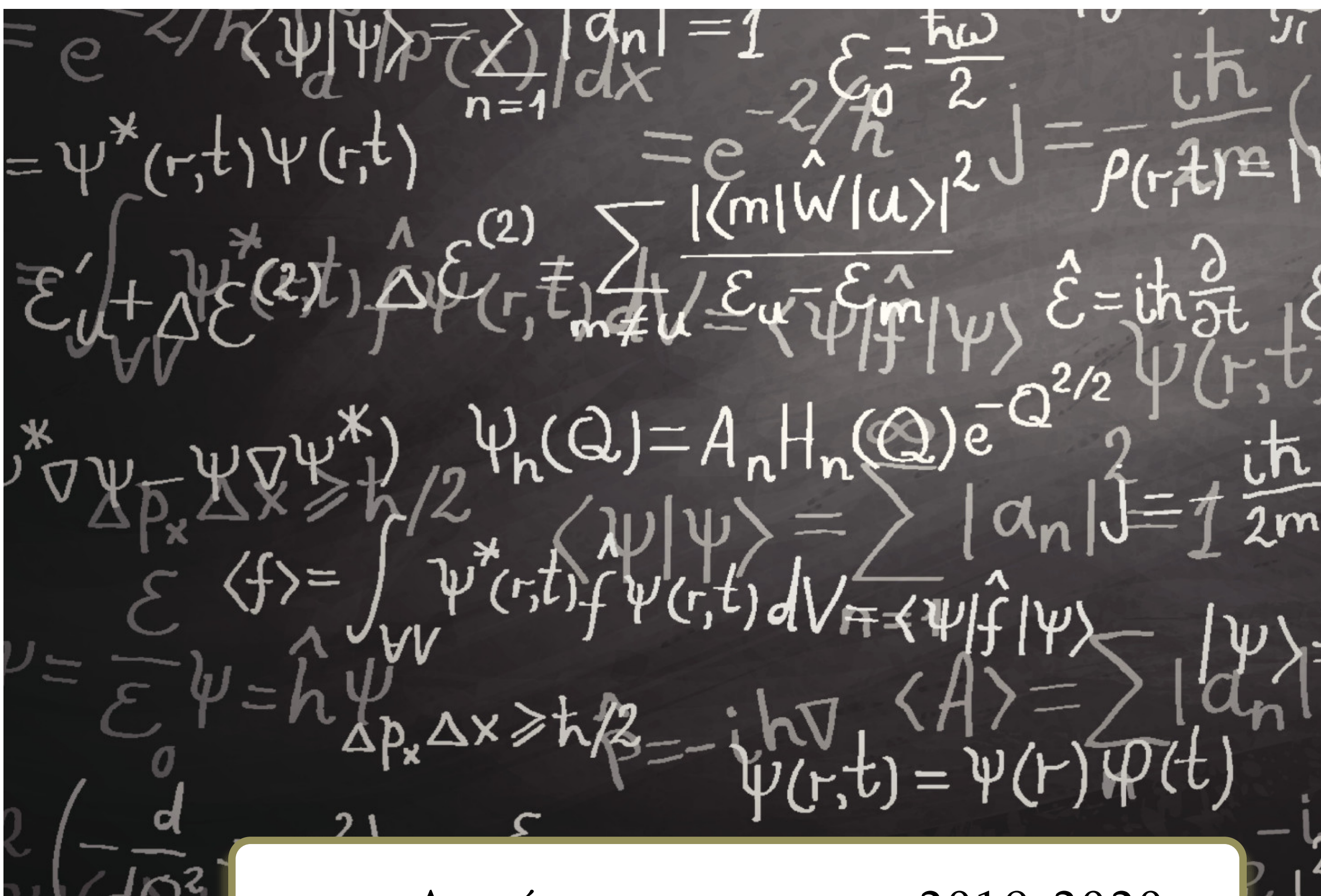
Université Ibn-Tofail
Faculté des Sciences
Département de Physique

كلية العلوم – القنيطرة
Faculté des Sciences – Kenitra

Problèmes et Exercices résolus de Mécanique Quantique : SMP4

Prof. Mohamed GOUIGHRI



Année universitaire 2019-2020

$\hbar$ λ c ω i

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

Partie A - Caractère corpusculaire de la lumière

I. Rayonnement du corps noir

Le champ électromagnétique à l'intérieur d'une cavité fermée est équivalent à un ensemble dénombrable d'oscillateurs harmoniques linéaires et indépendants. L'énergie du champ est donc égale à l'énergie de ces oscillateurs.

On définit la densité d'énergie $u(\nu,T)$ comme :

$$u(\nu,T) = \rho(\nu)\langle E \rangle$$

où $\rho(\nu)$ est le nombre des oscillateurs par unité de volume, $\langle E \rangle$ est l'énergie moyenne de chaque oscillateur, ν est la fréquence et T la température absolue.

1. Dans la théorie de l'électromagnétisme classique, l'énergie E d'un oscillateur varie de façon continue et on montre que le nombre d'oscillateurs dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$ est donnée par :

$$dN = P(E)\, dE = a\, e^{-E/kT}\, dE$$

où k est la constante de Boltzmann et $P(E)$ la probabilité associée à l'énergie E.

a. Sachant que $\rho(\nu) = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}$, établir l'expression de $u(\nu,T)$.

b. On définit $u(T)$ comme : $u(T) = \int_0^\infty u(\nu,T)\, d\nu$.

Quelle est la signification de $u(T)$? En donner l'expression et conclure.

2. Dans le cadre de l'hypothèse de Planck : les échanges d'énergie entre la matière du corps noir et le rayonnement électromagnétique se font par paquets d'énergie égale à $\varepsilon = h\nu$ (quantum d'énergie), h étant la constante de Planck.

L'énergie (continue) des oscillateurs s'écrit alors sous la forme suivante :

$$E_n = n h\nu,\ n \in \mathbb{N}$$

a. Montrer que :

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

b. En déduire la nouvelle expression de $u(T)$. Conclure.

On donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad si\ \ \alpha < 1 \qquad ; \qquad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}$$

II. Effet photoélectrique

On éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique avec deux radiations monochromatiques de longueurs d'ondes dans le vide $\lambda_1 = 0{,}2537\ \mu m$ et $\lambda_2 = 0{,}5890\ \mu m$. Les énergies maximales des électrons éjectés par ces radiations sont respectivement $E_1 = 3{,}14\ eV$ et $E_2 = 0{,}36\ eV$.

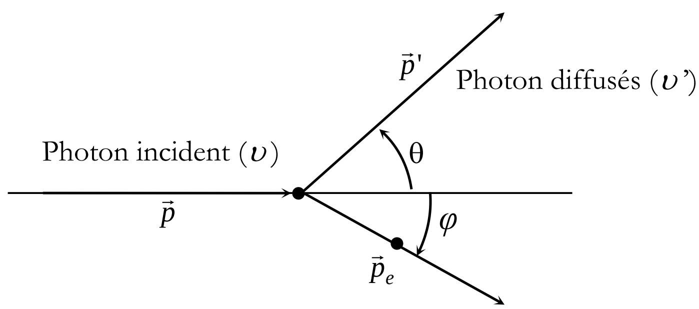
Déduire une estimation expérimentale de :

1. La constante de Planck ;
2. L'énergie minimale d'extraction des électrons ;
3. La longueur d'onde maximale produisant un effet photoélectrique sur cette photocathode.

III. Effet Compton

L'effet Compton consiste en l'interaction d'un photon d'énergie $h\upsilon$ avec un électron libre (son énergie est purement cinétique) ou faiblement lié. L'électron, de masse m, est supposé initialement au repos.

Après l'interaction, le photon d'énergie $h\upsilon'$ est émis dans la direction θ alors que l'électron est émis dans la direction φ. Ces angles sont comptés par rapport à la direction du photon incident.



Au cours de l'interaction, le photon cède une partie de son énergie et de son impulsion à l'électron qui acquiert une quantité de mouvement $\vec{p}$ et une énergie E telle que $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$; c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

En écrivant les lois de conservations, établir que :

$$h\upsilon' = \frac{h\upsilon}{1 + \dfrac{h\nu}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

En déduire que :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Partie B - Caractère ondulatoire de la matière

IV. Ondes de matière - Diffraction sur un cristal

On a réalisé des expériences de diffraction sur un cristal en utilisant divers types de particules :

1. Sachant que la distance interatomique d du cristal est de l'ordre de l'angström, quelle doit être la longueur d'onde des rayons X à utiliser ? Quelle est l'énergie des photons correspondant ?

2. On remplace le faisceau de rayons X par des neutrons. A la température T, leur énergie est donnée par $E = \frac{3}{2} k_B T$.

Calculer la longueur d'onde λ de l'onde de matière associée aux neutrons (T = 300K).

Pourrait-on observer une figure de diffraction ?

3. On utilise à présent des électrons accélérés sous une tension U. Quel doit être l'ordre de grandeur de U pour réaliser l'expérience ?

Données : $k_B = 1{,}38.10^{-23}\, j/K$; $h = 6{,}62.10^{-34}\, j.s$; $m_n = 1{,}67.10^{-27}\, Kg$; $m_e = 9.10^{-31}\, Kg$.

V. L'atome d'hydrogène

La fonction d'onde décrivant l'état fondamental de l'électron de l'atome d'hydrogène s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\psi(r) = C\, e^{-\frac{r}{a}}$$

où C est une constante réelle et positive et a est le rayon de l'orbite de Bohr : $a = 0{,}53.10^{-10}\ m$

1. Calculer la constante C.

2. Calculer la densité de probabilité de présence de l'électron et tracer son allure.

3. Calculer la probabilité de trouver l'électron entre les deux sphères de rayons r et $r + d\,r$.

Pour quelle valeur de r, cette probabilité est-elle maximale ?

VI. Paquet d'ondes gaussien (facultatif)

Une particule **libre** de masse m, d'impulsion $p = \hbar k$ et d'énergie E décrite par le paquet d'ondes $\psi(x,t)$ à une dimension :

$$\psi\,(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, e^{\;i(k\,x-\omega t)}\, dk$$

1. Trouver la relation entre E et k. En déduire la relation de dispersion $\omega(k)$.

2. On considère le paquet d'ondes à l'instant initial : $\psi\,(x, t = 0) = \psi\,(x)$.

   a. Montrer que $g(k)$ n'est autre que la transformée de Fourier de $\psi\,(x)$.

   b. Etablir l'égalité de Parseval Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$$

On suppose par la suite que la fonction $g(k)$ est une gaussienne centrée en k_0 :

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\right)$$

où a est une constante ayant la dimension d'une longueur.

3. Paquet d'ondes à l'instant $t = 0$:

a. Montrer que $\psi(x,0)$ est donnée par :

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{i k_0 x} \exp\left(\frac{-x^2}{a^2}\right)$$

On donne :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha^2 y^2 + \beta y\right) dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$

b. On définit le centre du paquet d'ondes par le point x_M où $|\psi(x,0)|^2$ est maximale ; donner la position du centre du paquet d'ondes $\psi(x,0)$.

c. Montrer que la probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est égale à 1.

d. On définit la largeur Δy d'une gaussienne $f(y) = \exp(-y^2/b^2)$ par $\Delta y = b/\sqrt{2}$.

Déterminer les largeurs $\Delta x(0)$ de $|\psi(x,0)|^2$ et $\Delta k(0)$ de $|g(k)|^2$. En déduire que le paquet d'ondes $\psi(x,0)$ obéit à la relation d'incertitude d'Heisenberg.

4. Evolution du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ dans le temps :

A l'instant $t > 0$, l'expression du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ est de la forme (à ne pas démontrer) :

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\varphi} . e^{ik_o x}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_o}{m} t\right)^2}{a^2 + \frac{2 i \hbar t}{m}}\right]$$

a. Calculer la densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ associée à la particule à l'instant t.

b. Déterminer la position $x_M(t)$ du centre du paquet d'ondes à l'instant t. Quelle est sa vitesse de déplacement ? La comparer à la vitesse de groupe associée au paquet.

c. Déterminer la largeur $\Delta x(t)$ et l'amplitude $A(t)$ de $|\psi(x,t)|^2$. Décrire qualitativement la variation de ces deux grandeurs en fonction du temps. Conclure quant à l'évolution de la forme de la densité de probabilité au cours du temps.

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

Corrigé :

Partie A - Caractère corpusculaire de la lumière

I. Rayonnement du corps noir

1. a. Calcul de l'énergie moyenne d'un oscillateur $\langle E \rangle$:

Par définition, on a :

$$\langle E \rangle = \int_0^{+\infty} E \, dN$$

Or, le nombre d'oscillateurs dN dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$ est donnée par :

$$dN = P(E) \; dE = a \, e^{-E/kT} \, dE$$

Donc :

$$\langle E \rangle = \int_0^{+\infty} E \, dN = \int_0^{+\infty} E \, P(E) \; dE = a \int_0^{+\infty} E \, e^{-E/kT} \, dE = a \int_0^{+\infty} E \, e^{-\beta E} \, dE \quad ; \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\langle E \rangle = a \left[-E \, \frac{e^{-\beta E}}{\beta} \right]_0^{+\infty} + \frac{a}{\beta} \int_0^{+\infty} e^{-\beta E} \, dE = 0 + \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} P(E) \, dE$$

Or : $\int_0^{+\infty} P(E) \, dE = 1$ (probabilité totale), donc :

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta} = kT$$

La densité spectrale d'énergie est définie par :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \langle E \rangle = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \, kT$$

L'expérience montre que cette formule n'est valable que pour les faibles valeurs de la fréquence.

b. La quantité $u(T)$ définie par $u(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) \, d\nu$ représente l'énergie totale disponible dans l'enceinte à la température T.

Cette quantité diverge ce qui est physiquement absurde :

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) \, d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu \quad \rightarrow \quad +\infty$$

Cela traduit l'insuffisance de la théorie classique de l'électromagnétisme.

2. **Hypothèse de Planck :** ***les échanges d'énergie entre la matière du corps noir et le rayonnement électromagnétique se font par paquets d'énergie égale à*** $\varepsilon = h\nu$ (***quantum d'énergie***), h étant la constante de Planck.

L'énergie (continue) des oscillateurs s'écrit alors sous la forme suivante :

$$E_n = n h\nu,\ n \in \mathbb{N}$$

a. Calcul de l'énergie moyenne d'un oscillateur $\langle E \rangle$ dans le cadre de cette hypothèse :

La probabilité d'occupation du niveau d'énergie E_n est $P(E_n) = a\, e^{-E_n/kT}$; l'expression de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ s'écrit alors :

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n . P(E_n) = \sum_n a\, E_n\, e^{-\beta E_n} = \sum_n a\, n h\nu\, e^{-\beta n h\nu} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Or :

$$\sum_n P(E_n) = \sum_n a\ e^{-\beta E_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sum_n e^{-\beta n h\nu}}$$

Donc :

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n n h\nu\, e^{-\beta n h\nu}}{\sum_n e^{-\beta n h\nu}} = \frac{N}{D}$$

Or

$$D = \sum_n e^{-\beta n h\nu} = \sum_n \left(e^{-\beta h\nu}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

et

$$\frac{dD}{d\beta} = \sum_n \frac{d}{d\beta}\left(e^{-\beta n h\nu}\right) = -\sum_n n h\nu\ e^{-\beta n h\nu} = -N$$

Donc :

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{D}\frac{dD}{d\beta} = -\frac{d\, Ln\, D}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} Ln\left(1 - e^{-\beta h\nu}\right) = \frac{h\nu\, e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Soit :

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

b. La densité d'énergie :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\langle E \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- L'énergie totale :

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\int_0^{+\infty}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}\, d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}\, dx \quad ; \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

Sachant que $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$, on obtient la loi de Stefan : $u(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4 = \alpha T^4$

II. Effet photoélectrique

1. Calcul de la constante de Planck :

L'énergie du photon incident est égale à l'énergie d'extraction du métal + l'énergie cinétique de l'électron éjecté :

$$h\nu = W + E_c$$

Ainsi, pour les deux radiations utilisées, on a :

$$\left.\begin{aligned} h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = W + E_1 \\ h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = W + E_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E_1 - E_2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{E_1 - E_2}{c\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1}\right)}$$

A. N.

$$h = \frac{(3{,}14 - 0{,}36).1{,}6.10^{-19}}{3.10^8\left(\frac{1}{2537} - \frac{1}{5890}\right).10^{10}} = 6{,}607.10^{-34}\ j.s$$

2. L'énergie minimale d'extraction des électrons :

$$W = \frac{hc}{\lambda_1} - E_1 = \frac{hc}{\lambda_2} - E_2$$

A. N.

$$W = \frac{hc}{\lambda_1} - E_1 = \frac{6{,}607.10^{-34}.3.10^8}{2537.10^{-10}.1{,}6.10^{-19}} - 3{,}14 = 1{,}74\ eV$$

3. La longueur d'onde maximale produisant un effet photoélectrique sur cette photocathode :

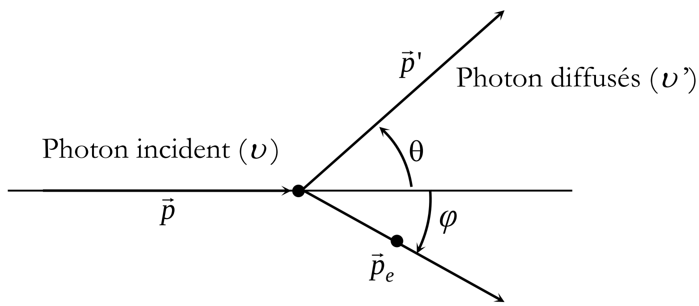
L'énergie minimale du photon incident est celle qui suffit à extraire les électrons du métal sans énergie cinétique :

$$h\nu_0 = W = \frac{hc}{\lambda_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} = \frac{hc}{W}$$

A. N.

$$\lambda_{\max} = \frac{6{,}607.10^{-34}.3.10^8}{1{,}74.1{,}6.10^{-19}} = 0{,}712\ \mu m$$

III. Effet Compton



Avant le choc | **Après le choc**

Avant le choc

- Photon :

Energie : $h\upsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$

Impulsion : $\vec{p} = \hbar\vec{k}$; $p = \dfrac{h}{\lambda}$

- Electron (au repos) **:**

Energie : $E_0 = mc^2$

Impulsion : $\vec{0}$

Après le choc

- Photon :

Energie : $h\upsilon' = \dfrac{hc}{\lambda'}$

Impulsion : $\vec{p}\,' = \hbar\vec{k}\,'$; $p' = \dfrac{h}{\lambda'}$

- Electron :

Energie : $E = \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}$

Impulsion : $\vec{p}_e$

- Conservation de l'énergie totale :

$$h\upsilon + mc^2 = h\upsilon' + E \quad \Rightarrow \quad h\upsilon + mc^2 = h\upsilon' + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4} \qquad (1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} E^2 &= p_e^2c^2 + m^2c^4 = \left[h\upsilon - h\upsilon' + mc^2\right]^2 \\ &= (h\upsilon)^2 + (h\upsilon')^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon') + 2(h\upsilon - h\upsilon')mc^2 + m^2c^4 \\ \Rightarrow \quad & p_e^2c^2 = (h\upsilon)^2 + (h\upsilon')^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon') + 2(h\upsilon - h\upsilon')mc^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

- Conservation de l'impulsion :

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{p}_e \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}\,' \qquad (3)$$

L'angle de diffusion θ est l'angle que fait $\vec{p}\,'$ avec $\vec{p}$. En élevant au carré la relation (3), on a :

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2p\,p'\cos\theta \qquad (4)$$

Or, l'impulsion du photon est donnée par :

$$p = \frac{h\upsilon}{c} \qquad \text{et} \qquad p' = \frac{h\upsilon'}{c}$$

L'équation (4) devient :

$$p_e^2 = \left(\frac{h\upsilon}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\upsilon'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\upsilon}{c}\right)\left(\frac{h\upsilon}{c}\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad p_e^2 c^2 = (h\upsilon)^2 + (h\upsilon')^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon')\cos\theta \qquad (5)$$

Les équations (2) et (5) impliquent :

$$(h\upsilon)^2 + (h\upsilon')^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon') + 2(h\upsilon - h\upsilon')mc^2 = (h\upsilon)^2 + (h\upsilon')^2 - 2(h\upsilon)(h\upsilon')\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad (h\upsilon - h\upsilon') = (h\upsilon')\frac{h\upsilon}{mc^2}(1-\cos\theta) \quad (1) \quad \Rightarrow \quad h\upsilon = h\upsilon'\left[1 + \frac{h\upsilon}{mc^2}(1-\cos\theta)\right]$$

D'où :

$$h\upsilon' = \frac{h\upsilon}{1 + \dfrac{h\upsilon}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

La relation (1) permet d'écrire :

$$(h\upsilon - h\upsilon')mc^2 = (h\upsilon)(h\upsilon')(1-\cos\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\upsilon - \upsilon')c}{\upsilon\upsilon'} = \frac{c}{\upsilon'} - \frac{c}{\upsilon'} = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Partie B - Caractère ondulatoire de la matière

IV. Ondes de matière - Diffraction sur un cristal

1. Rayons *X* :

- Ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons *X* à utiliser :

Pour que le phénomène de diffraction soit observable, il faut que la longueur d'ondes des rayons *X* utilisés soit du même ordre de grandeur que la distance inter réticulaire d, soit de l'ordre de 1°*A*. Donc, $\lambda \approx 1°A$.

- Energie des photons correspondant :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

A. N. : $\quad E = \dfrac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{10^{-10}} = 1{,}98.10^{-15}\, j$ ou bien $E = \dfrac{1{,}98.10^{-15}}{1{,}6.10^{-19}} = 12{,}4\ KeV.$

2. Neutrons thermiques :

- Longueur d'onde associée aux neutrons :

$$E_c = \frac{3}{2}k_B T = \frac{p^2}{2m_n} \qquad \Rightarrow \qquad p = \sqrt{3m_n k_B T} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3m_n k_B T}}$$

A. N. : $\lambda = \dfrac{6{,}62.10^{-34}}{\sqrt{3.1{,}67.10^{-27}.1{,}38.10^{-23}.300}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1{,}45.10^{-10}\ m = 1{,}45\ °A$

Pourrait-on observer une figure de diffraction ?

On constate que la longueur d'onde associée aux neutrons est de même ordre de grandeur que la distance séparant les atomes du cristal ($\lambda \approx d$), ces neutrons seront diffractés par le cristal et donnés des figures de diffraction sur un écran.

3. Electrons accélérés sous une tension U :

Calculons la tension U permettant de réaliser des figures de diffraction, c'est-à-dire pour que la longueur d'onde associée aux électrons accélérés soit de l'ordre de $\lambda \approx 1°A$.

L'énergie cinétique E_c des électrons accélérés sous la tension U est :

$$E_c = eU = \frac{p^2}{2m_e} \quad or \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2m_e.e}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

A. N. :

$$U = \frac{1}{2.9.10^{-31}.1{,}6.10^{-19}}\left(\frac{6{,}62.10^{-34}}{10^{-10}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad U = 152\,V\ .$$

V. L'atome d'hydrogène

La fonction d'onde décrivant l'état fondamental de l'électron de l'atome d'hydrogène s'écrit :

$$\psi(r) = C\ e^{-\frac{r}{a}}$$

où C est une constante réelle et positive et a est le rayon de l'orbite de Bohr : $a = 0{,}53.10^{-10}\ m$

1. La constante de normalisation C :

La condition de normalisation de $\psi(x,t)$ s'écrit : $\iiint |\psi(r)|^2\, d\,v = 1$

Or, l'élément de volume $d\,v$ pour une sphère dont le rayon r varie est : $d\,v = 4\pi\, r^2\, d\,r$, donc :

$$1 = \iiint |\psi(r)|^2\, d\,v = 4\pi |C|^2 \int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{2r}{a}}\, d\,r = 4\pi |C|^2 \underbrace{\left[\frac{-a}{2} r^2 e^{-\frac{2r}{a}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 4\pi\, a |C|^2 \int_0^{+\infty} r\, e^{-\frac{2r}{a}}\, d\,r$$

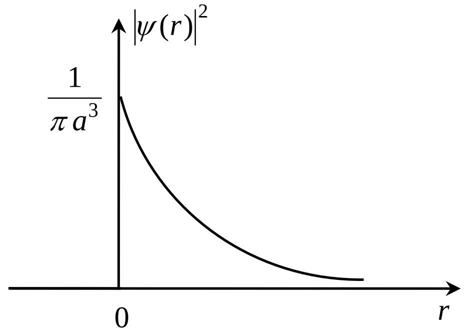
$$= 4\pi\, a |C|^2 \underbrace{\left[\frac{-a}{2} r\, e^{-\frac{2r}{a}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 4\pi \frac{a^2}{2} |C|^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2r}{a}}\, d\,r = 4\pi \frac{a^2}{2} |C|^2 \underbrace{\left[\frac{-a}{2} e^{-\frac{2r}{a}}\right]_0^{+\infty}}_{=a/2} = 4\pi \frac{a^3}{4} |C|^2$$

Comme la constante C est réelle et positive, alors : $\boxed{C = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\, a^3}}}$

2. Densité de probabilité de présence de l'électron :

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \qquad \Rightarrow \qquad |\psi(r)|^2 = \psi^*(r)\psi(r) = \frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$$

Allure de $|\psi(r)|^2$ en fonction de r :



La densité de probabilité est maximale pour $r = 0$, c'est-à-dire au centre de l'atome.

3. Probabilité de trouver l'électron entre les deux sphères de rayons r et $r + dr$:

$$d\wp = |\psi(r)|^2 dv = \frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 dr \qquad \Rightarrow \qquad d\wp = \frac{4}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$$

Pour quelle valeur de r, cette probabilité $d\wp$ est-elle maximale ?

Soit r_0 le rayon le plus probable, donc :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\wp}{dr}\right)_{r_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{a^3}\left(2r_0 - \frac{2r_0^2}{a}\right) e^{-\frac{2r}{a}} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = a$$

Ainsi, le rayon le plus probable coïncide avec le rayon de l'orbite fondamentale (rayon de Bohr).

VI. Paquet d'ondes gaussien

Une particule libre de masse m, d'impulsion $p = \hbar k$ et d'énergie E décrite par le paquet d'ondes :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, e^{\,i(kx-\omega t)}\, dk \qquad (1)$$

1. Relation entre E et k :

La particule est libre, donc son énergie potentielle est une constante qu'on prendra égale à zéro. La fonction d'onde $\psi(x,t)$ vérifie alors l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,(-i\omega)\,e^{\,i(kx-\omega t)}\,dk$
- $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,(-k^2)\,e^{\,i(kx-\omega t)}\,dk$

Donc :

$$i\hbar\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,(-i\omega)\,e^{\,i(kx-\omega t)}\,dk = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,(-k^2)\,e^{\,i(kx-\omega t)}\,dk$$

D'où **la relation de dispersion** :

$$\hbar\omega = E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad\Rightarrow\quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

2. On considère le paquet d'ondes à l'instant initial :

$$\psi\,(x, t=0) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,e^{\,ikx}\,dk \qquad (2)$$

a. La transformée de Fourier de $\psi\,(x)$ est par définition :

$$f(k) = TF[\psi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi(x)\,e^{-ikx}\,dx$$

La transformée de Fourier inverse est :

$$\psi(x) = TF^{-1}[f(k))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(k)\,e^{\,ikx}\,dx$$

Par identification avec l'expression (2) de $\psi\,(x)$, on déduit que $g(k) = f(k) = TF[\psi(x)]$, ce qui montre que $g(k)$ est la transformée de Fourier de $\psi\,(x)$.

b. Egalité de Parseval Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x).\psi^*(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,e^{\,ikx}\,dk\right)\psi^*(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi^*(x)\,e^{\,ikx}\,dx\right)g(k)\,dk$$

Or :

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi(x)\,e^{-ikx}\,dx \qquad\Rightarrow\qquad g^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi^*(x)\,e^{\,ikx}\,dx$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k).g^*(k)\,dk = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$$

- $|\psi(x)|^2$ et $|g(k)|^2$ expriment la densité de probabilité de la particule respectivement dans l'espace des positions et l'espace des vecteurs d'onde (ou d'impulsions puisque $p = \hbar k$) ;

- $|\psi(x)|^2 dx$ est la probabilité de trouver la position de la particule dans l'intervalle $[x, x+dx]$;

- $|g(k)|^2 dk$ est la probabilité de trouver le vecteur d'onde dans l'intervalle $[k, k+dk]$;

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$ représentent la probabilité totale de présence de la particule respectivement dans l'espace des positions et l'espace des impulsions.

On suppose par la suite que la fonction $g(k)$ est une gaussienne centrée en k_0 :

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\right)$$

où a est une constante ayant la dimension d'une longueur.

3. Paquet d'ondes à l'instant $t = 0$:

a. Expression de $\psi(x,0)$:

Remplaçons $g(k)$ par son expression dans la relation (2) :

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \int e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2 + i\,k\,x}\, dk$$

Posons : $y = k - k_0$, donc :

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} e^{i k_0 x} \int e^{-\frac{a^2}{4}y^2 + i\,y\,x}\, dy$$

Or :

$$\int e^{-\frac{a^2}{4}y^2 + i\,y\,x}\, dy = \sqrt{\frac{4\pi}{a^2}}\; e^{\frac{(i\,x)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{a^2}}\; e^{\frac{-x^2}{a^2}}$$

Donc :

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{4\pi}{a^2}}\; e^{i k_0 x}\; e^{\frac{-x^2}{a^2}}$$

D'où l'expression du paquet d'onde à l'instant $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{i k_0 x} \exp\left(\frac{-x^2}{a^2}\right)$$

b. Position x_M du centre du paquet d'ondes :

Par définition le centre x_M du paquet d'ondes correspond au point où la densité de probabilité $|\psi(x,0)|^2$ est maximale.

On a :

$$|\psi(x,0)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\exp\left(\frac{-2x^2}{a^2}\right)$$

Donc :

$$\frac{d}{dx}|\psi(x,0)|^2 = -\frac{4}{a^2}\,x\sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\exp\left(\frac{-2x^2}{a^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_M = 0$$

Ainsi, à $t = 0$, le centre du paquet d'ondes est situé au point d'abscisse $x_M = 0$.

c. La probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2x^2}{a^2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}.\sqrt{\frac{\pi a^2}{2}} = 1$$

d. Détermination des largeurs $\Delta x(0)$ et $\Delta k(0)$:

Définition :

La largeur Δy d'une gaussienne $f(y) = \exp(-y^2/b^2)$ est donnée par $\Delta y = b/\sqrt{2}$.

Largeur $\Delta x(0)$ de $|\psi(x,0)|^2$:

$$|\psi(x,0)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\exp\left(\frac{-2x^2}{a^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x(0) = \frac{a}{2}$$

Largeur $\Delta k(0)$ de $|g(k)|^2$:

$$|g(k)|^2 = \sqrt{\frac{a^2}{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2}(k-k_0)^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta k(0) = \frac{1}{a}$$

Relation de Heisenberg :

$$\Delta x(0).\Delta k(0) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x(0).\Delta p(0) = \frac{\hbar}{2}$$

Cette relation est conforme au principe d'indétermination de Heisenberg.

4. Evolution du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ dans le temps :

L'expression du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ à l'instant $t > 0$ est :

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{e^{i\varphi}.e^{ik_o x}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/4}}\exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_o}{m}t\right)^2}{a^2 + 2i\frac{\hbar}{m}t}\right]$$

a. La densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ associée à la particule à l'instant t :

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{2a^2\left(x-\frac{\hbar k_o}{m}t\right)^2}{a^4+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right)$$

b. Position $x_M(t)$ du centre du paquet d'ondes à l'instant t :

$$\frac{\partial}{\partial x}|\psi(x,t)|^2 = \alpha\left(x-\frac{\hbar k_o}{m}t\right)\exp\left(-\frac{2a^2\left(x-\frac{\hbar k_o}{m}t\right)^2}{a^4+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_M(t)=\frac{\hbar k_o}{m}t$$

Ainsi, à l'instant $t=0$, le centre du paquet d'ondes est situé au point d'abscisse $x_M(t)=\frac{\hbar k_o}{m}t$.

La vitesse de déplacement du centre du paquet est :

$$v=\frac{\hbar k_o}{m}$$

Le mouvement du centre du paquet d'ondes est uniforme.

Comparaison avec la vitesse de groupe associée au paquet :

Par définition, la vitesse de groupe associée au paquet est :

$$v_g = \left.\frac{d\,\omega(k)}{d\,k}\right)_{k=k_0}$$

$$\omega(k)=\frac{\hbar\, k^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad v_g=\frac{\hbar\, k_0}{m}$$

La vitesse de groupe associée au paquet d'ondes coïncide avec la vitesse du centre du paquet.

c. Détermination de la largeur $\Delta x(t)$ et de l'amplitude $A(t)$ de $|\psi(x,t)|^2$:

La densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ associée à la particule à l'instant t est une gaussienne de la forme :

$$|\psi(x,t)|^2 = A(t)e^{-X^2/b^2}$$

où $A(t)$ est l'amplitude du paquet et le paramètre b sont :

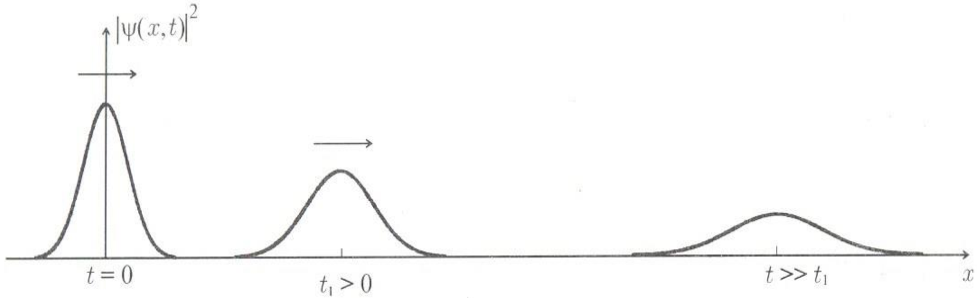
$$A(t)=\frac{\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}\right)^{1/2}} \quad ; \quad b=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{a^4+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}$$

La largeur du paquet est alors :

$$\Delta x(t) = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}$$

Evolution de la forme de la densité de probabilité au cours du temps :

Quand le temps t augmente, l'amplitude $A(t)$ diminue alors que la largeur $\Delta x(t)$ augmente, c'est l'étalement du paquet d'ondes.



Etalement du paquet d'ondes au cours du temps

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

PARTICULES DANS UN POTENTIEL CARRE

Problème 1 : Etats liés d'une particule dans un puits carré

On veut étudier les états liés d'une particule de masse m et d'énergie E se déplaçant dans une région de l'espace où règne le potentiel attractif suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -a & \text{(I)} \\ -V_0 & si \quad -a < x < a & \text{(II)} \\ 0 & si \quad x > a & \text{(III)} \end{cases}$$

V_0 et a sont des grandeurs positives.

1. a. Soit $\varphi(x)$ la fonction d'onde d'état stationnaire de la particule d'énergie E $(-V_0 < E < 0)$. Ecrire l'équation de Schrödinger vérifiée par $\varphi(x)$ et déduire son expression dans chacune des trois régions de l'espace. On utilisera les paramètres suivants :

$$q^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \quad , \quad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \quad et \quad k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

b. Le potentiel étant **symétrique**, donner les fonctions d'onde paires $\varphi_s(x)$ et impaires $\varphi_a(x)$.

2. a. Exprimer la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points de discontinuité du potentiel $(x \pm a)$. En déduire les équations de quantification de l'énergie de la particule.

b. Montrer que ces équations sont équivalentes à :

$$|\cos(ka)| = \frac{k}{k_0} \quad \text{avec} \quad tg(ka) > 0$$

$$|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0} \quad \text{avec} \quad tg(ka) < 0$$

c. Résoudre graphiquement ces deux relations qu'on représentera dans un même repère en fonction de k, et déduire la quantification de l'énergie de la particule.

Problème 2 : Modèle simplifié du noyau de deutérium

On se propose d'étudier les états stationnaires de fonction d'onde $\varphi(x)$ et d'énergie E d'un noyau de deutérium constitué d'un proton de masse m_p et d'un neutron de masse m_n. Soit Ox l'axe passant par les deux nucléons. Du fait de l'interaction entre ces deux derniers, le problème revient à représenter le noyau de deutérium par sa masse réduite $m = \dfrac{m_p m_n}{m_p + m_n}$ évoluant dans le potentiel suivant :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & si \quad x < 0 \\ -V_0 & si \quad 0 \le x < a \\ 0 & si \quad x \ge a \end{cases}$$

où V_0 et a sont des constantes positives.

Dans ce problème, on considérera **les états liés** d'énergie E telle que $-V_0 < E < 0$ et on introduira les constantes suivantes :

$$k^2 = \frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad q^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$$

1. Représenter graphiquement l'allure du potentiel $V(x)$.

2. a. Ecrire l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace où le potentiel est constant.

b. Résoudre ces équations et établir l'expression de $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace où le potentiel est constant.

c. Ecrire la continuité de $\varphi(x)$ au point $x = 0$. En déduire la forme finale de la fonction d'onde $\varphi(x)$.

3. a. Ecrire les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première au point $x = a$.

b. En déduire l'existence d'une condition de quantification de l'énergie.

c. Remplacer cette condition par une relation entre $|\sin(ka)|$ et $\dfrac{k}{k_0}$ où k_0 est une constante donnée par $k_0 = \sqrt{k^2 + q^2}$.

On donne : $$1 + \cot g^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

4. Résoudre graphiquement l'équation obtenue et montrer que l'énergie des états liés du noyau est quantifiée.

5. Expérimentalement, on observe que le noyau de deutérium ne possède qu'un seul état lié. A quelle condition doit satisfaire la quantité $V_0 a^2$?

6. Tracer l'allure de la courbe de la fonction d'onde $\varphi(x)$ de cet état lié en fonction de x.

Problème 3 : Transmission par une barrière de potentiel – Effet tunnel

Soit une particule de masse m et d'énergie E provenant de la région des x négatifs, arrivant sur une barrière de potentiel, de hauteur V_0, définie comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & si\ 0 \le x \le a \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

V_0 et a sont des grandeurs positives.

1. Etudier le comportement d'une particule classique d'énergie E arrivant sur cette barrière dans les deux cas où $E > V_0$ et $E < V_0$.

Nous étudierons par la suite une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger d'énergie E telle que $0 < E < V_0$.

2. Écrire l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace. En déduire l'expression de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans chaque région.

On posera :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad ; \quad q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

3. Écrire les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points $x = 0$ et $x = a$ et établir le rapport des amplitudes de l'onde transmise et incidente.

4. Le courant de probabilité qui caractérise le flux de particules est défini, à 1 dimension, par :

$$\vec{j}(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi^*(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x)\frac{d\varphi^*(x)}{dx}\right)\vec{e}_x$$

Établir les expressions des courants de probabilité incident $\vec{j}_i$ et transmis $\vec{j}_t$ par la barrière.

5. Déterminer le coefficient de transmission $T = \frac{|\vec{j}_t|}{|\vec{j}_i|}$ de la barrière défini par le rapport entre les courants transmis et incidents.

Problème 4 : Etats de diffusion d'une particule dans un puits carré

On considère un faisceau de particules de masse m et d'énergie $E > 0$, émis par une source située vers $-\infty$, se déplaçant vers une région de l'espace à une dimension où règne le potentiel attractif suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -a & \text{(I)} \\ -V_0 & si \quad -a < x < a & \text{(II)} \\ 0 & si \quad x > a & \text{(III)} \end{cases}$$

où V_0 et a sont des constantes positives.

On posera dans tout le problème :

$$q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad , \quad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \quad et \quad k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

1. Donner l'expression de la fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ dans chaque région (I), (II) et (III).

2. **a.** Exprimer la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée aux points $\pm a$.

b. Déduire le rapport des amplitudes de l'onde incidente et de l'onde transmise dans (III).

c. Calculer les courants de probabilité incident $\vec{j}_i$ et transmis $\vec{j}_t$ par le puits carré.

d. Monter que le facteur de transmission *T*, qui donne la probabilité pour que la particule arrivant de la région (I) avec l'énergie $(E > 0)$ traverse le puits, s'exprimer sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{1 + f(E)\sin^2 g(E)}$$

où $f(E)$ et $g(E)$ sont des fonctions de *E* que l'on explicitera.

3. Le potentiel symétrique *V*(*x*) représente de façon schématique le potentiel nucléaire ressenti par des neutrons arrivant sur un noyau lourd de diamètre $D = 2a = 20\ fm$.

Montrer que le noyau devient transparent aux neutrons $(T = 1)$ pour certaines valeurs de leur énergie *E*. Calculer les trois premières valeurs de l'énergie telles que $T = 1$.

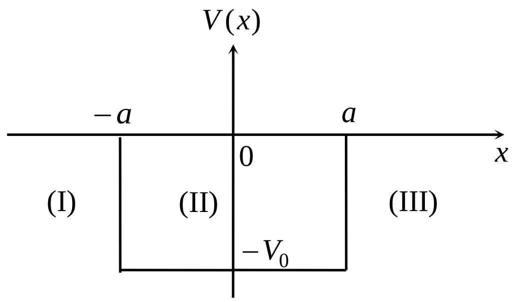
On donne : $V_0 = 45\ MeV \quad et \quad \varepsilon = \dfrac{h^2}{32\ m\ a^2} = 51{,}1\ MeV$.

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

Corrigé :

Problème 1 : Etats liés d'une particule dans un puits carré



Etats liés : $-V_0 < E < 0$

1. a. Dans les régions I et III :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) - q^2\varphi(x) = 0 \quad , \quad q^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad (E<0)$$

Donc : $\varphi_1(x) = A\,e^{qx} + A'\,e^{-qx}$ et $\varphi_3(x) = G\,e^{-qx} + G'\,e^{qx}$

Or, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_3(x)$ doivent tendre vers 0 quand x tend respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$, car la fonction d'onde est bornée (états liés) : les coefficients A' et G' doivent alors être nuls.

Donc : $\varphi_1(x) = A\,e^{qx}$ et $\varphi_3(x) = G\,e^{-qx}$

Dans la région II : $\dfrac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0 \quad , \quad k^2 = \dfrac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$

Donc : $\varphi_2(x) = C\,e^{ikx} + D\,e^{-ikx}$

b. Symétrie du potentiel :

Le potentiel étant symétrique, alors les fonctions d'onde sont paires $\varphi_s(x)$ ou impaires $\varphi_a(x)$.

- Les fonctions d'onde paires $\varphi_s(x)$ sont telles que :

$$\varphi_1(-x) = \varphi_3(x) \quad \Rightarrow \quad A = G$$
$$\varphi_2(-x) = \varphi_2(x) \quad \Rightarrow \quad C = D$$

Donc :

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = A\,e^{qx} \\ \varphi_2(x) = B\cos kx \quad , \quad B = 2C \\ \varphi_3(x) = A\,e^{-qx} \end{cases}$$

- Les fonctions d'onde impaires $\varphi_a(x)$ sont telles que :

$$\varphi_1(-x) = -\varphi_3(x) \quad \Rightarrow \quad A = -G$$
$$\varphi_2(-x) = -\varphi_2(x) \quad \Rightarrow \quad C = -D$$

Donc :

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = A\, e^{q\,x} \\ \varphi_2(x) = B \sin kx \\ \varphi_3(x) = -A\, e^{-q\,x} \end{cases} \quad , \quad B = 2i\,C$$

2. a. Continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée :

Le potentiel étant symétrique, il suffit d'écrire la condition de continuité au point $x = a$.

- Cas des fonctions d'onde paires $\varphi_s(x)$:

$$\begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\cos(ka) = A\, e^{-q\,a} \\ -Bk\sin(ka) = -Aq\; e^{-q\,a} \end{cases} \Rightarrow \quad tg(ka) = \frac{q}{k} \quad (1)$$

- Cas des fonctions d'onde impaires $\varphi_a(x)$:

$$\begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\sin(ka) = -A\, e^{-q\,a} \\ Bk\cos(ka) = Aq\; e^{-q\,a} \end{cases} \Rightarrow \quad tg(ka) = -\frac{k}{q} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) sont les équations de quantification de l'énergie.

b. Relations de quantification équivalentes :

On a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\cos x| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}} \\ |\sin x| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot g^2 x}} \end{cases}$$

On en déduit que les relations (1) et (2) sont respectivement équivalentes aux relations suivantes :

$$|\cos(ka)| = \frac{k}{k_0} \quad ; \quad avec \quad \tan(ka) = \frac{q}{k} > 0$$
$$|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0} \quad ; \quad avec \quad \tan(ka) = -\frac{q}{k} < 0$$

Avec :

$$k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

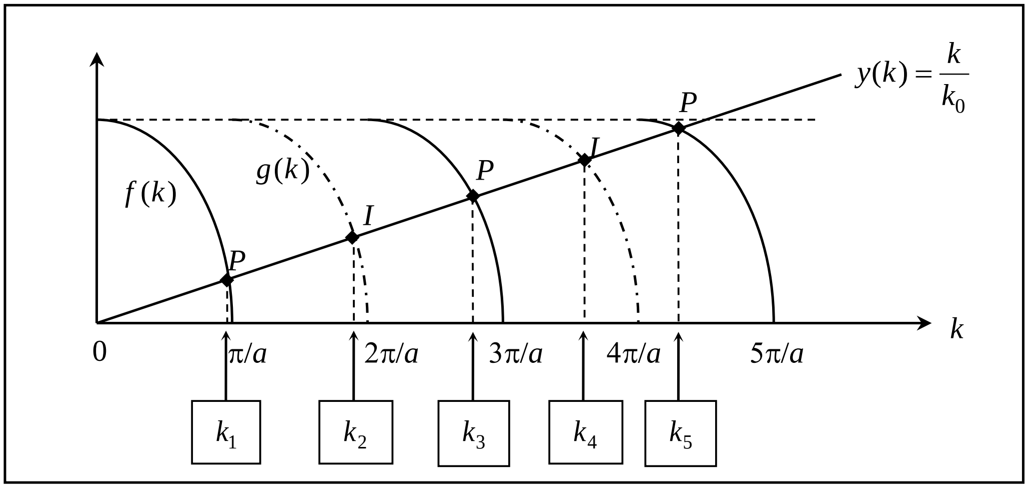
c. Résolution graphique :

On reporte sur le même graphe les fonctions :

$$y(k) = \frac{k}{k_0} \quad , \quad f(k) = |\cos(ka)| \quad \text{et} \quad g(k) = |\sin(ka)|$$

En respectant les conditions : $\tan(ka) > 0$ ou $\tan(ka) < 0$ selon le cas.

La projection des points d'intersection des courbes $f(k)$ et $g(k)$ avec la droite $y(k) = \dfrac{k}{k_0}$ sur l'axe des abscisses k donne les valeurs possibles du vecteur d'onde k.



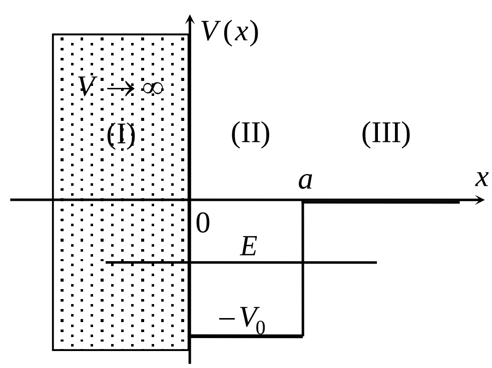
Ainsi, la résolution graphique montre que k est quantifié, il en est de même pour l'énergie de l'électron :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} - V_0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Problème 2 : Modèle simplifié du noyau de deutérium

1. Représentation graphique du potentiel $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad si\ x < 0 \qquad (I) \\ -V_0 & , \quad si\ 0 \le x < a \qquad (II) \\ 0 & , \quad si\ x \ge a \qquad (III) \end{cases}$$



2. On considérera les états d'énergie E telle que $-V_0 < E < 0$

a. L'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\varphi(x)$ est :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\,\varphi(x) = 0$$

- Dans la région (I) le potentiel est infini alors la probabilité de présence de la particule est nulle dans cette région, par conséquent **la fonction d'onde est nulle**.
- Dans la région (II), $V(x) = -V_0$, donc :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0 \qquad , \qquad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$$

- Dans la région (III), $V(x) = 0$, donc :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) - q^2\varphi(x) = 0 \qquad , \qquad q^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

b. Expression de $\varphi(x)$ dans chaque région où le potentiel est constant :

La résolution de l'équation de Schrödinger dans chacune des trois régions donne :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 & : \quad x < 0 \\ \varphi_2(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} & : \quad 0 < x < a \\ \varphi_3(x) = C\,e^{-qx} + D\,e^{qx} & : \quad x > a \end{cases}$$

Or, $\varphi_3(x)$ doit tendre vers 0 quand x tend $+\infty$, car la fonction d'onde est bornée (états liés). Donc, le coefficient D doit être nul. Finalement, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 & : \quad x < 0 \\ \varphi_2(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} & : \quad 0 < x < a \\ \varphi_3(x) = C\,e^{-qx} & : \quad x > a \end{cases}$$

c. La continuité de la fonction d'onde au point $x = 0$ s'écrit :

$$\varphi_2(0) = \varphi_1(0) \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

Il s'ensuit que $\varphi_2(x) = 2i\,A\sin(kx)$. En notant la nouvelle constante égale à A, on a :

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 & : \quad x < 0 \\ \varphi_2(x) = A\sin(kx) & : \quad 0 < x < a \\ \varphi_3(x) = C\,e^{-qx} & : \quad x > a \end{cases}}$$

3. a. Les équations de continuité au point $x = a$:

$$\begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A\sin(ka) = C\,e^{-qa} \\ Ak\cos(ka) = -Cq\,e^{-qa} \end{cases}$$

b. Le rapport de ces deux relations donne :

$$tg(ka) = -\frac{k}{q} \quad \text{ou} \quad \cot g(ka) = -\frac{q}{k}$$

C'est la condition de quantification de l'énergie.

c. Comme : $1+\cot g^2(k\,a)=\dfrac{1}{\sin^2(k\,a)}$, donc : $\dfrac{1}{\sin^2(k\,a)}=1+\dfrac{q^2}{k^2}=\dfrac{k^2+q^2}{k^2}$

Or $k^2+q^2=k_0^2$, alors :

$$\sin^2(k\,a)=\frac{k^2}{k_0^2}$$

D'où l'équation de quantification de l'énergie :

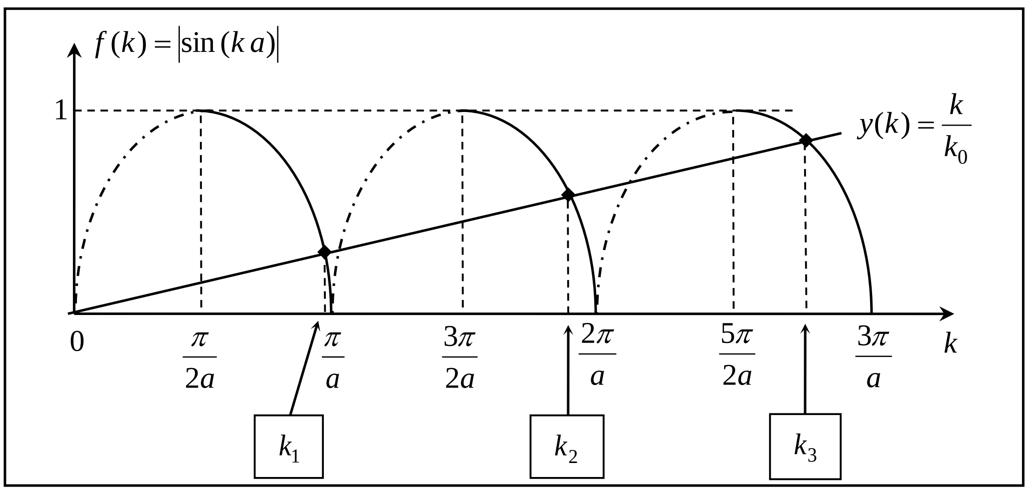
$$\boxed{\left|\sin(k\,a)\right|=\frac{k}{k_0}\quad avec\quad \tan(k\,a)<0}$$

4. Résolution graphique :

On reporte sur le même graphe les fonctions :

$$y(k)=\frac{k}{k_0}\qquad,\qquad f(k)=\left|\sin(k\,a)\right|$$

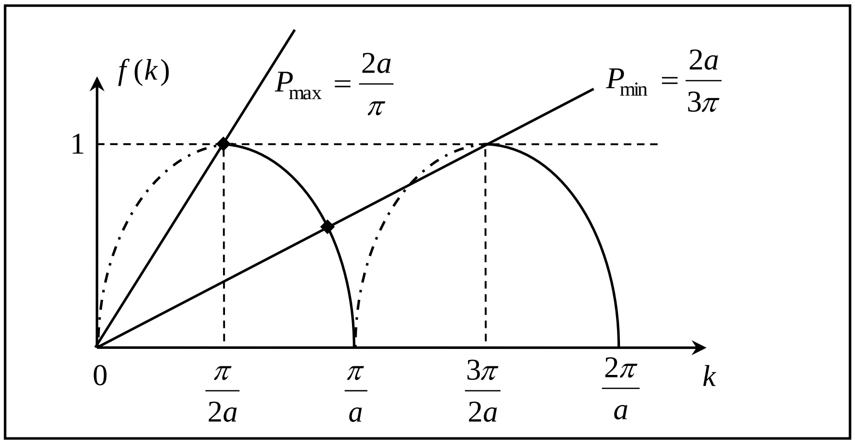
en respectant la condition $\tan(ka)<0$.



La projection des points d'intersection de la courbe $f(k)$ avec la droite $y(k)$ sur l'axe des abscisses k donne les valeurs possibles du vecteur d'onde k. Ainsi, la résolution graphique montre que k est quantifié. L'énergie du noyau de deutérium est aussi quantifiée :

$$E_n=\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}-V_0\quad;\quad n=1,2,\ldots$$

5. Or, expérimentalement, le noyau de deutérium ne possède qu'un seul état lié. Donc, sur le graphe précédent, il y a un seul point d'intersection entre la courbe $f(k)$ avec la droite $y(k)$.



Il faut alors que la pente de la droite $y(k)$ soit comprise entre $P_{max} = \frac{2a}{\pi}$ **(inférieure ou égale)** et $P_{min} = \frac{2a}{3\pi}$ **(strictement supérieure).** Soit :

$$\frac{2a}{3\pi} < \frac{1}{k_0} \leq \frac{2a}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq k_0\, a < \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} \leq k_0^2\, a^2 = \frac{2mV_0\, a^2}{\hbar^2} < \frac{9\pi^2}{4}$$

D'où la condition que doit satisfaire $V_0\, a^2$:

$$\boxed{\frac{\pi^2\, \hbar^2}{8m} \leq V_0\, a^2 < \frac{9\,\pi^2\, \hbar^2}{8m}}$$

6. Courbe de la fonction d'onde $\varphi(x)$ de cet état lié en fonction de x :

$$\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ A \sin(k\, x) & : \quad 0 < x < a \\ C\, e^{-q\, x} & : \quad x > a \end{cases}}$$

- On a, d'après la condition précédente, le point est tel que :

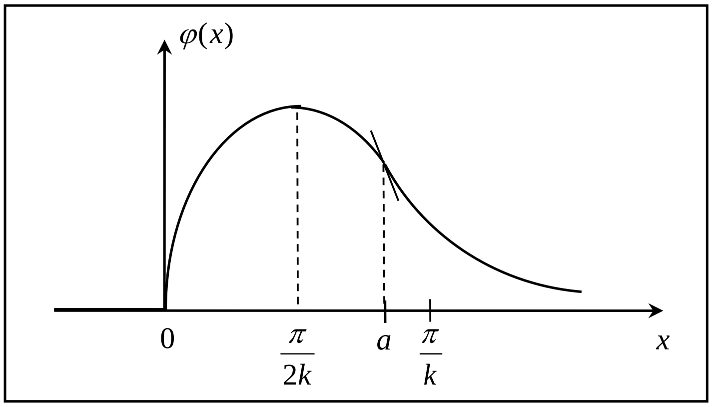
$$\frac{\pi}{2k} \leq a < \frac{\pi}{k}$$

- au point $x = a$, il y a continuité de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$.
- le point $x = a$ est un point d'inflexion :

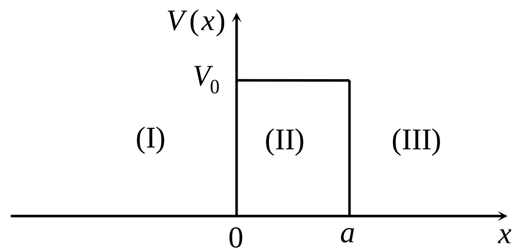
$$\frac{d^2}{d\, x^2}\varphi(x) = -k^2\varphi(x) < 0 \quad (0 < x < a) \quad : \text{concavité de la courbe vers la bas}$$

$$\frac{d^2}{d\, x^2}\varphi(x) = q^2\varphi(x) > 0 \quad (x > a) \quad : \text{concavité de la courbe vers le haut}$$

Ainsi, la courbe de $\varphi(x)$ présente un maximum au point $x = \frac{\pi}{2k}$ et un point d'inflexion en $x = a$, elle tend ensuite vers 0 en décroissance exponentielle.


φ(x)
0
π/2k
a
π/k
x

Problème 3 : Transmission par une barrière de potentiel – Effet tunnel



1. Cas classique :

Le mouvement de la particule est tel que : $E = E_c + V(x) =$ constante

Comme $E_c = \dfrac{p^2}{2m} \geq 0$, alors le mouvement de la particule n'est possible que si :

$$E_c = E - V(x) \geq 0 \qquad (1)$$

1er cas : si $E > V_0$ dans les trois régions de l'espace, alors la condition (1) est satisfaite et le mouvement de la particule est possible dans tout l'espace.

2e cas : si $E < V_0$

- Dans la région (I), la condition (1) est satisfaite et le mouvement de la particule est possible dans cette région.
- Dans la région (II), on a $E < V_0$ et la condition (1) n'est pas satisfaite et le mouvement de la particule est impossible dans cette région.

Ainsi, au point $x = 0$, la particule rebrousse chemin : il y a réflexion totale.

Cas quantique :

2. Expressions de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans chaque région (I), (II) et (III) :

L'équation de Schrödinger vérifiée par $\varphi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Région I ($x < 0$) **:** $V = 0$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\varphi(x) + q^2\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1(x) = A_1\,e^{ik\,x} + B_1\,e^{-ik\,x}$$

$A_1\,e^{i\,k\,x}$: est l'onde incidente, $B_1\,e^{-i\,k\,x}$: est l'onde réfléchie par la barrière située en $x = 0$.

Région II ($0 < x < a$) **:** $V = V_0$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\varphi(x) - q^2\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2(x) = A_2\,e^{q\,x} + B_2\,e^{-q\,x}$$

$A_2\, e^{q\,x}$ et $B_2\, e^{-q\,x}$ sont des ondes transmise et réfléchie dans cette région

Région III ($x > a$) **:** $V = 0$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_3(x) = A_3\, e^{ik\,x} + \underbrace{B_3\, e^{-ik\,x}}_{0} = A_3\, e^{ik\,x}$$

$A_3\, e^{ik\,x}$ est l'onde transmise dans la région (III) ; le coefficient $B_3 = 0$, car la particule incidente vient de $-\infty$.

3. Les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée aux points $x = 0$ et $x = a$:

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 & (1) \\ i\,k(A_1 - B_1) = q(A_2 - B_2) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \\ \varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2\, e^{q\,a} + B_2\, e^{-q\,a} = A_3\, e^{ika} & (3) \\ q\,(A_2\, e^{q\,a} - B_2\, e^{-q\,a}) = i\,k\,A_3\, e^{ika} & (4) \end{cases}$$

Rapport des amplitudes de l'onde transmise et incidente :

On effectuera les opérations suivantes :

$$\begin{cases} ik \times (1) + (2) \\ q \times (3) + (4) \\ q \times (3) - (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\,i\,k\,A_1 = (q + ik)A_2 - (q - ik)B_2 & (5) \\ 2\,q\,A_2\, e^{qa} = (q + ik)A_3\, e^{ika} & (6) \\ 2\,q\,B_2\, e^{-qa} = (q - ik)A_3\, e^{ika} & (7) \end{cases}$$

Ensuite, en remplaçant dans l'équation (5) les coefficients A_2 donné par l'équation (6) et B_2 donné par l'équation (7), on obtient la relation :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4\,i\,kq\,e^{-i\,k\,a}}{(q + ik)^2 e^{-q\,a} - (q - ik)^2 e^{q\,a}}$$

Soit :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2\,i\,kq\,e^{-i\,k\,a}}{(k^2 - q^2)\,sh(qa) + 2ikq\,ch(qa)}$$

4. Courants de probabilité incident $\vec{j}_i$ et transmis $\vec{j}_t$ par la barrière de potentiel :

La fonction d'onde incidente est donnée par : $\varphi_i(x) = A_1\, e^{ik\,x}$

Alors, le courant de probabilité incident est :

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi_i^*(x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx} - \varphi_i(x)\frac{d\varphi_i^*(x)}{dx}\right)\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_i = \frac{\hbar\,k}{m}|A_1|^2\,\vec{e}_x$$

La fonction d'onde décrivant l'onde transmise dans la région III est :

$$\varphi_t(x) = \varphi_3(x) = A_3\, e^{ik\,x}$$

Le courant de probabilité correspondant à un électron transmis par la barrière est :

$$\vec{j}_t = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi_t^*(x)\frac{d\varphi_t(x)}{dx} - \varphi_t(x)\frac{d\varphi_t^*(x)}{dx}\right)\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_t = \frac{\hbar k}{m}|A_3|^2\,\vec{e}_x$$

5. Le coefficient de transmission de la barrière est :

$$T = \frac{|\vec{j}_t|}{|\vec{j}_i|} = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + \left(k^2+q^2\right)^2 sh^2(q\,a)}$$

En tenant compte des expressions de k et de q en fonction de E, il vient :

$$\boxed{T(E) = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\,sh^2\left[\dfrac{a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right]}}$$

Il y a une probabilité non nulle pour la particule de franchir la barrière de potentiel : c'est l'effet tunnel.

Problème 4 : Etats de diffusion d'une particule dans un puits carré

On considère un faisceau de particules de masse m et d'énergie $E > 0$, émis par une source située vers $-\infty$, se déplaçant vers une région de l'espace à une dimension où règne le potentiel attractif suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -a \qquad \text{(I)} \\ -V_0 & si \quad -a < x < a \qquad \text{(II)} \\ 0 & si \quad x > a \qquad \text{(III)} \end{cases} \quad ; \quad (V_0 > 0)$$

On posera dans tout le problème :

$$q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad , \quad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \quad et \quad k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

1. Expressions de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans les régions (I), (II) et (III) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{d\,x^2} + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Région I $(x < -a)$ **:** $V = 0$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\varphi(x) + q^2\varphi(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1(x) = A_1 e^{iqx} + B_1 e^{-iqx}$$

$A_1 e^{iqx}$ est l'onde incidente, $B_1 e^{-iqx}$ est l'onde réfléchie par la barrière située en $-a$.

Région II : $V = -V_0$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\varphi(x)+k^2\varphi(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2(x)=A_2\,e^{ikx}+B_2\,e^{-ikx}$$

$A_2\,e^{ikx}$ est l'onde transmise par la barrière située en $-a$, $B_2\,e^{-ikx}$ est l'onde réfléchie par la barrière située en a

Région III $(x>a)$ **:** $V=0$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\varphi(x)+q^2\varphi(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_3(x)=A_3\,e^{iqx}+B_3\,e^{-iqx}=A_3\,e^{iqx}$$

$A_3\,e^{iqx}$ est l'onde transmise dans la région (III) ; le coefficient $B_3=0$, car il n'y a pas de réflexion dans cette région.

2. a. Equations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée aux points $\pm a$:

$$\begin{cases}\varphi_1(-a)=\varphi_2(-a)\\ \varphi'_1(-a)=\varphi'_2(-a)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_1e^{-iqa}+B_1e^{iqa}=A_2e^{-ika}+B_2e^{ika} & (1)\\ iq(A_1e^{-iqa}-B_1e^{iqa})=ik(A_2e^{-ika}-B_2e^{ika}) & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_2(a)=\varphi_3(a)\\ \varphi'_2(a)=\varphi'_3(a)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_2e^{ika}+B_2e^{-ika}=A_3e^{iqa} & (3)\\ ik(A_2e^{ika}-B_2e^{-ika})=iqA_3e^{iqa} & (4)\end{cases}$$

b. Rapport des amplitudes de l'onde incidente et de l'onde transmise dans (III) :

On effectuera les opérations suivantes :

$$\begin{cases}iq\times(1)+(2)\\ ik\times(3)+(4)\\ ik\times(3)-(4)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2iq\,A_1\,e^{-iqa}=i(q+k)A_2\,e^{-ika}+i(q-k)B_2\,e^{ika} & (5)\\ 2ik\,A_2\,e^{ika}=i(q+k)\,A_3\,e^{iqa} & (6)\\ 2ik\,B_2\,e^{-ika}=i(q-k)A_3\,e^{iqa} & (7)\end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (5) les coefficients A_2 donné par l'équation (6) et B_2 donné par l'équation (7), on obtient la relation suivante :

$$\frac{A_3}{A_1}=\frac{4kq\,e^{-2iqa}}{(q+k)^2e^{-2ika}-(q-k)^2e^{2ika}}$$

Soit :

$$\frac{A_3}{A_1}=\frac{e^{-2iqa}}{\cos(2k\,a)-i\left(\dfrac{q^2+k^2}{2kq}\right)\sin(2k\,a)}$$

c. Courants de probabilité incident j_i et transmis j_t par le puits carré :

- La fonction d'onde incidente est :

$$\varphi_i(x)=A_1\,e^{iqx}$$

Alors, le courant de probabilité incident est :

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi_i^*(x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx} - \varphi_i(x)\frac{d\varphi_i^*(x)}{dx}\right)\vec{e}_x \quad \Rightarrow \qquad \vec{j}_i = \frac{\hbar q}{m}|A_1|^2\ \vec{e}_x$$

- La fonction d'onde transmise dans la région III est : $\varphi_3(x) = A_3\, e^{iqx}$

Alors, le courant de probabilité correspondant à un électron transmis par la barrière est :

$$\vec{j}_t = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi_3^*(x)\frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \varphi_3(x)\frac{d\varphi_3^*(x)}{dx}\right)\vec{e}_x \quad \Rightarrow \qquad \vec{j}_t = \frac{\hbar q}{m}|A_3|^2\ \vec{e}_x$$

d. Le coefficient de transmission de la barrière est :

$$T = \frac{|\vec{j}_t|}{|\vec{j}_i|} = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{\cos^2(2ka) + \left(\dfrac{q^2+k^2}{2kq}\right)^2 \sin^2(2ka)} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k^2-q^2}{2kq}\right)^2 \sin^2(2ka)}$$

En tenant compte des expressions de k et de q en fonction de E, il vient :

$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\ \sin^2 g(E)}$$

où :

$$g(E) = 2ka = \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}$$

3. Résonance de diffusion :

- Le noyau devient transparent aux neutrons $(T=1)$ si $g(E)=0.$ Donc :

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)} = n\pi \quad \Rightarrow \quad E_n = n^2\varepsilon - V_0 \ \text{avec}\ \varepsilon = \frac{h^2}{32ma^2}$$

- Les trois premières valeurs de l'énergie telles que $T=1$:

Pour : $V_0 = 45\ MeV \quad et \quad \varepsilon = 51{,}1\ MeV$, on a :

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad E_1 = 6{,}1\ MeV$$
$$n=2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = 159{,}4\ MeV$$
$$n=3 \quad \Rightarrow \quad E_3 = 415\ MeV$$

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

FORMALISME MATHEMATIQUE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

Exercice 1

Soient A, B et C trois opérateurs linéaires.

1. Montrer que : $[A, B+C] = [A, B] + [A, C]$
2. Montrer que : $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.
3. En déduire que : $[A, B^n] = \sum_{i=0}^{n-1} B^i [A, B] B^{n-i-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soient $F(A)$ et $G(B)$ deux fonctions des opérateurs linéaires A et B. Montrer que :

$$[A, B] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [F(A), G(B)] = 0$$

5. Montrer que si $[B, [A, B]] = 0$, alors $[A, G(B)] = [A, B] \dfrac{dG}{dB}$.

Exercice 2

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Soient L_z et S deux opérateurs définis par :

$$L_z|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad , \quad L_z|u_2\rangle = 0 \quad , \quad L_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$
$$S|u_1\rangle = |u_3\rangle \quad , \quad S|u_2\rangle = |u_2\rangle \quad , \quad S|u_3\rangle = |u_1\rangle$$

1. Ecrire les matrices représentant les opérateurs L_z, L_z^2, S et S^2 dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$.

Ces opérateurs sont – ils des observables ?

2. Calculer les vecteurs propres et valeurs propres de L_z^2 et S.

3. Déterminer une base de l'espace des états formée des vecteurs propres communs à L_z^2 et S.

Ces deux observables forment-elles un E. C. O. C. ?

Exercice 3 (facultatif, à ne pas traiter)

Soit l'espace des états à deux dimensions rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$.

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des opérateurs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

T.D. de Mécanique Quantique – SMP4 – Série 3

Corrigé

Exercice 1

Soient A, B et C trois opérateurs linéaires.

1. $[A, B+C] = A(B+C) - (B+C)A = AB + AC - BA - CA = [A, B] + [A, C]$

Généralisation :

$$\left[\sum_i A_i, \sum_k B_k\right] = \sum_{i,k} [A_i, B_k]$$

2. Montrons que : $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

Développons le second membre de l'égalité :

$$\begin{aligned}[A,B]C + B[A,C] &= (AB - BA)C + B(AC - CA) \\ &= ABC - BAC + BAC - BCA \\ &= ABC - BCA = A(BC) - (BC)A = [A, BC]\end{aligned}$$

3. Démontrons par récurrence de la relation : $\left[A, B^n\right] = \sum_{i=o}^{n-1} B^i [A,B] B^{n-i-1}$.

On a : $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

Si $B = C$, alors :

$$\left[A, B^2\right] = [A,B]B + B[A,B] = B^0[A,B]B^1 + B^1[A,B]B^0$$

Le développement est donc vérifié pour $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons qu'il le soit pour $n-1\,(n \geq 2)$:

$$\left[A, B^{n-1}\right] = \sum_{i=o}^{n-2} B^i [A,B] B^{n-i-2}$$

On a :

$$\begin{aligned}\left[A, B^n\right] = \left[A, B\,B^{n-1}\right] &= [A,B]B^{n-1} + B\left[A, B^{n-1}\right] \\ &= [A,B]B^{n-1} + \sum_{i=o}^{n-2} B^{i+1}[A,B]B^{n-i-2} \\ &= [A,B]B^{n-1} + \sum_{i=o}^{n-2} B^{i+1}[A,B]B^{n-(i+1)-1} \\ &= [A,B]B^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} B^{j}[A,B]B^{n-j-1} \quad ; \quad (j = i+1) \\ &= \sum_{j=o}^{n-1} B^{j}[A,B]B^{n-j-1}\end{aligned}$$

4. F et G étant des fonctions respectives des opérateurs A et B, alors :

$$F(A)=\sum_i f_i A^i \qquad \text{et} \qquad G(B)=\sum_j g_j B^j$$

Donc :

$$\left[F(A),G(B)\right]=\sum_{i,j} f_i g_j A^i B^j - \sum_{i,j} f_i g_j B^j A^i = \sum_{i,j} f_i g_j\,[A^i,B^j]$$

Considérons le commutateur $[A^i,B^j]$; on a :

$$[A^i,B^j]=\sum_{r=o}^{j-1} B^r\left[A^i,B\right]B^{j-r-1}=\sum_{r=o}^{j-1} B^r\left(\sum_{s=o}^{i-1} A^s\left[A,B\right]A^{i-s-1}\right)B^{j-r-1}$$

Si $[A,B]=0$ alors $[A^i,B^j]=0$ et par la suite $\left[F(A),G(B)\right]=0$.

En particulier, pour $A=B=F(A)$, on a : $[A,G(A)]=0$ puisque $[A,A]=0$.

5. Montrons que si $\left[B,\left[A,B\right]\right]=0$, alors $\left[A,G(B)\right]=\left[A,B\right]\dfrac{dG}{dB}$.

On a :

$$\left[A,G(B)\right]=[A,\sum_j g_j B^j]=\sum_j g_j[A,B^j]=\sum_j g_j\left(\sum_{s=o}^{j-1} B^s\left[A,B\right]B^{j-s-1}\right)$$

Le commutateur $[A,B]$ commute avec B, il commute aussi avec B^s qui est fonction de B :

$$B^s\left[A,B\right]=\left[A,B\right]B^s$$

D'où :

$$\left[A,G(B)\right]=\sum_j g_j\left(\sum_{s=o}^{j-1}\left[A,B\right]B^s B^{j-s-1}\right)=\sum_j g_j\left(\sum_{s=o}^{j-1}\left[A,B\right]B^{j-1}\right)=\left[A,B\right]\sum_j g_j\, j\,B^{j-1}$$

Or : $$\sum_j g_j\, j\,B^{j-1}=\sum_j g_j\,\frac{d(B^j)}{dB}=\frac{d}{dB}\left(\sum_j g_j\,B^j\right)=\frac{dG}{dB}$$

d'où : $$\left[A,G(B)\right]=\left[A,B\right]\frac{dG(B)}{dB}$$

Exercice 2

1. Les matrices représentant les opérateurs L_z, L_z^2, S et S^2 dans la base $\left\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\right\}$:

$$L_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad , \quad S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad L_z^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad , \quad S^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{I}$$

Ces matrices sont symétriques et réelles, donc **hermitiques**, car :

$$[A^T]^* = A$$

Comme l'espace est de dimension finie, elles sont diagonalisables et représentent donc des **observables**.

2. Vecteurs propres et valeurs propres de L_z^2 :

$$L_z^2|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad , \quad L_z^2|u_2\rangle = 0 \quad , \quad L_z^2|u_3\rangle = |u_3\rangle$$

Donc, les valeurs propres de L_z^2 sont 1 et 0. A la valeur propre 1 sont associés les vecteurs propres $|u_1\rangle$ et $|u_3\rangle$. A la valeur propre 0 est associé le vecteur propre $|u_2\rangle$.

- **Vecteurs propres et valeurs propres de S :**

Les valeurs propres de S

$$\det(S-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

Les valeurs propres de S sont $\lambda = 1$ (deux fois dégénérée) et $\lambda = -1$ (non dégénérée)

- **Les vecteurs propres de S**
- On constate que $S|u_2\rangle = |u_2\rangle$, donc $|v_2\rangle = |u_2\rangle$ est le premier vecteur propre associé à $\lambda = 1$.
- Pour les deux autres vecteurs propres, considérons la restriction de la matrice de S au sous espace $\mathscr{E}_2$ engendré par les vecteurs $|u_1\rangle$ et $|u_3\rangle$:

$$(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que les vecteurs propres de (S) s'écrivent en fonction de $|u_1\rangle$ et $|u_3\rangle$:

$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle + |u_3\rangle\right]$ vecteur propre associé à la valeur propre 1,

$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle - |u_3\rangle\right]$ vecteur propre associé à la valeur propre -1.

Conclusion :

Les vecteurs propres de S associés à la valeur propre $\lambda = 1$ sont $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle + |u_3\rangle\right]$ et $|v_2\rangle = |u_2\rangle$;

Le vecteur propre de S associé à la valeur propre $\lambda = -1$ est $|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle - |u_3\rangle\right]$.

3. Base de l'espace des états formée des vecteurs propres communs à L_z^2 et S :

i. Les deux observables L_z^2 et S commutent :

$$L_z^2\, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S\, L_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left[L_z^2, S\right] = L_z^2\, S - S\, L_z^2 = 0$$

ii. Base de vecteurs propres communs à L_z^2 et S :

On vérifie facilement que les vecteurs $|v_1\rangle$ et $|v_3\rangle$ sont aussi vecteurs propres de L_z^2 :

$$L_z^2 |v_1\rangle = |v_1\rangle \qquad , \qquad L_z^2 |v_3\rangle = |v_3\rangle$$

Donc, l'ensemble des vecteurs $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ sont des vecteurs propres communs à L_z^2 et S .

Vecteurs propres communs	Valeurs propres de L_z^2	Valeurs propres de S
$\lvert v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lvert u_1\rangle + \lvert u_3\rangle\right]$	1	1
$\lvert v_2\rangle = \lvert u_2\rangle$	0	1
$\lvert v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lvert u_1\rangle - \lvert u_3\rangle\right]$	1	-1

A chaque couple de valeurs propres de L_z^2 et S correspond un seul vecteur propre commun.

On vérifie que l'ensemble $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ vérifie les deux relations fondamentales (relation d'orthonormalisation et de fermeture) suivantes :

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{i\,j} \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{3} |v_i\rangle\langle v_i| = \mathrm{I}$$

Par conséquent, l'ensemble $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ forme une base de l'espace des états.

Les deux observables L_z^2 et S commutent et admettent une base de vecteurs propres communs, par conséquent elles forment un E. C. O. C.

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

POSTULATS DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

Problème 1 : Application des postulats de la mesure

On considère un système physique S dont l'espace des états, à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormée complète formée par les trois kets $\mathcal{B} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$.

On considère l'énergie totale et deux autres grandeurs physiques **A** et **B** associées au système. Les observables quantiques associées à ces grandeurs sont respectivement l'hamiltonien H et les deux observables A et B. Elles sont définies par leurs actions sur les vecteurs de la base :

$$H|u_1\rangle = \hbar\omega_0|u_1\rangle \quad , \quad H|u_2\rangle = 2\hbar\omega_0|u_2\rangle \quad , \quad H|u_3\rangle = 2\hbar\omega_0|u_3\rangle$$
$$A|u_1\rangle = a|u_1\rangle \quad , \quad A|u_2\rangle = a|u_3\rangle \quad , \quad A|u_3\rangle = a|u_2\rangle$$
$$B|u_1\rangle = b|u_2\rangle \quad , \quad B|u_2\rangle = b|u_1\rangle \quad , \quad B|u_3\rangle = b|u_3\rangle$$

où : ω_o, a et b sont des constantes réelles positives.

A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état initial :

$$|\psi(t=0)\rangle = |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

1. Donner l'expression normalisée du vecteur $|\psi(t=0)\rangle$.

2. Ecrire les matrices représentant les observables H, A et B dans la base $\mathcal{B}$.

3. On mesure, à l'instant $t = 0$, l'énergie du système.

- **a.** Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
- **b.** Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle_0 = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle$.
- **c.** Calculer l'écart quadratique moyen ΔH.

4. Au lieu de mesurer l'énergie du système à l'instant $t = 0$, on mesure la grandeur **A**.

- **a.** Quelles résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
- **b.** Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?

5. Exprimer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant t.

6. Calculer les valeurs moyennes $\langle A\rangle_t$ et $\langle B\rangle_t$ des observables A et B à l'instant t. Conclure.

7. Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A? Même question pour l'observable B. Interprétation.

Problème 2 : Evolution d'un système dans un champ magnétique (Théorème d'Ehrenfest)

On considère un système physique S dont l'espace des états, à deux dimensions, est rapporté à la base orthonormée formée par les deux kets $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$. Soient les observables S_x , S_y et S_z définies par leurs actions sur les vecteurs $|+\rangle$ et $|-\rangle$:

$$S_x|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|-\rangle \quad ; \quad S_x|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$$
$$S_y|+\rangle = \frac{i\hbar}{2}|-\rangle \quad ; \quad S_y|-\rangle = \frac{-i\hbar}{2}|+\rangle$$
$$S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \quad ; \quad S_z|-\rangle = \frac{-\hbar}{2}|-\rangle$$

1. a. Ecrire les matrices représentant S_x , S_y et S_z dans la base $\mathcal{B}$.

b. Calculer les commutateurs $[S_x , S_y]$, $[S_y , S_z]$ et $[S_z , S_x]$.

2. Le système S supposé fixe (énergie cinétique nulle), est placé dans un champ magnétique constant parallèle à Oz, $\vec{B} = B\vec{e}_z$; l'hamiltonien d'interaction H du système avec le champ magnétique est alors $H = \omega S_z$, où ω est une constante réelle. A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

a. Calculer les valeurs moyennes $\langle S_x \rangle_0$, $\langle S_y \rangle_0$ et $\langle S_z \rangle_0$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

b. Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ de la particule à tout instant ultérieur $t > 0$.

c. Calculer les valeurs moyennes $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ et $\langle S_z \rangle$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$.

3. a. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, calculer : $\frac{d}{dt}\langle S_x \rangle$, $\frac{d}{dt}\langle S_y \rangle$ et $\frac{d}{dt}\langle S_z \rangle$.

b. Trouver les équations différentielles de second degré vérifiées par $\langle S_x \rangle$ et $\langle S_y \rangle$. Résoudre ces équations et retrouver le résultat de la question **(2 - c)**. En donner une interprétation géométrique.

Problème 3 : Mesure d'observables sur un système physique

On considère un système physique S dont l'espace des états, à deux dimensions, est rapporté à la base orthonormée complète formée par les deux kets $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Soient les opérateurs S_x , S_y et S_z dont les actions sur les vecteurs de base $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont données par les relations suivantes :

$$S_x\,|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|-\rangle \qquad ; \qquad S_x\,|-\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle$$

$$S_y\,|+\rangle = \frac{i\hbar}{2}\,|-\rangle \qquad ; \qquad S_y\,|-\rangle = \frac{-i\hbar}{2}\,|+\rangle$$

$$S_z\,|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|+\rangle \qquad ; \qquad S_z\,|-\rangle = \frac{-\hbar}{2}\,|-\rangle$$

1. Ecrire les matrices représentants les opérateurs S_x , S_y et S_z dans la base $\mathcal{B}$.

2. Les opérateurs S_x , S_y et S_z sont – ils hermitiques ? Justifier votre réponse.

3. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur S_z.

4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur S_y.

N. B. : On notera $|\,u\,\rangle$ le vecteur propre de S_y associé à la valeur propre positive et $|\,v\,\rangle$ le vecteur propre associé à la valeur propre négative.

5. Si le système se trouve dans l'état $|\,+\,\rangle$, calculer les valeurs moyennes $\langle\,S_x\,\rangle$, $\langle\,S_x^2\,\rangle$ et l'écart quadratique moyen $\Delta\,S_x$.

On rappelle que : $\Delta\,A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$

6. Le système se trouve maintenant dans l'état :

$$|\,\psi\rangle = \cos\theta\,|\,+\,\rangle + \sin\theta\;|\,-\,\rangle \;\; ; \;\; \theta \in \mathbb{R}$$

On mesure l'observable S_z^2.

- **a.** Quels sont les résultats possibles et leurs probabilités ?
- **b.** Quel est l'état du système immédiatement après la mesure ?

7. On mesure ensuite l'observable S_z.

Quels sont les résultats possibles et leurs probabilités ?

8. Au lieu de mesurer S_z, on mesure S_y.

Quels sont les résultats possibles et leurs probabilités ?

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
KENITRA

Année Universitaire 2019 - 2020

Corrigé :

Problème 1 : Application des postulats de la mesure

1. Expression normalisée du vecteur $|\psi(t=0)\rangle$:

Calculons le carré de la norme du vecteur $|\psi(t=0)\rangle = |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$:

$$\langle\psi(t=0)|\psi(t=0)\rangle = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Donc l'expression normalisée du vecteur est :

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

2. Les matrices représentant les observables H, A et B dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$H = \hbar\omega_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

où : ω_o, a et b sont des constantes réelles positives.

3. A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état initial :

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

On mesure, à l'instant $t = 0$, l'énergie du système.

a. Résultats possibles et leurs probabilités :

- Les résultats possibles sont les valeurs propres de l'hamiltonien H : $\hbar\omega_0$ et $2\hbar\omega_0$.
- Les probabilités associées :

$$P(\hbar\omega_0) = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(2\hbar\omega_0) = |\langle u_2|\psi(0)\rangle|^2 + |\langle u_3|\psi(0)\rangle|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

b. La valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle_0 = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle$:

$$\langle H\rangle_0 = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^{3} E_i\, P(E_i) = \hbar\omega_0 . \frac{1}{2} + 2\hbar\omega_0 . \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

c. L'écart quadratique moyen ΔH :

- Moyenne de H^2 **:**

$$\left\langle H^2 \right\rangle_0 = (\hbar\omega_0)^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\hbar\omega_0)^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}(\hbar\omega_0)^2$$

- L'écart quadratique moyen ΔH :

$$\Delta H = \sqrt{\left\langle H^2 \right\rangle - \left\langle H \right\rangle^2} = \sqrt{\frac{5}{2}(\hbar\omega_0)^2 - \frac{9}{4}(\hbar\omega_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

4. Au lieu de mesurer l'énergie du système à l'instant $t = 0$, on mesure la grandeur **A**.

a. Résultats possibles et leurs probabilités :

- Les valeurs propres de A

$$Det\,(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-\lambda)^2(\lambda + a) = 0$$

Donc, les valeurs propres de A sont : $\lambda = a$ (valeur propre deux fois dégénérée) et $\lambda = -a$ (valeur propre simple).

- Les vecteurs propres de A

On constate que $A|u_1\rangle = a\,|u_1\rangle$, donc $|v_1\rangle = |u_1\rangle$ est le premier vecteur propre associé à a.

On cherche $|v_2\rangle = x\,|u_1\rangle + y\,|u_2\rangle + z\,|u_3\rangle$ vecteur propre de A associé à la valeur propre a tel que :

$$A|v_2\rangle = a\,|v_2\rangle \qquad , \qquad \langle v_1|v_2\rangle = 0 \qquad , \qquad \langle v_2|v_2\rangle = 1$$

- $A|v_2\rangle = a\,|v_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x \\ a\,z \\ a\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x \\ a\,y \\ a\,z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \\ y = z \end{cases}$
- $\langle v_1|v_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u_1|v_2\rangle = x = 0$
- $\langle v_2|v_2\rangle = 1 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 2|y|^2 \quad \Rightarrow \quad |y| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$

$e^{i\theta}$ est un facteur de phase qu'on peut prendre égal à 1, donc :

$$|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle + |u_3\rangle\right]$$

De même, on cherche le vecteur $|v_3\rangle = x\,|u_1\rangle + y\,|u_2\rangle + z\,|u_3\rangle$ associé à la valeur propre $-a$ tel que :

$$A|v_3\rangle = -a\,|v_3\rangle \quad , \quad \langle v_1|v_3\rangle = 0 \quad , \quad \langle v_3|v_3\rangle = 1$$

On obtient :

$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle - |u_3\rangle\right]$$

Conclusion :

Les vecteurs propres associés à la valeur a sont :

$$|v_1\rangle = |u_1\rangle \text{ et } |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle + |u_3\rangle\right]$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre $-a$ est :

$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle - |u_3\rangle\right]$$

- Les résultats possibles sont les valeurs propres de l'observable A, c'est-à-dire : a et $-a$.
- Les probabilités associées :

- A la valeur propre a sont associés les vecteurs propres $|v_1\rangle = |u_1\rangle$ et $|v_2\rangle$, donc :

$$P(a,0) = \left|\langle u_1|\psi(0)\rangle\right|^2 + \left|\langle v_2|\psi(0)\rangle\right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

- A la valeur propre $-a$ est associé le vecteur propre $|v_3\rangle$, donc :

$$P(-a,0) = \left|\langle v_3|\psi(0)\rangle\right|^2 = 0$$

Ou bien :

$$P(a,0) + P(-a,0) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(-a,0) = 0$$

b. Vecteur d'état immédiatement après la mesure :

La mesure la grandeur **A** dans l'état $|\psi(0)\rangle$ donne comme résultat la valeur a avec $P(a,0) = 1$.

1ère méthode :

Avant la mesure, le système était dans l'état propre $|\psi(0)\rangle$ de A, donc, après la mesure le système restera dans cet état propre.

Ce qui implique que l'état du système immédiatement après la mesure est l'état $|\psi(0)\rangle$.

2ème méthode :

On applique le postulat 5 (réduction du vecteur d'état) : L'état du système immédiatement après la mesure est donnée par la projection orthogonale sur le sous – espace engendré par les vecteurs propres associés à la valeur propre a. Soit :

$$|\psi'(0)\rangle = \frac{P_a|\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle\psi(0)|P_a|\psi(0)\rangle}}$$

Où :

$$P_a = |u_1\rangle\langle u_1| + |v_2\rangle\langle v_2| = |u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}\big(|u_2\rangle + |u_3\rangle\big)\big(\langle u_2| + \langle u_3|\big)$$
$$= |u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}|u_2\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2}|u_2\rangle\langle u_3| + \frac{1}{2}|u_3\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2}|u_3\rangle\langle u_3|$$

Donc :

$$P_a|\psi(0)\rangle = \left(|u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}|u_2\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2}|u_2\rangle\langle u_3| + \frac{1}{2}|u_3\rangle\langle u_2| + \frac{1}{2}|u_3\rangle\langle u_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$
$$\Rightarrow \quad P_a|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \quad \Rightarrow \quad P_a = \mathrm{I}$$

D'où :

$$|\psi'(0)\rangle = |\psi(0)\rangle$$

5. Vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant *t* :

Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est obtenu en appliquant l'opérateur d'évolution à l'état $|\psi(0)\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle$$

L'hamiltonien H étant indépendant du temps, donc :

$$U(t,\,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\right)$$

Donc :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle + \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0 t}|u_2\rangle + \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0 t}|u_3\rangle$$

6. Valeur moyenne $\langle A\rangle_t$ de l'observable A à l'instant *t* :

D'après le théorème d'Ehrenfest, l'évolution de la valeur moyenne d'une observable A dans le temps est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

On peut vérifier facilement que l'observable A ne dépend pas explicitement du temps, et qu'elle commute avec l'hamiltonien H :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \text{ et } [A, H] = 0$$

L'observable A est une constante du mouvement. Donc :

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{d}{dt}\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = 0$$

Ainsi :

$$\langle A \rangle_t = \langle A \rangle_{t=0} = \text{constante}$$

$$\langle A \rangle_0 = \langle \psi(0) | A | \psi(0) \rangle = a \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = a$$

Car $|\psi(0)\rangle$ est un état propre de l'observable A associé à la valeur propre a.

- **Valeur moyenne $\langle B \rangle_t$ de l'observable B à l'instant t :**

On peut vérifier facilement que l'observable B ne commute pas avec l'hamiltonien H : $[B, H] \neq 0$

L'observable B n'est pas une constante du mouvement. Donc :

$$\frac{d}{dt}\langle B \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle B \rangle_t \neq \langle B \rangle_{t=0}$$

Calcul de $\langle B \rangle_t = \langle \psi(t) | B | \psi(t) \rangle$:

$$\langle B \rangle_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 t} & \frac{1}{2} e^{2i\omega_0 t} & \frac{1}{2} e^{2i\omega_0 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \end{pmatrix}$$

$$\langle B \rangle_t = b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 t} & \frac{1}{2} e^{2i\omega_0 t} & \frac{1}{2} e^{2i\omega_0 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \end{pmatrix} = \frac{b}{2\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} \right) + \frac{b}{4}$$

Donc :

$$\langle B \rangle_t = b \left(\frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right)$$

Conclusion :

- la valeur moyenne $\langle A \rangle_t$ est constante dans le temps, car l'observable A est une constante du mouvement ;

- la valeur moyenne $\langle B \rangle_t$ est une fonction périodique du temps, sa période est $T = 2\pi / \omega_0$.

7. a. A l'instant *t*, on mesure l'observable *A*.

Résultats possibles et probabilités correspondantes :

- Les résultats possibles sont les valeurs propres de l'observable A, c'est-à-dire : a et $-a$.
- La probabilité de trouver la valeur a :

$$P(a) = |\langle u_1|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle v_2|\psi(t)\rangle|^2 = 1$$

- La probabilité de trouver la valeur -a :

$$P(-a) = |\langle v_3|\psi(t)\rangle|^2 = 1 - P(a) = 0$$

Puisque l'observable A est une constante du mouvement, alors les probabilités de mesure se conservent dans le temps.

b. A l'instant *t*, on mesure l'observable *B*.

- les valeurs propres de B sont : $\lambda_1 = b$ (valeur propre deux fois dégénérée) et $\lambda_2 = -b$ (valeur propre simple).
- les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = b$ sont :

$$|q_1\rangle = |u_3\rangle \text{ et } |q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle + |u_2\rangle\right]$$

- le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -b$ est :

$$|q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1\rangle - |u_2\rangle\right]$$

Donc, les résultats possibles sont alors b et $-b$.

- La probabilité de trouver la valeur b :

$$P(b) = |\langle u_3|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle q_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\omega_0 t)$$

- La probabilité de trouver la valeur -b :

$$P(-b) = 1 - P(b) = |\langle q_3|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\omega_0 t)$$

On constate que les probabilités de mesure de l'observable B sont des fonctions périodiques du temps, puisque l'observable B n'est pas une constante du mouvement.

Problème 2 : Evolution d'un système dans un champ magnétique (Théorème d'Ehrenfest)

1. a. Les matrices représentants S_x , S_y et S_z dans la base $\mathcal{B}$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Calcul des commutateurs $[\,S_x\,,S_y\,]$, $[\,S_y\,,S_z\,]$ et $[\,S_z\,,S_x\,]$ **:**

$$\boxed{[\,S_x\,,S_y\,]=i\hbar S_z \quad ; \quad [\,S_y\,,S_z\,]=i\hbar S_x \quad ; \quad [\,S_z\,,S_x\,]=i\hbar S_y}$$

2. L'hamiltonien d'interaction H de la particule avec le champ magnétique est :

$$H=\omega S_z\text{, où } \omega\in\mathbb{R}.$$

A l'instant $t=0$, le système est dans l'état :

$$|\,\psi(0)\,\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

a. Valeurs moyennes $\langle\,S_x\,\rangle_0$ **,** $\langle\,S_y\,\rangle_0$ **et** $\langle\,S_z\,\rangle_0$ **dans l'état** $|\psi(0)\rangle$ **:**

$$\boxed{\langle\,S_x\,\rangle_0=\frac{\hbar}{2} \quad ; \quad \langle\,S_y\,\rangle_0=0 \quad ; \quad \langle\,S_z\,\rangle_0=0}$$

b. Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ **est obtenu en appliquant l'opérateur d'évolution à l'état** $|\psi(0)\rangle$ **:**

$$|\psi(t)\rangle=U(t,0)|\psi(0)\rangle$$

L'hamiltonien H étant indépendant du temps, donc :

$$\boxed{U(t,\,0)=e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}=e^{-i\frac{\omega t}{\hbar}.S_z}}$$

Donc :

$$|\psi(t)\rangle=e^{-i\frac{\omega t}{\hbar}.S_z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega t}{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\omega t}{2}}|-\rangle$$

c. Valeurs moyennes $\langle\,S_x\,\rangle$ **,** $\langle\,S_y\,\rangle$ **et** $\langle\,S_z\,\rangle$ **dans l'état** $|\psi(t)\rangle$ **:**

$$\boxed{\langle\,S_x\,\rangle=\frac{\hbar}{2}\cos(\omega t) \quad ; \quad \langle\,S_y\,\rangle=\frac{\hbar}{2}\sin(\omega t) \quad ; \quad \langle\,S_z\,\rangle=0}$$

3. a. Calcul de : $\frac{d}{dt}\langle\,S_x\,\rangle$, $\frac{d}{dt}\langle\,S_y\,\rangle$ et $\frac{d}{dt}\langle\,S_z\,\rangle$ **:**

D'après le théorème d'Ehrenfest, l'évolution de la valeur moyenne de l'observable S_u **dans le temps est donnée par :**

$$\frac{d}{dt}\langle S_u\rangle=\frac{1}{i\hbar}\langle[S_u,H]\rangle+\left\langle\frac{\partial S_u}{\partial t}\right\rangle$$

Les observables S_x , S_y et S_z ne dépendent pas explicitement du temps, alors :

$$\frac{d}{dt}\langle S_u \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [S_u, H] \rangle = \frac{\omega}{i\hbar}\langle [S_u, S_z] \rangle$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle S_x \rangle = -\omega \langle S_y \rangle \quad (1)} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\langle S_y \rangle = \omega \langle S_x \rangle \quad (2)} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\langle S_z \rangle = 0 \quad (3)}$$

L'équation (3) montre que la composante S_z reste en moyenne constante :

$$\frac{d}{dt}\langle S_z \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle S_z \rangle = const = \langle S_z \rangle_0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle S_z \rangle = 0$$

b. Equations différentielles de second ordre vérifiées par $\langle S_x \rangle$ et $\langle S_y \rangle$:

- **Dérivons, par rapport au temps, les équations (1) et (2) :**

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle S_x \rangle = -\omega \dfrac{d}{dt}\langle S_y \rangle = -\omega^2 \langle S_x \rangle \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\langle S_y \rangle = \omega \dfrac{d}{dt}\langle S_x \rangle = -\omega^2 \langle S_x \rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle S_x \rangle + \omega^2 \langle S_x \rangle = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\langle S_y \rangle + \omega^2 \langle S_y \rangle = 0 \end{cases}$$

- **Les solutions de ces deux équations différentielles de second ordre sont de la forme :**

$$\langle S_x \rangle = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad ; \qquad \langle S_y \rangle = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

A, B, C et D sont des paramètres complexes déterminés à partir des conditions initiales :

$$\langle S_x \rangle(t=0) = \langle S_x \rangle_0 = A = \frac{\hbar}{2} \qquad , \qquad \langle S_y \rangle(t=0) = \langle S_y \rangle_0 = C = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle S_x \rangle = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) = -\omega\langle S_y \rangle \quad \Rightarrow \quad B = \langle S_y \rangle_0 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle S_y \rangle = -C\omega\sin(\omega t) + D\omega\cos(\omega t) = \omega\langle S_x \rangle \quad \Rightarrow \quad D = \langle S_x \rangle_0 = \frac{\hbar}{2}$$

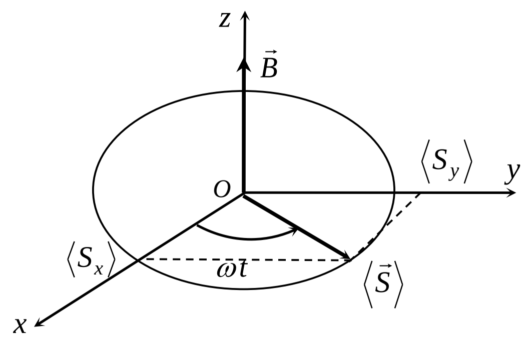
D'où :

$$\boxed{\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t) \quad , \quad \langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2}\sin(\omega t) \quad , \quad \langle S_z \rangle = 0}$$

- **Interprétation géométrique :**

Ces équations décrivent un mouvement de précession du vecteur $\langle \vec{S} \rangle$ de composantes $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ et $\langle S_z \rangle = 0$ autour du champ magnétique $\vec{B}$ à la vitesse angulaire ω :

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \langle S_x \rangle \vec{e}_x + \langle S_y \rangle \vec{e}_y = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)\vec{e}_x + \frac{\hbar}{2}\sin(\omega t)\vec{e}_y}$$



Ce mouvement de précession d'un moment cinétique autour d'un champ magnétique constant est appelé **précession de Larmor**.

Problème 3 : Mesure d'observables sur un système physique

1. **Les matrices représentants S_x , S_y et S_z dans la base $\mathcal{B}$:**

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. **Les opérateurs S_x , S_y et S_z sont hermitiques car on vérifie bien que :**

- les éléments de la diagonale principale sont des nombres réels,

- les éléments de matrice symétriques par rapport à la diagonale principale sont complexes conjugués les uns des autres.

Ainsi, la matrice d'un opérateur hermitique A vérifie la relation suivante :

$$\boxed{[A^T]^* = A}$$

On montre que cette propriété est vérifiée par les trois matrices S_x , S_y et S_z :

$$\boxed{[S_x^T]^* = S_x \quad , \quad [S_y^T]^* = S_y \quad , \quad [S_z^T]^* = S_z}$$

3. **Valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur S_z :**

La matrice représentant l'opérateur S_z dans la base $\mathcal{B} = \left\{ |+\rangle, |-\rangle \right\}$ est diagonale, donc :

- Les valeurs propres de S_z sont les éléments de la diagonale, c'est-à-dire : $\frac{\hbar}{2}$ et $\frac{-\hbar}{2}$.

- Les vecteurs propres associés sont respectivement les vecteurs de la base $\mathcal{B}$: $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4. **Valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur S_y :**

- **Les valeurs propres de S_y :**

$$Det(S_y - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{-i\hbar}{2} \\ \frac{i\hbar}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Donc les valeurs propres de S_y sont : $\boxed{\lambda_1 = \frac{\hbar}{2} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}}$

- **Le vecteur propre $|u\rangle$ associé à $\lambda_1 = \frac{\hbar}{2}$:**

Soit $|\,u\,\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $x, y \in \mathbb{C}$ tel que : $S_y\,|\,u\,\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\,u\,\rangle$ et $\langle u|u\rangle = 1$

$\langle u|u\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |x|^2 + |y|^2 = 1$

$S_y\,|\,u\,\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\,u\,\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\,y \\ i\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = i\,x$

La relation d'orthonormalisation devient alors :

$$|x|^2 + |y|^2 = 2|x|^2 = 1, \text{ il vient } |x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ est un facteur de phase qu'on prendra arbitrairement égal à 1, donc :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\,u\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$$

- **Le vecteur propre $|\,v\,\rangle$ associé à $\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}$:**

Soit $|\,v\,\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $x, y \in \mathbb{C}$ tel que : $S_y\,|\,v\,\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|\,v\,\rangle$ et $\langle v|v\rangle = 1$

$\langle v|v\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |x|^2 + |y|^2 = 1$

$S_y\,|\,v\,\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|\,v\,\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\,y \\ i\,x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = -i\,x$

La relation d'orthonormalisation devient alors :

$$|x|^2 + |y|^2 = 2|x|^2 = 1, \text{ il vient } |x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ est un facteur de phase qu'on prendra arbitrairement égal à 1, donc :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\,v\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}$$

5. Le système est dans l'état $|+\rangle$.

- **Valeur moyenne $\langle\, S_x \,\rangle$:**

$$\langle\, S_x \,\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle\, S_x \,\rangle = 0}$$

- **Valeur moyenne** $\langle S_x^2 \rangle$:

$$\langle S_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\boxed{\langle S_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}}$$

- **Ecart quadratique moyen** ΔS_x :

$$\Delta S_x = \sqrt{\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2} = \sqrt{\langle S_x^2 \rangle} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_x = \frac{\hbar}{2}}$$

6. Le système se trouve maintenant dans l'état :

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|+\rangle + \sin\theta\,|-\rangle \;\; ; \; \theta \in \mathbb{R}$$

On mesure l'observable S_z^2 **.**

a. Les résultats possibles et leurs probabilités :

La matrice représentant S_z^2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

L'observable S_z^2 possède une seule valeur propre doublement dégénérée $\frac{\hbar^2}{4}$ dont les vecteurs propres associés sont les kets $|+\rangle$ et $|-\rangle$. Donc :

- **Le seul résultat possible de cette mesure est la valeur** $\frac{\hbar^2}{4}$
- **Sa probabilité est :**

$$P(\hbar^2/4) = \left|\langle + | \psi \rangle\right|^2 + \left|\langle - | \psi \rangle\right|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

b. L'état du système immédiatement après la mesure :

On accepte les deux méthodes suivantes :

La mesure de S_z^2 effectuée sur le système dans l'état $|\psi\rangle$ donne avec certitude la valeur $\frac{\hbar^2}{4}$, ce qui implique que :

L'état $|\psi\rangle$ **est un état propre de** S_z^2, donc, **après la mesure le système reste dans cet état propre.**

Donc, l'état du système immédiatement après la mesure est :

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|+\rangle + \sin\theta\,|-\rangle$$

7. On mesure ensuite l'observable S_z.

- **Les résultats possibles sont les valeurs propres de S_z : $\frac{\hbar}{2}$ et $\frac{-\hbar}{2}$.**

- **Leurs probabilités :**

$$P(\hbar/2) = \left|\langle + | \psi \rangle\right|^2 = \cos^2\theta \qquad , \qquad P(-\hbar/2) = \left|\langle - | \psi \rangle\right|^2 = \sin^2\theta$$

8. Au lieu de mesurer S_z, on mesure S_y.

- **Les résultats possibles sont les valeurs propres de S_y : $\frac{\hbar}{2}$ et $\frac{-\hbar}{2}$.**

- **Leurs probabilités :**

$$P(\hbar/2) = \left|\langle u | \psi \rangle\right|^2 \qquad , \qquad P(-\hbar/2) = \left|\langle v | \psi \rangle\right|^2$$

Or :

$$\langle u | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Donc :

$$P(\hbar/2) = \left|\langle u | \psi \rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\cos\theta - i\sin\theta\right|^2 = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{2}$$

$$P(-\hbar/2) = \left|\langle v | \psi \rangle\right|^2 = 1 - P(\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\boxed{P(\hbar/2) = P(-\hbar/2) = \frac{1}{2}}$$