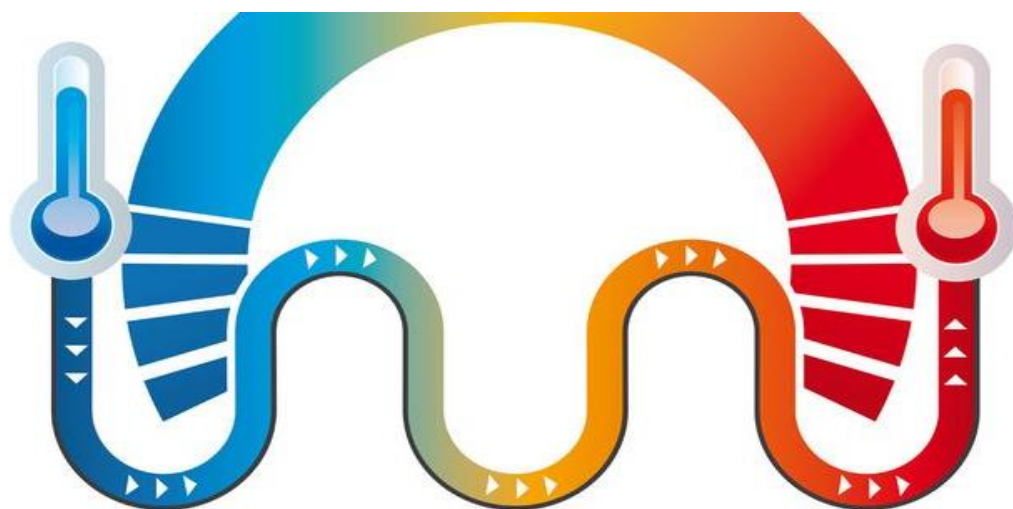


## **Module : Thermodynamique Classique**

**FILIERE : SMPC/SMI**



**Auteurs : Pr. Mohamed GOUGHRI, Pr. Amina KHARCHAF,  
Pr. Noureddine LOTFI**

# Table des matières

<b>Chapitre I : Notions de base de la thermodynamique classique .....</b>	<b>1</b>
I.1. Introduction .....	1
I.2. Définitions .....	3
1-2 Etat d'équilibre d'un système.....	3
I.3. Description d'un système .....	3
I.3.1. Variables d'état.....	3
I.3.2. Propriété mathématique d'une fonction d'état .....	4
I.4. Transformation d'un système.....	6
I.5. Pression d'un fluide.....	8
I.5.1. Définition de la pression.....	8
I.5.2. Loi fondamentale de la statique des fluides.....	8
I.5.3. Applications.....	9
I.5.3.1. Cas des liquides .....	9
I.6. Thermométrie .....	12
I.6.1. Température : notion intuitive .....	12
I.6.2. Repérage de la température .....	13
I.6.3. Principe de l'équilibre thermique ( <i>Principe 0 de la thermodynamique</i> ) .....	13
I.7. Phénomènes thermométriques.....	13
I.7.1. Echelles de température .....	14
I.7.1.1. Echelles centésimales .....	14
I.7.1.2. L'échelle Fahrenheit.....	14
I.7.1.3. Echelle absolue : .....	15
I.8. Chaleur .....	15
I.8.1. Définition.....	15
I.8.2. La capacité calorifique.....	16
I.8.3. Capacité calorifique moyenne .....	16
I.8.4. Capacité calorifique vraie .....	16
I.8.5. Calorimétrie .....	17
I.9. Le travail .....	18
I.9.1. Travail des forces pressantes. ....	18
I.9.2. Calcul du travail des forces pressantes dans quelques cas particuliers. ....	19

I.9.3. Convention de signe et notation .....	19
I.9.4. Travail mécanique des forces de pression .....	19
I.9.5. Cas des transformations irréversibles .....	20
I.9.6. Cas des transformations réversibles .....	20
I.9.7. Représentation géométrique du travail .....	21
I.9.7.1. Cas des transformations non cycliques.....	21
I.9.7.2. Cas des transformations cycliques.....	21
<b>Chapitre II : Premier principe de la thermodynamique .....</b>	<b>23</b>
II.1. Introduction.....	23
II.2. Premier principe.....	23
II.2.1. Enoncé du premier principe .....	23
II.2.2. Energie interne .....	23
II.2.3. L'expression du 1 <sup>er</sup> principe est général quel que soit la nature de la transformation (réversible ou irréversible).....	23
II.2.4. Transformation élémentaire .....	24
II.2.5. Cas d'une transformation adiabatique.....	24
II.2.6. Transformation isochore.....	24
II.2.7. Transformation cyclique.....	24
II.3. Expression de <b><math>dU</math></b> en fonction des variables d'état (P, V, T) .....	24
II.3.1. Les coefficients calorimétriques.....	25
II.3.1.1. Définition .....	25
II.3.1.2. Relation entre les coefficients calorimétrique .....	25
II.3.2. Les coefficients Calorimétriques pour un gaz parfait .....	26
II.4. La fonction enthalpie : H .....	27
II.4.1. Définition .....	27
II.4.2. Transformation à pression constante (isobare).....	27
II.4.3. Transformation à volume constant (isochore).....	27
II.4.4. Transformation élémentaire .....	28
II.5. Application du 1 <sup>er</sup> principe aux gaz parfaits .....	28
II.5.1. Description d'un gaz parfait.....	28
II.5.1.1. Loi de Boyle-Mariotte.....	28
II.5.1.2. Loi de Gay- Lussac et de Charles.....	28
II.5.1.3. Equation d'état du G.P .....	29
II.5.2. La 1 <sup>ère</sup> loi de Joule .....	29
II.5.3. 2 <sup>ème</sup> loi de Joule .....	31
II.5.4. Conséquences .....	32

II.5.4.1. Définition d'un gaz parfait .....	32
II.5.4.2. Relation de R.MAYER .....	32
II.5.5. Transformations d'un gaz parfait .....	33
II.5.5.1. Transformation réversible isotherme.....	33
II.5.5.2. Transformation réversible adiabatique.....	34
<b>Chapitre III : Le 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique (Principe de Carnot) .....</b>	<b>36</b>
III.1. Introduction .....	36
III.2. Enoncés du second principe .....	36
III.3. Transformation cyclique monotherme.....	37
III.3.1. Cycle monotherme irréversible.....	37
III.3.2. Cycle monotherme réversible .....	37
III.4. Transformation cyclique ditherme réversible.....	37
III.4.1. Machine moteur ditherme .....	37
III.4.2. Egalité de Clausius.....	39
III.4.3. Rendement d'un moteur thermique .....	39
III.4.4. Théorème de Carnot :.....	40
III.4.5. Cycle de Carnot irréversible .....	41
III.4.6. Généralisation de la relation de Clausius.....	41
III.5. Propriétés des cycles.....	42
III.5.1. Cycles dithermes .....	42
III.5.2. Cycles polythermes-inégalité de Clausius .....	42
III.5.3. Généralisation de l'inégalité de Clausius .....	43
III.6. Transformations non cycliques.....	43
III.6.1. Cas de la réversibilité. Notion d'entropie .....	43
III.6.2. Cas de l'irréversibilité.....	44
III.7. Calcul de la variation d'entropie .....	46
III.8. Evolution spontanée d'un système isolé.....	47
III.9. Diagramme entropique .....	48
III.10. Entropie de l'univers .....	48
III.10.1. Cas de la réversibilité.....	49
III.10.2. Cas de l'irréversibilité.....	49
III.11. Entropie d'un gaz parfait .....	50
III.11.1. Entropie en fonction des variables T et V .....	50
III.11.2. Entropie en fonction des variables T et P.....	51
III.11.3. Entropie en fonction des variables P et V .....	51

<b>Chapitre IV : Applications des deux principes : machines thermiques .....</b>	<b>53</b>
IV.1. Machines thermiques.....	53
IV.1.1. Définition .....	53
IV.1.2. Relations fondamentales .....	53
IV.1.3. Classification de machines thermiques.....	53
IV.2. Machines monothermes.....	53
IV.2.1. Machines dithermes .....	53
IV.2.1.1. Principe de fonctionnement .....	53
IV.2.1.2. Diagramme de fonctionnement ou diagramme de Raveau .....	54
IV.2.2. Moteurs thermiques dithermes .....	55
IV.2.2.1. Moteur idéal : Cycle de Carnot.....	55
IV.2.2.2. Moteurs à combustion interne .....	55
IV.2.2.3. Moteurs à explosion. Moteurs à essence ou à gaz .....	56
IV.2.2.4. Moteur Diesel .....	58
<b>Exercices et problèmes.....</b>	<b>60</b>

# Chapitre I : Notions de base de la thermodynamique classique

## I.1. Introduction

La thermodynamique est la science qui étudie et décrit le comportement de la matière ou des systèmes, en fonction des notions de température  $T$ , d'énergie (chaleur  $Q$ , travail  $W$ ...) et d'entropie  $S$ . La thermodynamique :

- étudie l'évolution ou les transformations de la matière ou des systèmes en considérant les variations d'état du système, lors d'échanges d'énergie entre le milieu extérieur et le système.
- repose sur 2 notions de base, l'énergie interne ( $U$ ) et l'entropie ( $S$ ) qui satisfont aux deux principes suivants, qui stipulent que :
  - L'énergie se conserve (premier principe de conservation de l'énergie)
  - L'entropie ne peut qu'augmenter (deuxième principe d'évolution)

L'objet de la thermodynamique est d'étudier le fonctionnement et le bilan d'énergie des machines thermiques et aussi les échanges ou transferts de chaleur dans un système ou entre deux systèmes.

- Dans **les machines thermiques** on assiste à une conversion d'énergie d'une forme en une autre (chaleur  $\rightarrow$  travail ou inversement)
- Dans **les échanges de chaleur**, il y a transfert de chaleur par suite d'une différence de température dans le système ou entre deux systèmes

On distingue entre quatre principaux mécanismes de transfert de chaleur : la conduction, la convection, le rayonnement et les changements d'état de la matière. Les applications de ces transferts de chaleur concernent les domaines :

- Isolation thermique et du stockage des gaz liquéfiés (cryogénie)
- Chauffage et de la climatisation des locaux
- Conception et du choix des échangeurs de chaleur

On peut décrire la thermodynamique de 2 manières ou aspects différents :

- L'aspect **macroscopique** : on s'intéresse aux propriétés de la matière ou du système à l'échelle globale ou macroscopique, alors les propriétés sont décrites par des variables d'état macroscopiques telles ( $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $m$ ...)
- L'aspect **microscopique** : on s'intéresse aux propriétés de la matière à l'échelle microscopique ou atomique en utilisant comme variables les grandeurs cinétiques des atomes ou molécules individuelles ( $p_i$ ,  $v_i$ ,  $E_i$  ...)

Selon que l'on considère l'un ou l'autre de ces aspects, on distingue alors entre la Thermodynamique Classique ou la Thermodynamique Statistique.

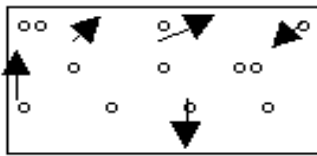
La **Thermodynamique Classique** n'a besoin d'aucune hypothèse sur la structure atomique de la matière, elle explique le comportement de la matière ou des systèmes en fonction de leurs variations d'énergie et d'entropie :

- Elle décrit uniquement les états initiaux et finaux des systèmes en évolution et dresse le bilan énergétique du système
- Le chemin suivi par la transformation du système peut jouer un rôle (notion de réversibilité des transformations)
- Elle ne cherche pas à élucider les mécanismes des transformations

La **Thermodynamique Statistique** par contre, cherche à expliquer l'origine et la signification des variables macroscopiques (p,T) et des notions de chaleur, de travail et d'entropie, en les reliant directement au mécanisme de l'agitation moléculaire. Ainsi, on explique les notions de température, de pression et de chaleur :

La **Notion de température** : la température est reliée au degré d'agitation moléculaire de la matière.

Si la vitesse  $v_i$  des molécules et donc leur énergie cinétique  $E_i$  augmentent, alors le degré d'agitation thermique du milieu est plus grand. A la température de 0 K (zéro absolu à  $-273^\circ\text{C}$ ) les atomes ou molécules sont figés.



- ✓ Les molécules se déplacent dans l'enceinte de façon totalement aléatoire avec des vitesses  $v_i$

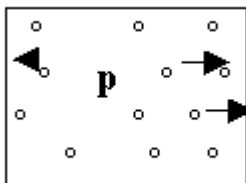
Fig. 1.1 : Gaz dans une enceinte

On définit la température T par la relation :

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad (1.1)$$

Cette relation définit l'échelle de **température absolue** T en degré K.

● **Notion de pression** : la pression est due aux nombreux chocs des atomes ou molécules sur les parois du récipient.



- ✓ dans l'enceinte il y a N molécules en agitation permanente soit,  $n' = N/V$  le nombre de molécules par unité de volume.

Fig. 1.2 : Pression dans une enceinte

On définit la pression par la relation :

$$p = \frac{1}{3} n' m \overline{v^2} \quad (1.2)$$

## L'Echanges d'énergie

Les échanges d'énergie sous forme de chaleur (Q) ou de travail (W) sont alors interprétés à l'échelle microscopique comme une manifestation de l'agitation moléculaire sous forme désordonnée (Q) ou ordonnée (W), voir Fig. 1.3 et 1.4.

$$T_2 > T_1$$

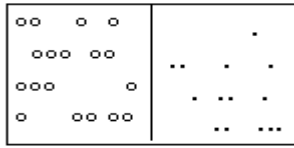


Fig. 1.3 : Transfert de chaleur Q

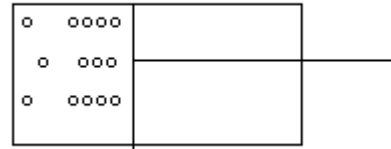


Fig. 1.4 : Transfert de travail W par un piston

## I.2. Définitions

Un système thermodynamique est un corps délimité par une **surface** qui lui est propre (cas d'un **solide**) ou matérialisé par des parois (cas d'un gaz ou liquide). À travers cette surface, se produisent des transferts d'énergie (travail mécanique, chaleur, . . .) et/ou de la matière au cours de la transformation. En fonction du type d'échange on utilise le vocabulaire suivant :

**Système ouvert** : Un système avec transfert de matière et d'énergie. Exemple : l'être vivant

**Système fermé** : pas de transfert de matière (les parois sont imperméable) mais il échange le travail ou la chaleur avec le milieu extérieur.

Exemple : Batterie, réfrigérateur

**Système isolé** : pas de transfert ni de matière ni d'énergie (cas idéal car seul l'univers constitue un système isolé).

Exemple : Calorimètre, Thermos

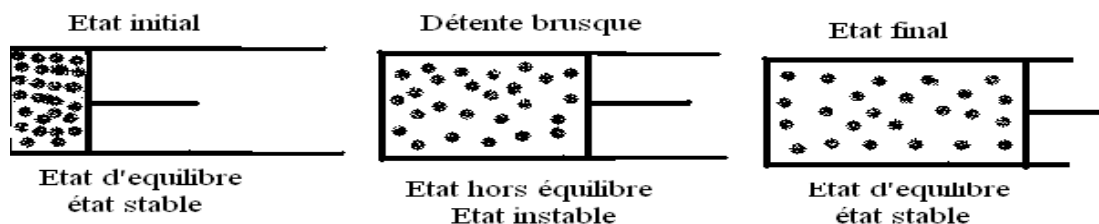
Système	Echange Matière	Echange Energie
isolé	non	non
fermé	non	oui
ouvert	oui	oui

Tableau 1.1 : Echange de masse et d'énergie entre le système et le milieu extérieur

### 1-2 Etat d'équilibre d'un système :

On dit qu'un système est en état d'équilibre, s'il n'évolue pas dans le temps.

Exemple : Détente brusque d'un gaz



## I.3. Description d'un système

### I.3.1. Variables d'état.

L'état d'un système est décrit par des paramètres macroscopique (observable ou mesurable), appelé les variables d'état ou paramètres d'état ou fonctions d'état du système les plus utilisés sont : La Température, Pression, Le Volume, (T,P,V)...



Certaines de ces variables sont **extensives** : elles ne peuvent être mesurées que globalement sur le système, et leur valeur est proportionnelle à la quantité de matière contenue dans le système (elles sont additives)

**Exemple** : La masse, Le nombre de moles, Le volume,...

D'autres variables sont **intensives** : elles peuvent être mesurées localement (en chaque point du système) et elles sont indépendantes de la taille ou de la quantité de matière du système

**Exemple** : La température, La pression, la composition chimique

**Remarque** : le quotient de deux grandeurs extensives donne une grandeur intensive : ainsi la concentration, la masse volumique...

On définit souvent des grandeurs massiques c.à.d rapportées à l'unité de masse du système, telles :

- Le volume massique :  $v = V/m$  en  $[m^3/kg]$
- L'énergie interne ou l'enthalpie massique :  $u = U/m$  ou  $h = H/m$  en  $[J/kg]$

Ces grandeurs sont reliées entre elles par des relations, exemple :

$$\mathbf{m} = \rho \mathbf{V} \text{ ou } \mathbf{q}_m = \rho \mathbf{q}_v \text{ (pour les débits massiques et volumiques)}$$

avec  $\mathbf{q}_m = \rho \omega \mathbf{S}$  où  $\omega$  est la vitesse de l'écoulement du fluide et pour un écoulement stationnaire :

$$\rho_1 \omega_1 S_1 = \rho_2 \omega_2 S_2 \text{ (équation de continuité)}$$

### 1.3.2 Fonction d'état, équation d'état.

Toutes les variables d'état ne sont pas indépendantes les unes des autres ; elles sont reliées entre elles par des relations appelée équations d'état du système. Lorsque le système est en équilibre thermodynamique les variables d'état ( $P$ ,  $V$ ,  $T$ ) peuvent être liées entre elles par une ou plusieurs relations. On peut définir ainsi une fonction par :

$P=P(V, T)$  ou  $V=V(P, T)$  ou  $T=T(P, V)$  appelées **fonction d'état**

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme :

$$f(P, V, T) = 0$$

Appelée **Equation d'état**

**Exemple** : Un gaz parfait obéit à la loi :  $PV=nRT$  à partir de cette relation on peut écrire les fonctions d'état :

$$P(T, V) = \frac{nRT}{V} \quad V(P, T) = \frac{nRT}{P} \quad T(V, P) = \frac{PV}{nR}$$

Et l'équation d'état est exprimée par  $f(P, V, T) = PV - nRT = 0$

### I.3.2. Propriété mathématique d'une fonction d'état

✓ **Dérivées partielles**

On appelle la dérivée partielle d'une fonction d'état  $f(x,y)$  par rapport à  $x$ , la dérivée de la fonction  $f(x,y)$  par rapport à  $x$  en considérant  $y$  comme constante.

Exemple :  $f(x,y) = x^2y + \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y,z) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y,z) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = R(x,y,z)$$

- La dérivée partielle de  $f(x,y)$  par rapport à  $x$  est notée :  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy - \frac{y}{x^2}$
- La dérivée partielle de  $f(x,y)$  par rapport à  $y$  est notée :  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x^2 + \frac{1}{x}$

### ✓ Différentielle totale

La différentielle d'une fonction est son « accroissement infinitésimal », qui s'écrit comme une combinaison des accroissements infinitésimaux des différentes variables. Ainsi pour une fonction  $S$  des variables  $x$  et  $y$ , son accroissement infinitésimal  $\delta Q$  s'exprime sous la forme :

$$\delta S = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$\delta S$  est appelée une forme différentielle

$\delta S$  est une différentielle totale exacte (DTE) si la condition suivante est vérifiée :

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$$

Exemple : Pour un gaz parfait d'équation  $PV=nRT$  on peut écrire

$$P(T,V) = \frac{nRT}{V}$$

La différentielle de la fonction d'état  $P=P(V,T)$

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT = M(V,T)dV + N(V,T)dT$$

$$\text{D'où } dP = \frac{-nRT}{V^2}dV + \frac{nR}{V}dT$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_V = \frac{-nR}{V^2}$$

$$\text{Et alors on a, } \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T = \frac{-nR}{V^2}$$

Donc  $dP$  est une DTE et l'intégrale de  $dP$  entre  $P_1$  et  $P_2$  est :

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = P_2 - P_1$$

### ✓ Cas d'une fonction à 3 variables

Soient trois fonctions  $P$ ,  $Q$  et  $R$  dépendant chacune de trois variables  $x$ ,  $y$ , et  $z$ . Existe-t-il une fonction  $f$  telle que :

Si c'est le cas, on dit que la grandeur est une **différentielle totale exacte**.

On ne va pas démontrer la réponse à cette question ici, on se contente de la donner, l'expression précédente est une différentielle totale si et seulement si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z}, \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{y,x} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)_{z,x} \text{ et } \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_{z,y} = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x,y}$$

### Conséquences

Relations entre dérivées partielles de fonctions implicites

On s'intéresse au cas d'une fonction  $f$  telle que  $f(x,y,z) = 0$ . Dans ce cas, les variables  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont implicitement liées entre elles :  $x(y,z)$ ,  $y(x,z)$ ,  $z(x,y)$ . La différentielle de  $dx$  s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left( \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y dz \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left( \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \right) dz \end{aligned}$$

Or cela est valable pour tout  $dx$  et pour tout  $dz$ . Par identification on obtient les relations importantes :

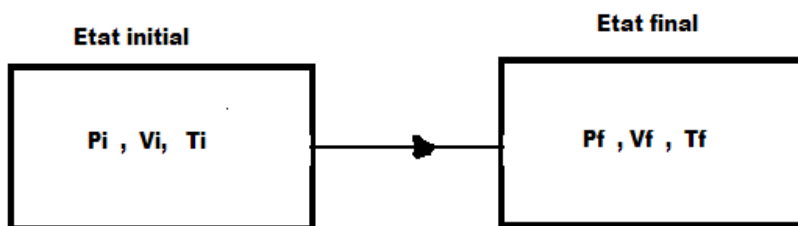
$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \text{ et } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0$$

D'où :  $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x = -1$

## I.4. Transformation d'un système

- **Notion de transformation**

On dit qu'un système subit une transformation, lorsque ses variables d'état passent d'un état d'équilibre initial à un état final.



- **Transformation quasi-statique**

C'est une transformation qui se fait par une succession d'état d'équilibres très proches les uns des autres.

Pour qu'une transformation soit quasi-statique il faut donc qu'elle soit très lente, pour que l'on puisse considérer qu'elle est constituée d'une succession d'états d'équilibres.

Dans le plan (x,y) cette transformation faisant passer un système de l'état d'équilibre A à l'état d'équilibre B, sera représentée par une suite de points dont chacun caractérise un état d'équilibre ou les variables d'état sont parfaitement déterminées

- **La réversibilité et l'irréversibilité**

La **réversibilité** et l'**irréversibilité** sont des concepts importants en physique et tout particulièrement en thermodynamique. Tout le monde a fait les expériences suivantes :

- ✓ On peut tirer sur un élastique, le déformer et, dans une certaine limite, quand on le relâche cet élastique retrouve un état semblable à son état initial.
- ✓ En revanche, Un morceau de verre se brise sur le sol et il ne se reconstitue jamais de lui-même.

La première expérience est typique d'un comportement réversible, la seconde est ce qui s'approche le plus d'une transformation irréversible. Aussi simples qu'ils puissent paraître ces deux exemples illustrent respectivement la possibilité ou l'impossibilité pour un système de retrouver spontanément et de manière exacte son état immédiatement antérieur à une modification.

- **Transformation réversible**

Si les différents états intermédiaires de la transformation quasi-statique ne sont plus très proches les uns des autres mais infiniment voisines, alors la suite des états d'équilibres devient continue de sorte que les variables d'état soient parfaitement déterminées à chaque instant de la transformation. Par conséquent la transformation du système de l'état A vers l'état B peut être représentée dans le plan (x,y) par une courbe

Pour une évolution dans le sens inverse, il sera alors possible de faire revenir le système de B vers A en le faisant repasser par ses mêmes états d'équilibre

- **Transformation irréversible**

C'est une transformation qui ne répond pas au critère précédent car les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibre

Ce genre de transformation ne peut être réversible à cause des phénomènes dissipatifs (frottement mécanique, frottement visqueux,...)

- **Transformations particulières :**

**Transformation isotherme :** transformation sans changement de température du système étudié ( $T=\text{constante}$ ).

**Transformation isochore :** transformation sans changement de volume du système étudié ( $V=\text{constante}$ ).

**Transformation isobare :** transformation sans changement de pression du système étudié ( $P=\text{constante}$ ).

**Transformation adiabatique :** transformation où il n'y a pas de transfert thermique entre le système étudié et l'extérieur. ( $\delta Q=0$ ).

**Transformation cyclique :** transformation dont l'état initial et l'état final sont identiques.

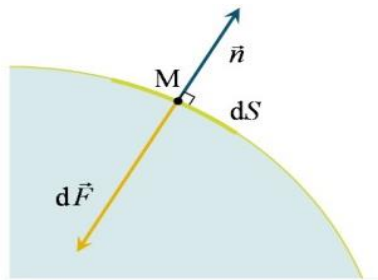
## I.5. Pression d'un fluide

### I.5.1. Définition de la pression

Lorsqu'un fluide est au repos (ou uniformément accéléré), la pression désigne la force  $\vec{dF}$  par unité de surface qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$ . On a ainsi (voir **figure 1**) :

$$\vec{dF} = -P dS \vec{n}$$

Où la pression  $P$  est une grandeur scalaire ne dépendant que des coordonnées du point  $M$  auquel la force est évaluée. Par conséquent, la pression est indépendante de l'orientation de la surface sur laquelle elle agit.



La force exercée **par le fluide sur la paroi** s'exprime alors par :

$$\vec{dF} = -P \cdot dS \vec{n}$$

Le scalaire «  $P$  » est par définition la pression qui règne sur l'élément de surface.

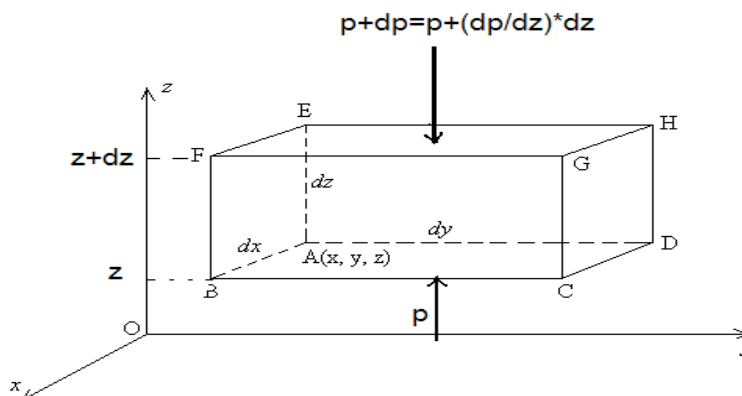
**ATTENTION !** : la pression  $p$  ne dépend pas de la surface  $dS$ , et en particulier de son orientation (ce qui n'est pas le cas de la force  $\vec{dF}$ ), mais dépend a priori de la position de cette surface au sein du fluide. C'est d'ailleurs ce qui fait l'intérêt de la pression,  $P(M)$ .

L'unité de la pression :  $N/m^2 = 1 \text{ Pascal}$

On trouve également : le bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ), l'atmosphère ( $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ), le mm de Hg ou le torr ( $1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg} = 133,3 \text{ Pa}$ ).

### I.5.2. Loi fondamentale de la statique des fluides

Considérons un élément volumique d'un fluide en équilibre lié au repère  $(x, y, z)$



- ✓ Les forces élémentaires agissant sur l'élément de volume  $dV = dx.dy.dz$  suivant  $\vec{oz}$  sont :
  - Le poids =  $dm\vec{g} = -\rho g dm\vec{k} = -\rho g dV \vec{k}$   
 Avec  $\rho$ : masse volumique du fluide  
 $dV$ : le volume élémentaire  $dx dy dz$ ,  
 $\vec{g}$ : l'accélération de la pesanteur
  - Les forces élémentaires de pression agissant sur les 2 faces de la surface élémentaire  $dx dy$  :

$$p dx dy \vec{k} \text{ et } -(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy \vec{k}.$$

- ✓ Appliquons la loi d'équilibre  $\implies$  suivant  $oz$ :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0},$$

ce qui implique

$$-\rho g dx dy dz + p dx dy - (p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy = 0$$

Donc :  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

- Les forces agissant sur les surfaces latérales ( $dx dz$ ) et ( $dy dz$ ) sont uniquement de pression, donc on a :
  - Projection suivante :  $\vec{ox} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$
  - Projection suivante :  $\vec{oy} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

On obtient ainsi les équations de la statique des fluides

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ces équations montrent que la pression varie suivant l'axe  $\vec{oz}$  et que les plans horizontaux sont des surfaces isobares.

Finalement la relation générale peut s'écrire :  $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$

### I.5.3. Applications

#### I.5.3.1. Cas des liquides

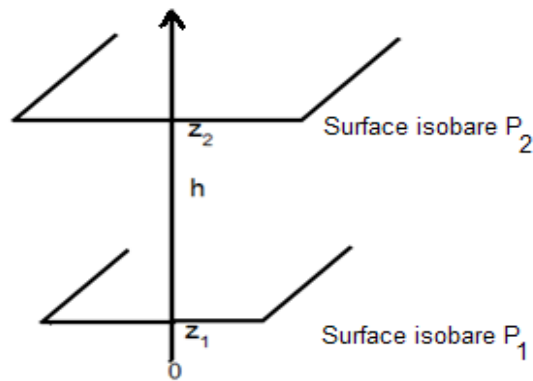
**En général pour les liquides la masse volumique est constante** ( $\rho = \text{cte}$ , on dit que le fluide est incompressible)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$p = -\rho g z + \text{cte}$$

$$P_1 = -\rho g z_1 + \text{cte}$$

$$P_2 = -\rho g z_2 + \text{cte}$$



Donc l'équation de l'hydrostatique s'écrit :  $P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1) = \rho gh$

### Exemple d'application : Pression dans les fonds marins

Considérons un groupe de plongeurs qui se promènent à une profondeur de 10 mètres. A la surface (libre) de la mer, la pression est de 1 atmosphère. L'altitude est de 0 m. Nous considérerons que la masse volumique de la mer est d'environ  $\rho_{\text{mer}} = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ .

- En un **point A** de la surface libre de la mer, on peut appliquer l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$P + \rho \cdot g \cdot z = \text{Cte}$ . On obtient ainsi, l'équation suivante :

$P_A + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot Z_A = \text{Cte}$  avec ( $P_A = 1 \text{ atm}$ ,  $Z_A = 0$ ,  $\rho_{\text{mer}} = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

- Appliquons au **point M**, cette même équation. Il vient alors :

$$P_M + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot Z_M = \text{Cte}.$$

Dans cette équation, la pression  $P_M$  est inconnue. En regroupant ces deux équations, nous obtenons alors :

$$P_A + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot Z_A = P_M + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot Z_M$$

D'où :  $P_M = P_A + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot (Z_A - Z_M)$

L'application numérique donne :

$$P_M = 0,1 \cdot 10^6 + 1000 \cdot 9,81 \cdot (0 - (-10)) = 0,198 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$P_M = 1,98 \text{ atm}$$

- Nous pouvons conclure, qu'à chaque fois que nous plongeons de 10 mètres, la pression augmente d'une atmosphère.

### 1-5-3-2 Cas des gaz

Contrairement aux liquides, les gaz sont compressibles c.à.d. que  $\rho$  est variable

Exemple : gaz parfait dont la température est constante

$$PV = nRT \text{ avec } n = \frac{m}{M}$$

D'où :

$$PV = \frac{m}{M}RT \implies PM = \frac{m}{V}RT = \rho RT \implies \rho = \frac{PM}{RT}$$

L'équation de la statique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \implies \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{PM}{RT}g$$

Or :  $dP = \frac{\partial P}{\partial z} dz$

Finalement on a :  $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz$

En supposant qu'à  $Z=0$  (au sol) ;  $P=P_0$  (Pression atmosphérique)

Calculons la pression à une hauteur  $h$  et à une profondeur  $h'$  de la surface de la terre.

- **A une hauteur  $h$**

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^h -\frac{Mg}{RT} dz \implies \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT} h \implies p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} h}$$

La pression diminue quand on monte dans l'espace

- **A une profondeur  $h'$**

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^{-h'} -\frac{Mg}{RT} dz \implies \ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg h'}{RT}$$

$$p = p_0 e^{\frac{Mg h'}{RT}}$$

La pression augmente quand on descend les profondeurs.

### 1-5-3-3 : Applications : Les baromètres

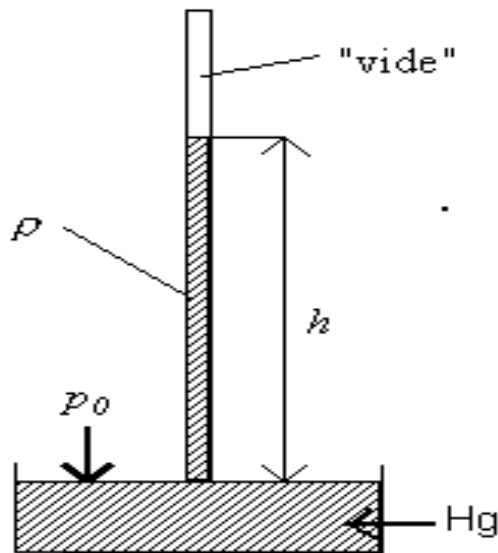
- **Définition**

Ce sont des appareils permettant la mesure absolue de la pression plus particulièrement la mesure de la pression atmosphérique.

- **Principe**

Il est fondé sur l'expérience de Torricelli (1643) qui consiste à retourner sur une cuve à mercure un tube rempli de mercure. La longueur du tube doit dépasser 760 mm. Il apparaît alors au sommet du tube retourné un espace vide appelé "chambre barométrique".





- Le baromètre à mercure : la pression atmosphérique est équilibrée par une colonne de mercure surmontée d'un espace clos et vide. Il a été inventé par Evangelista Torricelli en 1643 .

L'expérience montre que :

- Le vide est soumis à la pression  $P_{\text{vide}} = 0$
- Le mercure contenu dans le tube ne s'écoule pas à cause de soutien de la pression exercée par l'air de l'extérieur.

La loi de l'hydrostatique donne :

$$P_0 - P_{\text{vide}} = \rho_{\text{Hg}}gh \text{ avec } P_{\text{vide}} = 0; \rho_{\text{Hg}} = 13.610^3 \text{Kg/m}^3 \text{ et } g = 9.81 \text{m/s}^2$$

Sous les conditions normales de température  $\theta = 25^\circ\text{C}$ .

Le mercure s'immobilise à  $h = 760 \text{mm}$ ; on définit ainsi l'unité atmosphérique

Pression atmosphérique = 1 Atmosphère =  $1.13.10^5 \text{ Pascal} \approx 10^5 \text{Pa} = 760 \text{ mm de Hg}$

## I.6. Thermométrie

### I.6.1. Température : notion intuitive

La température traduit l'énergie d'agitation des molécules.

Augmenter la température d'un corps revient donc à augmenter l'agitation moléculaire. On peut admettre des vitesses de plus en plus grandes (sans limite supérieure) et une vitesse inférieure nulle correspondant au zéro absolu.

La **température** mesure l'agitation microscopique des molécules et atomes (vibrations, mouvement désordonnés),

**L'échelle absolue des températures** est définie à partir du kelvin. Le kelvin est la fraction de  $1/273,16$  de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

Le zéro absolu correspondrait à une absence totale d'agitation microscopique.  $T = 0 \text{ K}$

### I.6.2. Repérage de la température

A partir des variations thermiques de l'une des caractéristiques physiques d'un matériau donné (volume, résistance...), on peut construire des échelles empiriques permettant de **repérer** des températures et de constater l'égalité de deux températures.

**Attention :** une telle échelle est totalement arbitraire, puisque liée à une propriété particulière d'un corps particulier : elle ne permet donc pas de donner à la valeur de la température une signification intrinsèque et par conséquent, elle n'autorise pas sa **mesure mais son repérage**

**Remarque :**

Si l'égalité de deux températures peut être définie avec précision, rien ne nous permet actuellement de définir la somme de deux températures. Donc à ce stade, la température n'est pas une grandeur mesurable : elle est simplement repérable.

### DIFFERENTES ECHELLES DE LA TEMPERATURE

	Kelvin K	Celsius °C	Fahrenheit °F	Rankine °R
Zéro absolu	0	-273,15	-459,67	0
Équilibre eau liquide-glace à pression atmosphérique	273,15	0	32	491,67
Équilibre eau liquide-vapeur à pression atmosphérique	373,15	100	212	671,67
Point triple de l'eau	273,16	0,01	32,018	491,69

✓ Correspondance Celsius – Fahrenheit :  $T (°F) = (9/5) \theta (°C) + 32$

✓ Correspondance Celsius – Kelvin :  $T (K) = \theta (°C) + 273,15$

### I.6.3. Principe de l'équilibre thermique (**Principe 0 de la thermodynamique**)

Deux corps en équilibre thermique avec un troisième sont en équilibre entre eux. Ce principe permet de définir le concept de température.

## I.7. Phénomènes thermométriques

On détermine la température par l'intermédiaire d'un phénomène physique accompagnant les variations de température.

### Exemples :

- ✓ Dilatation d'un liquide : thermomètres à alcool, à mercure ;
- ✓ Variation d'une résistance : thermomètre à résistance, thermistance ou CTN (coefficient thermique négatif)
- ✓ Emission d'un rayonnement : pyromètres optiques

Un phénomène thermométrique est d'autant plus intéressant à utiliser qu'il est :

- ✓ Fidèle
- ✓ Ne varie qu'en fonction de la température
- ✓ Sensible
- ✓ Sa plage de mesure est maximale
- ✓ qu'à une valeur de la température correspond une seule valeur de la grandeur et réciproquement (relation biunivoque, bijection).

On appelle le coefficient thermométrique le coefficient  $k$  tel que :

$x = x_m (1 + K (\theta - \theta_m))$  ou  $x$  est la grandeur thermométrique,  $\theta$  la température et  $m$  indice de référence.

### I.7.1. Echelles de température

Pour construire une échelle de température il faut nécessairement (comme discuté avant) :

- une relation liant la température à la grandeur thermométrique  $x$

#### I.7.1.1. Echelles centésimales

Soit :

- ✓ Deux points fixes de la température :  $0^\circ\text{C}$  glace fondante  $100^\circ\text{C}$  eau bouillante
- ✓ La relation linéaire entre la température et la grandeur thermométrique  $x$  s'écrit :

$$\theta = a x + b$$

On a ;

$$\begin{aligned} \text{pour : } \theta = 0^\circ\text{C} \text{ a } x_0 + b &= 0 \\ \text{pour : } \theta = 100^\circ\text{C} \text{ a } x_{100} + b &= 100 \end{aligned}$$

Donc

$$a = \frac{100}{x_{100} - x_0} \quad b = \frac{-100x_0}{x_{100} - x_0}$$

On a alors

$$\theta = \frac{100(x - x_0)}{x_{100} - x_0}$$

Pour différentes échelles centésimales seuls  $0^\circ\text{C}$  et  $100^\circ\text{C}$  coïncident.

L'échelle Celsius est une échelle centésimale construite sur un phénomène thermométrique particulier qui est la variation de pression d'un gaz parfait à volume constant. On note le **degré Celsius**  $^\circ\text{C}$  et on leur attribue le symbole  $\theta$ .

#### I.7.1.2. L'échelle Fahrenheit

A pour points fixes :

- ✓  $32^\circ\text{F}$  glace fondante
- ✓  $212^\circ\text{F}$  eau bouillante

**Important** : les deux échelles n'ont pas de réalité physique et **ne** mesurent pas la température, elles la **repèrent** :

### I.7.1.3. Echelle absolue :

L'échelle absolue permet une **mesure de la température**. Elle a une réalité physique et traduit l'énergie d'agitation des molécules :

#### Echelle Kelvin :

Cette échelle ayant pour référence un seul point fixe : le point triple de l'eau (l'état dans lequel la glace, l'eau et la vapeur d'eau sont en équilibre). Cet état d'équilibre n'est possible qu'à la pression ( $P=4.5\text{mm de hg}$ ) et à la température définie par ( $T= 273.15\text{K}$ ).

Cette échelle considère que la limite inférieure d'agitation des molécules se situe à  $- 273,15^\circ\text{C}$  soit  $0\text{ K}$ .

On note les températures dans l'échelle **Kelvin K**, on utilise le symbole **T**  
On a la relation suivante :

$$T \text{ K(Kelvin)} = \theta \text{ }^\circ\text{C(Celsius)} + 273.15$$

Dire que **200 K est le double de 100 K** correspond ici à une **réalité physique**.

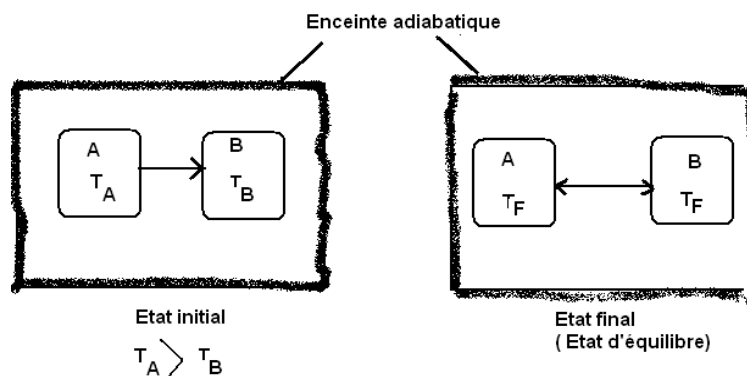
Par exemple pour un gaz parfait :

- ✓ Si on double la température absolue à pression constante on double le volume
- ✓ Si on double la température absolue à volume constant on double la pression

## I.8. Chaleur

### I.8.1. Définition

D'après le principe de l'équilibre thermique, deux corps A et B initialement à des températures différentes ( $T_A > T_B$ ) et mis en contact thermique atteignent au bout d'un certain temps l'équilibre thermique. Dans cette expérience il y a eu :



- ✓ Transfert de chaleur du corps chaud A vers le corps froid B

Si l'échange est parfait, la quantité de chaleur cédée par le corps chaud est égale à celle reçue par le corps froid : il y a conservation de la chaleur.

La température finale (d'équilibre)  $T_f$  atteinte par l'ensemble à la fin de la transformation est donnée par la relation

$$m_A c_A (T_A - T_f) = M_B c_B (T_f - T_B)$$

Où  $m_A$  et  $m_B$  sont les masses des corps A et B

$c_A$  et  $c_B$  sont les capacités calorifiques massiques.

Dans le cas général l'expression  $Q_i = m_i c_i (T_f - T_i)$  représente par définition la quantité de chaleur échangée par le corps  $m_i$  avec les autres corps en contact avec lui.

- ✓ Si  $T_f > T_i$   $Q_i > 0$  Le corps de masse  $m_i$  a **reçu** la quantité de chaleur  $Q_i$
- ✓ Si  $T_f < T_i$   $Q_i < 0$  Le corps de masse  $m_i$  a **cédé** la quantité de chaleur  $Q_i$

L'unité de la chaleur est exprimée en Joule ( SI ), Elle peut être aussi exprimée en calorie, on a  $1 \text{ cal} = 4.18 \text{ J}$

La capacité calorifique massique est exprimée en  $\text{J/Kg.K}$  ou  $\text{cal/g}^\circ\text{C}$

### I.8.2. La capacité calorifique

La capacité calorifique d'un corps de masse est donnée par la relation :  $C = m.c$  ou  $C = n.c$

$C$ : la capacité calorifique exprimé en  $\text{J/K}$  ou  $\text{cal/K}$

$c$ : la capacité calorifique massique ou molaire

### I.8.3. Capacité calorifique moyenne

On appelle capacité calorifique moyenne d'un corps passant de  $T_A$  à  $T_B$  avec un apport de la quantité de chaleur  $Q$ , la quantité :

$$C_m = \frac{Q}{T_B - T_A}$$

### I.8.4. Capacité calorifique vraie

En réalité la capacité calorifique est fonction de la température. Donc pour une transformation élémentaire faisant varier la température du système de  $\delta T$  et faisant intervenir la quantité de chaleur élémentaire  $\delta Q$ , on définit la capacité calorifique vraie par :

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

Ainsi pour une transformation effectuée à volume constant (**isochore**)

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_V : \text{Est appelée Capacité calorifique à volume constant}$$

Pour une transformation effectuée à pression constante (**isobare**)

$$C_P = \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_P : \text{Est appelée Capacité calorifique à pression constante}$$

### I.8.5. Calorimétrie

- Principe de base

Le calorimètre est un dispositif expérimental qui sert à mesurer les quantités de chaleur, les chaleurs massique et la chaleur latente. Il n'échange aucune énergie avec le milieu extérieure (ni travail, ni chaleur). Sa paroi est indéformable et adiabatique. Néanmoins il y a des transferts de chaleur entre les différentes parties du calorimètre : corps étudiés, accessoires, paroi.... Comme il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur, cela implique que la somme des chaleurs échangées  $Q_i$  au sein du calorimètre est nulle :

$$\sum Q_i = 0$$

#### **Exemple 1 : détermination de la température d'équilibre d'un mélange de corps introduits à différentes températures**

Considérons un système calorimétrique constitué de  $i$  corps définis par leur masse (La masse est une propriété fondamentale de la matière qui se manifeste à la fois par l'inertie des corps et leur interaction gravitationnelle.)  $m_i$ , leur capacité calorifique (La capacité thermique (ou capacité calorifique) d'un corps est une grandeur permettant de quantifier la possibilité qu'a un corps d'absorber ou restituer de l'énergie par échange thermique au cours d'une transformation.). La chaleur mise en jeu par chaque corps pour atteindre l'équilibre à la température  $\theta_e$ , s'il n'y a pas de changement d'état ni de réaction chimique, la chaleur est donnée par la relation :

$$Q_i = m_i c_i (\theta_e - \theta_i)$$

Appliquons la relation calorimétrique :  $\sum Q_i = 0$

On obtient :  $\sum Q_i = \sum m_i c_i (\theta_e - \theta_i) = 0$

Donc :

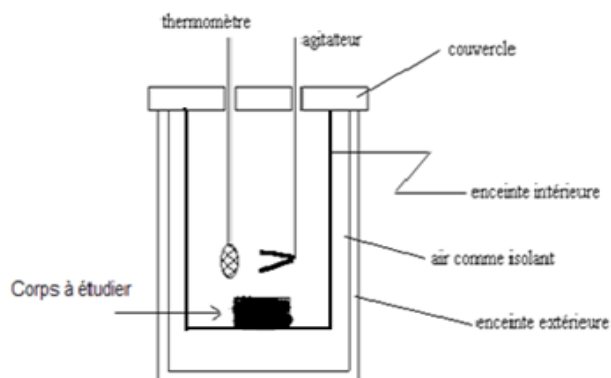
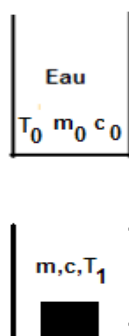
$$\theta_e = \frac{\sum m_i c_i \theta_i}{\sum m_i c_i}$$

Remarque : dans cet exemple on n'a pas tenu compte de la capacité calorifique du calorimètre.

#### **Exemple 2 : Méthode des mélanges : Calorimètre de Berthelot**

On utilise le calorimètre de Berthelot pour déterminer la chaleur massique d'un corps solide de masse  $m$ .

Etat initial



Le calorimètre est formé d'un vase calorimétrique contenant de l'eau de masse  $m_0$ , de chaleur massique  $C_0$  et de température initiale  $T_0$ , le vase est contenu dans un dispositif de manière à diminuer au mieux les échanges de chaleur avec l'extérieur.

Par ailleurs le corps de masse  $m$ , et de chaleur massique  $C$  est placé dans une étuve de manière que sa température soit  $T_1$  (on suppose que  $T_1 > T_0$ ).

Au mélange, l'ensemble (solide + eau + Vase + accessoires) prend la température d'équilibre  $T_F$ . Ainsi la quantité de chaleur cédée par le solide est captée par le calorimètre (eau + Vase + accessoires).

L'équation calorimétrique s'écrit :  $m.c (T_1 - T_F) = (m_0 + \mu) c_0 (T_F - T_0)$

$\mu$  est appelée valeur en eau, c'est une masse équivalente de point de vue calorimétrique au vase et aux accessoires (thermomètre et agitateur)

$\mu$  est exprimée en g d'eau

Donc :  $c = \frac{(m_0 + \mu) c_0 (T_F - T_0)}{m (T_1 - T_F)}$

## I.9. Le travail

Le travail est une **autre forme** de l'énergie (énergie mécanique) :

- ✓ C'est une énergie exprimée en [J] = 1 N.m ou [cal].
- ✓ A l'échelle microscopique c'est une énergie échangée de façon **ordonnée** (grâce au déplacement du piston qui imprime une certaine direction aux atomes).
- ✓ Ce **n'est pas** une fonction d'état.

### I.9.1. Travail des forces pressantes.

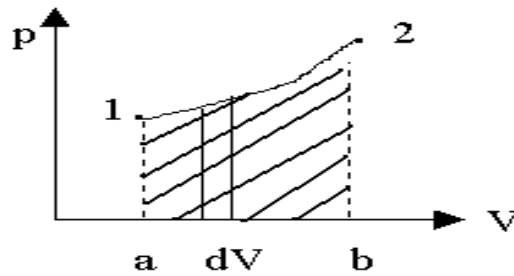
Considérons un système constitué d'un gaz enfermé dans un cylindre de longueur  $L$ , fermé par un piston de surface  $S$ , mobile selon la direction  $\vec{e}_x$ . Soit  $P_{ext}$  la pression extérieure, la force exercée par le milieu extérieur sur le gaz est la force pressante :

$$\vec{F}_{ext} = -P_{ext} S \vec{e}_x$$

Le travail élémentaire :  $\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = -P_{ext} S \vec{e}_x \cdot d\vec{l} \Rightarrow \delta W = -P dV$

Pour calculer le travail total entre l'état 1 et l'état 2, il faut intégrer la relation

$$W_{12} = - \int_1^2 p dV = \text{aire.de.a12b}$$



### I.9.2. Calcul du travail des forces pressantes dans quelques cas particuliers.

- **Transformation isochore.**

Si la transformation est isochore, le volume du système ne varie pas. Il s'agit d'un système entouré de parois rigides et indéformables. Tout au long de la transformation, on a donc  $dV = 0$ . En conséquence, pour une transformation isochore,

$$W_{\text{recu}} = 0$$

- **Transformation isobare**

Dans une transformation isobare, la pression extérieure reste constante durant toute la transformation. L'intégration de la formule devient alors triviale :

$$w = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dv = -P_{\text{ext}} \int_{V_i}^{V_f} dv$$

Pour une transformation isobare, on a donc :

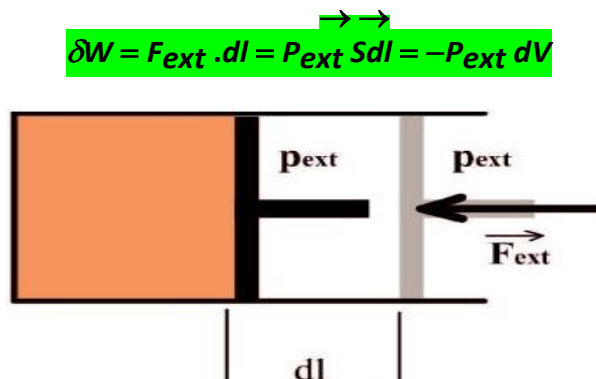
$$W_{\text{recu}} = -P_{\text{ext}} (V_f - V_i)$$

### I.9.3. Convention de signe et notation

- Le travail **reçu** par le système est **compté positivement**
- Le travail reçu par le système est noté **W**
- (Le travail reçu par le milieu extérieur est représenté par  $-W$ )

### I.9.4. Travail mécanique des forces de pression

Raisonnons à partir d'un gaz enfermé dans un cylindre surmonté d'un piston mobile. Le cylindre a une section « S » et considérons un déplacement élémentaire « dl » du piston :





$dV$  représente la variation de volume du gaz engendrée par le petit déplacement du piston, et le signe « moins » provient d'une convention de signe sur les vecteurs unitaires. Cette convention permet d'avoir l'interprétation suivante :

- si  $dV < 0$  (diminution de volume) alors  $\delta W > 0$
- si  $dV > 0$  (augmentation de volume) alors  $\delta W < 0$

Ce qui correspond bien à la convention rappelée plus haut...

En thermodynamique, par convention, on compte toujours positivement le travail reçu par le gaz ou le système considéré.

Donc :

- ✓  $W < 0$  si le volume du gaz augmente
- ✓  $W > 0$  si le volume du gaz diminue

### Remarque

Cette formule se généralise à un travail élémentaire de forces de pression quelconque :

$$\delta W = -P_{ext} dV$$

Malheureusement, cette expression n'est exploitable qu'à la condition que la pression extérieure soit connue durant toute la transformation

### I.9.5. Cas des transformations irréversibles

Dans le cas des transformations irréversibles, la pression du gaz ne peut être définie que dans l'état initial et final où le système est en équilibre thermodynamique avec le milieu extérieur et la pression extérieure est imposée au gaz.

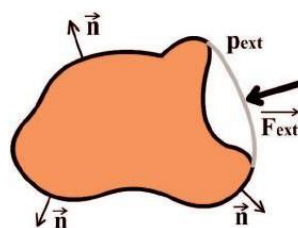
Donc pour une transformation irréversible infinitésimale

$$\delta W = -P_{ext} dV$$

Pour une transformation irréversible finie de l'état 1 à l'état 2

$$W = -P_{ext} (V_2 - V_1)$$

### I.9.6. Cas des transformations réversibles



Supposons maintenant que le système qui se déforme est un fluide et que la transformation s'effectuant d'une façon réversible. Dans ces conditions, il y a équilibre mécanique à chaque instant entre la pression externe et la pression du fluide  $P$

$$P_{ext} = P$$

Le travail reçu par le système peut alors s'exprimer en fonction des variables thermodynamiques du système

✓ Pour une variation élémentaire :

$$\delta W = -P dV$$

✓ Pour une variation fine :

$$W = -\int P dV$$

✓ Pour une variation finie à pression constante :

$$P = P_0 \text{ on a } W = -P_0(V_2 - V_1)$$

## I.9.7. Représentation géométrique du travail

### I.9.7.1. Cas des transformations non cycliques

Soit un fluide qui subit une transformation réversible A → B. Le travail reçu par le fluide est mesuré par

$$W = - \int_W P_{ext} dV$$

L'intégrale  $\int P_{ext} dV$  représente l'aire algébrique A hachurée sur la figure

$$W = -A$$

- Dans le cas de la figure 1  $V_A < V_B$  ou bien  $A > 0$  et  $W < 0$  (travail est fourni par le système)
- Dans le cas de la figure 2  $V_A > V_B$  ou bien  $A < 0$  et  $W > 0$  (travail est reçu par le système)

En conclusion, la valeur absolue du travail est donnée par l'aire A sous la courbe P(V) (diagramme de CLAPEYRON) décrite par la transformation du système, le signe étant donné par le sens de l'évolution

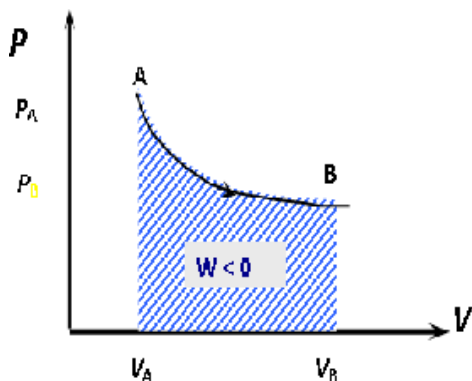


Figure 1

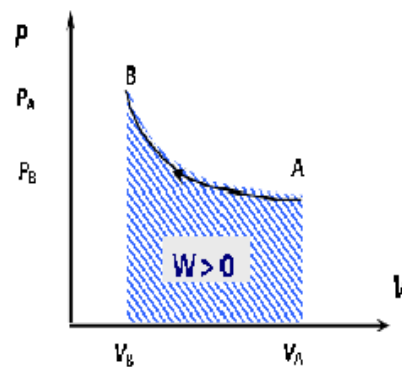
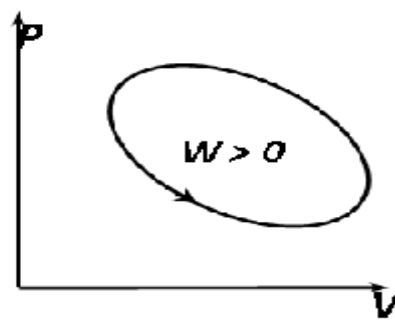
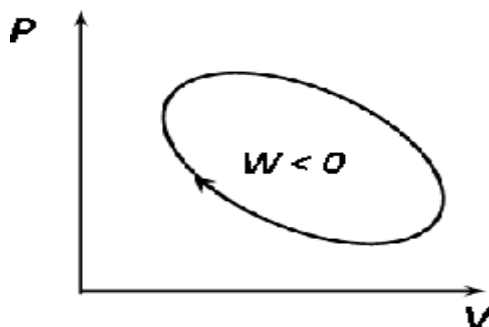


Figure 2

### I.9.7.2. Cas des transformations cycliques



Pour une transformation réversible cyclique c'est à dire une transformation pour laquelle l'état final coïncide avec l'état initial, la courbe de transformation est une courbe fermée. Le travail reçu par le système est :

$$W = -A_{\text{Cycle}}$$

Où  $A_{\text{Cycle}}$  représente l'aire algébrique du cycle

En conclusion, dans le cas d'un cycle, la courbe est fermée et *le travail est donné par l'aire intérieure à la courbe, son signe étant donné par le sens de parcours.*

- ✓ Si ce travail est **négatif**, il s'agit d'un **moteur** (cycle décrit dans le sens des aiguilles d'une montre)
- ✓ Si le travail est **positif**, il s'agit d'un cycle **récepteur** (cycle décrit dans le sens contraire des aiguilles d'une montre).

# Chapitre II : Premier principe de la thermodynamique

## II.1. Introduction

La thermodynamique traite de l'énergie et ses transformations. Les principes de la thermodynamique expriment les restrictions imposées à de telles transformations. Ces principes reposent sur les concepts d'ENERGIE et d'ENTROPIE.

## II.2. Premier principe

### II.2.1. Enoncé du premier principe

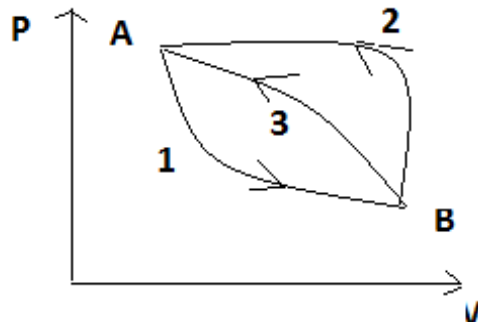
Lorsqu'un système thermodynamique subit une transformation le faisant passer d'un état d'équilibre A à un état d'équilibre B. La somme du travail W et la quantité de chaleur Q échangées avec le milieu extérieur est la même quel que soit le chemin suivi par cette transformation et ne dépend que de l'état initial A et de l'état final B.

### II.2.2. Energie interne

Le premier principe stipule que la quantité de l'énergie échangée entre A et B sous forme de travail et de chaleur est égale à la variation de l'énergie interne du système  $\Delta U$  :

$$\Delta U = U_B - U_A = W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B}$$

Par Exemple, si on considère 3 chemins différents pour aller de A vers B



D'après le 1<sup>er</sup> principe :  $\Delta U = U_B - U_A = W_2 + Q_2 = W_3 + Q_3 = - (W_1 + Q_1)$

### II.2.3. L'expression du 1<sup>er</sup> principe est général quel que soit la nature de la transformation (réversible ou irréversible)

- La fonction énergie interne possède les propriétés suivantes :
- C'est fonction d'état
- C'est une quantité extensive
- L'unité dans le système international est le Joule

## II.2.4. Transformation élémentaire

Pour le cas d'une transformation élémentaire, le 1<sup>er</sup> principe est exprimé par la relation :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

$\delta W$  et  $\delta Q$  ne sont pas des différentielle totale exacte alors que  $dU$  est une DTE

## II.2.5. Cas d'une transformation adiabatique

- ✓ Une **transformation adiabatique** : s'effectuant sans transfert de chaleur.
- ✓ Une telle transformation est réalisée à l'aide de parois **adiabatiques**

Dans ce cas précis, l'application du 1<sup>er</sup> principe permet d'écrire :

$$dU = \delta W$$

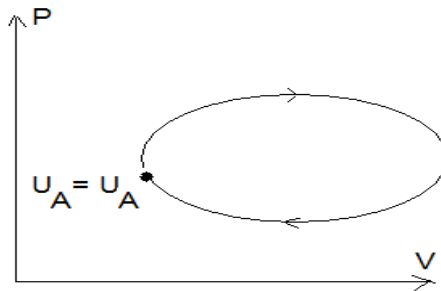
**Le travail peut donc être calculé si l'énergie interne est connue**

## II.2.6. Transformation isochore

Dans la transformation à volume constant nous avons vu que les forces pressantes extérieures n'interviennent pas : la quantité de chaleur reçue dans une telle transformation est donc égale à :

$$dU = \delta Q_v$$

Résultat d'une importance essentielle en thermodynamique, puisque la mesure d'une quantité de chaleur donne alors une détermination de la fonction énergie interne  $U(T, V)$ .



## II.2.7. Transformation cyclique

Pour une transformation cyclique, l'état initial coïncide avec l'état final  $U_A = U_B$  par conséquent :

$$\Delta U = (Q + W) = 0$$

Cette relation traduit le principe d'équivalence entre le travail et la chaleur

$$|W| = |Q|$$

## II.3. Expression de $dU$ en fonction des variables d'état (P, V, T)

L'état d'équilibre d'un système est caractérisé par l'équation d'état  $f(P, V, T) = 0$ , les couples de variables pouvant être formés sont (T,P) ; (T,V) et (P,V). Etant donné que l'énergie interne  $U$  est une fonction d'état, elle peut être exprimée sous forme :  $U(T,P)$  ;  $U(T,V)$  ;  $U(P,V)$  d'où :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P dV
\end{aligned}$$

### II.3.1. Les coefficients calorimétriques

#### II.3.1.1. Définition

Considérons une transformation élémentaire réversible et exprimons la variation de la quantité de chaleur  $\delta Q$  en fonction des couples des variables indépendantes (T,P) ; (T,V) ; (P,V).

D'après le 1<sup>er</sup> principe on a :

$$\delta Q = dU - \delta W$$

Or pour une transformation réversible  $\delta W = -PdV$

d'où :  $\delta Q = dU + PdV$

Exprimons dU en fonction du couple (T,V) :

Alors,

$$\begin{aligned}
dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \\
\delta Q &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right) dV
\end{aligned}$$

De même on sait qu'à volume constant (dV=0) on a

$$dU = \delta Q \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = C_V$$

En posant :  $l = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P$

Finalement on a :  $\delta Q = C_V dT + l dV$

En prenant les couples de variables indépendantes (T,P) et (P,V) on obtiendrait pour  $\delta Q$  des expressions analogues

D'où pour  $\delta Q$  trois expressions équivalentes :

- ✓ Pour (T,V) on a  $\delta Q = C_V dT + l dV$
- ✓ Pour (T,P) on a  $\delta Q = C_P dT + h dP$
- ✓ Pour (P,V) on a  $\delta Q = \lambda dT + \mu dV$

Les 6 coefficients  $C_V, C_P, l, h, \lambda, \mu$  sont des coefficients calorimétriques

#### II.3.1.2. Relation entre les coefficients calorimétrique

A partir de l'écriture de  $\delta Q$  on peut déterminer une relation entre les coefficients calorimétrique

$$\delta Q = C_V dT + l dV \quad (1)$$

$$\delta Q = C_P dT + h dP \quad (2)$$

$$\delta Q = \lambda dP + \mu dV \quad (3)$$

et comme  $T=T(P,V)$  est une fonction d'état on a :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \quad (4)$$

On remplace (4) dans (1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta Q &= C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + l dV \\ \Rightarrow \delta Q &= C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left[ C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + l \right] dV \end{aligned} \quad (1')$$

De même on remplace (4) dans (2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta Q &= C_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + h dP \\ \Rightarrow \delta Q &= \left[ C_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + h \right] dP + C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \end{aligned} \quad (2')$$

Par identification entre (1') = (3) et (2') = (3)

c.à.d

$$C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left[ C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + l \right] dV = \lambda dP + \mu dV$$

et

$$\left[ C_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + h \right] dP + C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV = \lambda dP + \mu dV$$

Donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &= C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \quad \mu = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \\ l &= (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \quad h = (C_V - C_P) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \end{aligned}$$

- ✓ Les 6 coefficients ne sont pas indépendants ; on peut les calculer à partir des mesures expérimentales de  $C_V$  et  $C_P$  ainsi que l'équation d'état  $f(P,V,T) = 0$

### II.3.2. Les coefficients Calorimétriques pour un gaz parfait

Pour n moles d'un gaz parfait, on a :

$$PV = nRT, \quad \Rightarrow \quad P = nRT/V, \quad \Rightarrow \quad V = nRT/P \quad \Rightarrow \quad T = PV/nR$$

$$C_V = \frac{dU}{dT} \quad \text{et} \quad C_P = \frac{dH}{dT}$$

Donc :

$$\begin{aligned} l &= (C_V - C_P) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = (C_V - C_P) \frac{P}{nR} \\ h &= (C_V - C_P) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_P = (C_V - C_P) \frac{V}{nR} \\ \lambda &= C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = C_V \frac{V}{nR} \\ \mu &= C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = C_P \frac{P}{nR} \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation de Robert Mayer :  $C_P - C_V = nR$

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{dU}{dT}, \quad C_P = \frac{dH}{dT} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \\ l &= P \\ h &= -V \\ \lambda &= C_V \frac{V}{nR} \\ \mu &= C_P \frac{P}{nR} \end{aligned}$$

- ✓ Cas d'un gaz parfait monoatomique :

Nous avons vu que l'énergie interne pour n moles de gaz parfait monoatomique est  $U = \frac{3}{2}nRT$  quant à l'enthalpie  $H = \frac{5}{2}nRT$

$$C_V = \frac{3}{2}nR, C_P = \frac{5}{2}nR \text{ et } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$$

$$l = P$$

$$h = -V$$

$$\lambda = \frac{3}{2}V$$

$$\mu = \frac{5}{2}P$$

✓ **Cas d'un gaz parfait diatomique :**

✓ Nous avons vu que l'énergie interne pour n moles de gaz parfait monoatomique est  $U = \frac{5}{2}nRT$  quant à l'enthalpie  $H = \frac{7}{2}nRT$

$$C_V = \frac{5}{2}nR, C_P = \frac{7}{2}nR \text{ et } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5}$$

$$l = P$$

$$h = -V$$

$$\lambda = \frac{5}{2}V$$

$$\mu = \frac{7}{2}P$$

## II.4. La fonction enthalpie : H

### II.4.1. Définition

L'**enthalpie** (du préfixe *en-* et du grec *thalpein* : «chauffer») est une fonction d'état extensive.

Cette nouvelle fonction est définie par la relation :  $H = U + PV$

### II.4.2. Transformation à pression constante (isobare)

Soit une transformation réversible isobare, faisant passer le système d'un état initial A à l'état final B ( $P_A = P_B = P$ ) on a :

$$\Delta U = W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B}$$

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = -P(V_B - V_A)$$

Donc :

$$Q_{A \rightarrow B} = U_B - U_A + P_B V_B - P_A V_A = (U_B + P_B V_B) - (U_A + P_A V_A)$$

Finalement on a :

$$Q_{A \rightarrow B} = Q_P = H_B - H_A$$

Pour une transformation à pression constante, la quantité des chaleurs  $Q_P$  échangée avec le milieu extérieur est égale à la variation de l'enthalpie entre l'état A et l'état B

### II.4.3. Transformation à volume constant (isochore)

Soit transformation passant de l'état initial A à l'état final B, S'effectuant à volume constant tel que :



$$V_A = V_B = V$$

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

et

$$\Delta U = U_B - U_A = Q_V$$

Pour une transformation s'effectuant à volume constant, la quantité de chaleur  $Q_V$  échangée avec le milieu extérieur est égale à la variation de l'énergie interne du système.

#### II.4.4. Transformation élémentaire

On a :  $H = U + PV$

D'où :

$$dH = dU + PdV + VdP$$

$$dH = \delta Q - PdV + PdV + VdP$$

$$dH = \delta Q + VdP$$

Si la pression est constante on a :

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

Ceci peut être trouvé par :

$$dH = C_p dT + h dP + V dP$$

$$= C_p dT + (1 + V) dP$$

### II.5. Application du 1<sup>er</sup> principe aux gaz parfaits

#### II.5.1. Description d'un gaz parfait

##### II.5.1.1. Loi de Boyle-Mariotte

L'étude expérimentale des gaz parfait à température constante, montre que le produit de la pression  $p$  par le volume  $V$  :  $pV$  est constant (lorsque la pression est faible.)

##### II.5.1.2. Loi de Gay-Lussac et de Charles

Ils étudient expérimentalement la dilatation  $\alpha$  la compression  $\beta$  des gaz à différentes températures

$$V = V_0(1 + \alpha_0 \theta) \text{ à } P = \text{Cte}$$

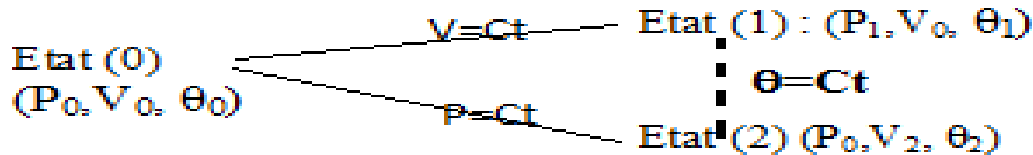
$P_0$  et  $V_0$  sont la pression et le volume à  $0^\circ\text{C}$

$$P = P_0(1 + \beta_0 \theta) \text{ à } V = \text{Cte}$$

### II.5.1.3. Equation d'état du G.P

Soit un gaz parfait qui subit les transformations suivantes

Appliquons les lois de Gay- Lussac et de Charles à l'état (1) et (2)



$$P_1 = P_0(1 + \beta_0 \theta_1)$$

$$V_2 = V_0(1 + \alpha_0 \theta_2)$$

Imaginons que le gaz passe de l'état (1) à (2) à  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$P_1 V_0 = P_0 V_2 = P_0 V_0(1 + \beta_0 \theta) = P_0 V_0(1 + \alpha_0 \theta)$$

$\beta_0 = \alpha_0 = \frac{1}{273.15}$  (données expérimentales par Charles pour tous les gaz parfait)

✓ Si on considère un état quelconque (P,V,T), on peut écrire

$$PV = P_1 V_0 = P_0 V_2 = P_0 V_0(1 + \beta_0 \theta)$$

Or,  $T = \theta + 273.15 = \theta + \frac{1}{\beta_0} \implies \beta_0 T = \beta_0 \theta + 1$

Donc  $PV = P_0 V_0 \beta_0 T$

On pose  $P_0 V_0 \beta_0 = R$

R est déterminé à partir de la loi d'Avogadro :

✓ Une mole de tous les gaz pris dans les mêmes conditions de pression et de température occupe le même volume

1mole de gaz soumis à  $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  ;  $T_0 = 273.15 \text{ K}$  occupe le volume  $V_0 = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

d'où :  $R = 8.314 \text{ J/Kmole}$

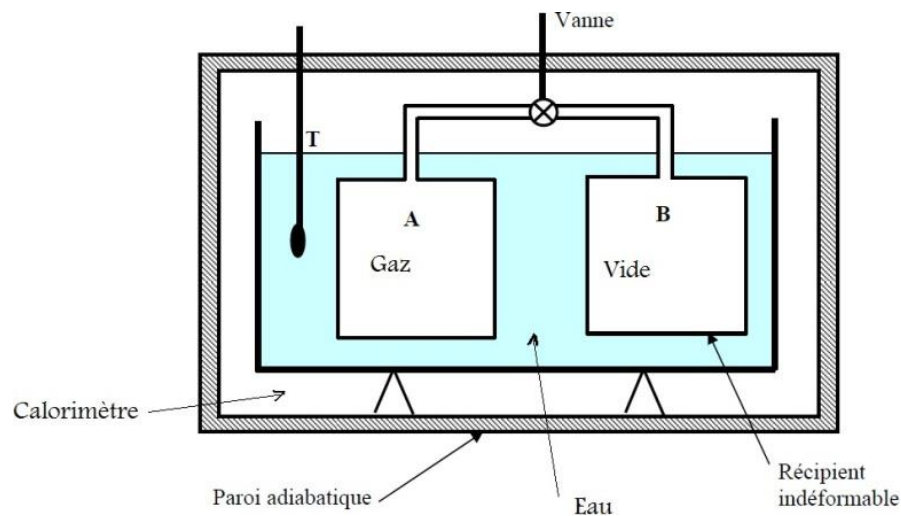
**Conclusion** : Le gaz parfait est un gaz idéal obéissant aux lois de Mariotte, Gay –Lussac et Charles et dont l'équation d'état est

$$PV - nRT = 0$$

### II.5.2. La 1<sup>ère</sup> loi de Joule

#### Expérience : Détente de Joule

On considère deux récipients rigides A et B reliés par un tuyau muni d'un robinet ; l'ensemble est isolé thermiquement de l'extérieur. Initialement A contient un gaz, B est vide lorsqu'on ouvre le robinet le gaz se répartit dans les 2 récipients. On constate que sa température n'a pas varié.



- ✓ Le gaz n'a pas fourni de travail  $W$  au milieu extérieur (les parois sont rigides)
- ✓ Le gaz n'échange pas de chaleur avec l'extérieur (il est isolé thermiquement) ;  $Q = 0$

D'après le 1<sup>er</sup> principe :

$$\Delta U = Q + W = 0$$

Donc la détente du gaz se fait à énergie interne constante ( $U = \text{cte}$ ).

Exprimons le cas où  $U = U(V, T)$

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = 0$$

A partir de l'expérience

$$dT = 0 \implies \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$$

$U$  ne peut dépendre du volume par conséquent l'énergie interne dépend uniquement de la température

D'où :

$$U = f(T) \quad \text{1<sup>ère</sup> loi de Joule}$$

### Conséquence :

Nous savons que :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

$$dU = C_v dT + l dV - p dV$$

$$dU = C_v dT + (l - p) dV$$

Or,

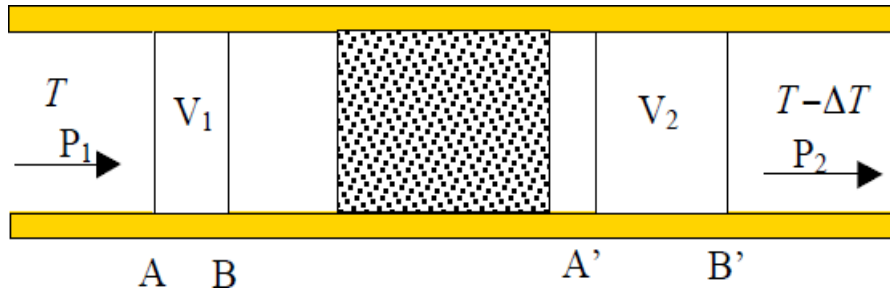
$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = C_v dT + (l - p) dV$$

$$\Rightarrow 1-P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \Rightarrow 1 = P$$

Et  $dU = C_v dT$

### II.5.3. 2<sup>ème</sup> loi de Joule

#### Expérience : Détente de Joule-Thomson



Supposons la détente d'un gaz non plus à vide, mais à travers un dispositif abaissant la pression du gaz au cours de l'écoulement. Considérons un cylindre thermiquement isolé et équipé de deux pistons aux extrémités adiabatiques séparés par une paroi poreuse (couche de coton) qui délimitera les états 1 et 2.

On constate que la température du gaz ne change pas au cours de l'expérience et que la transformation est irréversible.

*Interprétation :*

La détente de Joule- Thomson s'effectue :

- ✓ à température constante
- ✓ Sans échange de chaleur avec le milieu extérieur ( $Q=0$ )

D'après le premier principe la variation de l'énergie interne entre l'état initial et l'état final est :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W_{Total} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C}$$

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P_1 dV = - \int_{V_A}^0 P_1 dV = P_1 V_1$$

$$W_{B \rightarrow C} = - \int_{V_B}^{V_C} P_2 dV = - \int_0^{V_2} P_2 dV = -P_2 V_2$$

$$\Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2$$

$$\Rightarrow U_2 + P_2 V_2 = U_1 + P_1 V_1 \Rightarrow H_1 = H_2$$

La détente de joule –Thomson s'effectue à enthalpie constante ( $H=Cte$ ). On dit que la détente est isenthalpique.

H est une fonction d'état, en particulier on peut l'exprimer par  $H = H(T, P)$ .

D'où

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP = 0$$

Par l'expérience  $dT=0 \implies \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = 0$

H ne dépend pas de la pression, par conséquent elle ne dépend que de la température :

$H=f(T)$  c'est la 2<sup>ème</sup> loi de Joule.

### II.5.4. Conséquences

On a :

$$dH = \delta Q + VdP = C_p dT + h dP + VdP \\ = C_p dT + (h+P)dP$$

De même

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

Par identification on a :

$$h = -V \text{ et } dH = C_p dT$$

#### II.5.4.1. Définition d'un gaz parfait

Par définition, un gaz parfait satisfait les relations suivantes :

$U=f(T)$  la 1<sup>ère</sup> loi de joule

$H=f(T)$  la 2<sup>ème</sup> loi de joule

#### II.5.4.2. Relation de R.MAYER

Nous avons déjà établi par définition que :

$$H = U + PV$$

Pour le cas d'un gaz parfait :  $PV = nRT$

D'où :

$$H = U + nRT$$

D'après les deux lois de joule, les trois termes figurant par la relation ne dépendent que de la température par conséquent.

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} = nR \text{ d'où } C_p = C_v + nR$$

Donc  $C_p - C_v = nR$  c'est la relation de **Mayer** pour n moles

#### Remarques

- ✓ La différence  $(C_p - C_v)$  est une constante positive
- ✓ Vu que R est positive alors  $C_p > C_v$
- ✓ Si on introduit le coefficient  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  ( $\gamma > 1$ )

Avec  $C_p - C_v = nR = \gamma C_v - C_v = C_v (\gamma - 1) = nR$

On obtient :

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

et

$$C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

$\gamma$  est un coefficient qui dépend de l'atomicité du gaz

Par exemple

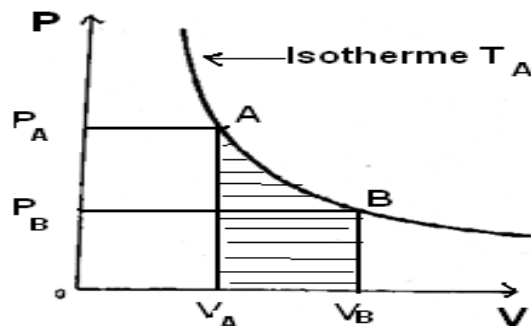
- pour un gaz **mono**atomique :  $\gamma = 5/3$
- Pour un gaz **di**atomique :  $\gamma = 7/5$

## II.5.5. Transformations d'un gaz parfait

### II.5.5.1. Transformation réversible isotherme.

- ✓ Considérons la transformation isotherme d'un gaz parfait passant de l'état A( $P_A, T_A, V_A$ ) vers l'état final B( $P_B, T_B=T_A, V_B$ )

Calculons le travail mis en jeu entre A et B



$$w_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P_{ext} dv \quad \text{Puisque la transformation est réversible on a } P_{ext} = P_{gaz} = P$$

Et comme la transformation du gaz parfait est isotherme on a :

$$PV = \text{Cte} \implies P_A V_A = P_B V_B = nRT_A$$

d'où :

$$P = \frac{nRT_A}{V}$$

Alors,

$$w_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} nRT_A \frac{dv}{v} = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

On peut écrire :

$$w_{A \rightarrow B} = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -P_A V_A \ln \frac{P_A}{P_B}$$

La variation de l'énergie interne entre A et B est :

$$\Delta U = U_B - U_A = w_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B}$$

D'après la 1<sup>ère</sup> loi de joule, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température. Par conséquent pour une transformation isotherme  $U(T_A) = U(T_B)$  d'où  $\Delta U = 0$

Finalement :

$$Q_{A \rightarrow B} = -w_{A \rightarrow B} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

### II.5.5.2. Transformation réversible adiabatique

- **Equations de Laplace**

Pour une transformation élémentaire adiabatique, nous avons  $\delta Q = 0$

D'où

$$\delta Q = C_v dT + P dV = 0 \quad (1)$$

$$\delta Q = C_p dT - V dP = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dT = -\frac{P}{C_v} dV \\ dT = +\frac{V}{C_p} dP \end{cases} \Rightarrow -\frac{P}{C_v} dV = \frac{V}{C_p} dP$$

En pose  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

On obtient :  $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$

L'intégration de cette équation donne :

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{Cte} \Rightarrow \ln P + \ln V^\gamma = \ln K \Rightarrow \ln PV^\gamma = \ln K$$

Finalement on a  $PV^\gamma = K$  c'est l'équation de Laplace

- **Autres expressions de l'équation de Laplace**

En fonction des variables (P,T) et (V,T)

De l'équation des gaz parfait  $PV = nRT$  et de l'équation de Laplace  $PV^\gamma = K$  on obtient

$$P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = K'$$

et

$$TV^{\gamma-1} = K''$$

- **Travail mis en jeu au cours d'une transformation adiabatique.**

Soit la transformation réversible et adiabatique d'un gaz parfait de l'état initial A( $P_A$ ,  $T_A$ ,  $V_A$ ) à l'état final B( $P_B$ ,  $T_B$ ,  $V_B$ ).

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV$$

L'équation de Laplace  $PV^\gamma = K \Rightarrow P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma = K$

D'où  $P = \frac{K}{V^\gamma}$

$$w_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{K}{V^\gamma} dV = - \int_{V_A}^{V_B} K v^{-\gamma} dV = -K \left[ \frac{v^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_{V_A}^{V_B}$$

$$w_{A \rightarrow B} = -\frac{K}{-\gamma+1} \left[ \frac{1}{v^{\gamma-1}} \right]_{V_A}^{V_B} = \frac{K}{\gamma-1} \left[ \frac{1}{V_B^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_A^{\gamma-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-1} \left[ \frac{K}{V_B^{\gamma-1}} - \frac{K}{V_A^{\gamma-1}} \right] = \frac{1}{\gamma-1} \left[ \frac{P_B V_B^\gamma}{V_B^{\gamma-1}} - \frac{P_A V_A^\gamma}{V_A^{\gamma-1}} \right]$$

$$w_{A \rightarrow B} = \frac{1}{\gamma-1} [P_B V_B - P_A V_A]$$

D'une autre manière comme  $P_B V_B = nRT_B$  et  $P_A V_A = nRT_A$

Alors

$$w_{A \rightarrow B} = \frac{nR}{\gamma-1} [T_B - T_A] = C_V (T_B - T_A)$$

- Comparaison entre les pentes des courbes de l'adiabatique et de l'isotherme.

A partir des équations de l'isotherme ( $PV = cte$ ) et de l'adiabatique ( $PV^\gamma = cte$ ) on déduit les pentes correspondantes :

$$d(PV) = 0 \dots > PdV + VdP = 0$$

$$d(PV^\gamma) = 0 \dots > \gamma PV^{\gamma-1} dV + V^\gamma dP = 0$$

La pente de l'**isotherme** est :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{P}{V}$$

La pente de l'**adiabatique** est :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_Q = -\gamma \frac{P}{V}$$

Vu que  $\gamma > 0$  on déduit que

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_Q > \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$



# Chapitre III : Le 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique (Principe de Carnot)

## III.1. Introduction

Le 1<sup>er</sup> principe stipule la conservation de l'énergie c'est-à-dire l'existence d'une équivalence entre le travail et la chaleur mais ne prévoit pas le sens d'évolution de ces phénomènes.

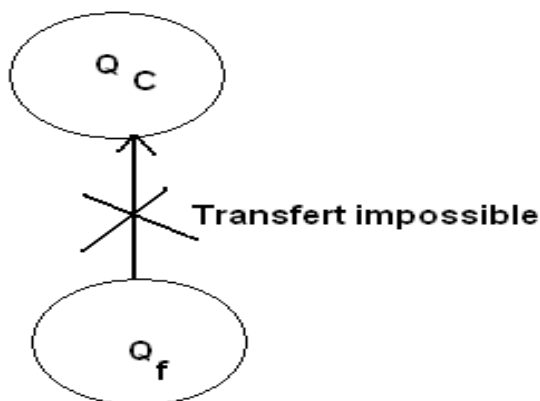
Le 1<sup>er</sup> principe n'explique pas pourquoi les transformations irréversibles se produisent toujours dans un sens bien déterminé.

Par exemple : Le transfert de la chaleur d'un corps chaud vers un corps froid et non l'inverse.

Il faut donc introduire un 2<sup>ème</sup> principe dit aussi **principe d'évolution** déduit des faits expérimentaux, qui permettra de prévoir le sens d'évolution d'un système. Le 2<sup>ème</sup> principe introduit donc une nouvelle fonction d'état dite Entropie notée  $S$ .

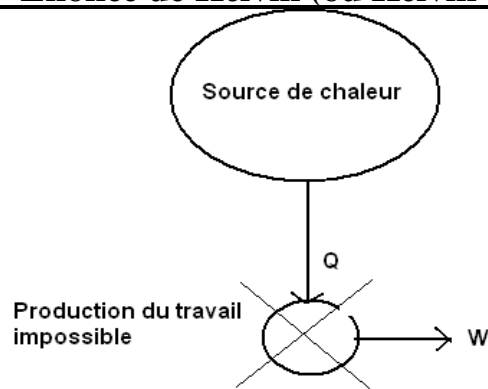
## III.2. Enoncés du second principe

### a-Enoncé de Clausius :



Une quantité de chaleur ne peut jamais être transférée spontanément d'une source froide  $Q_f$  vers une source chaude  $Q_c$

### b- Enoncé de Kelvin (ou Kelvin-Thomson-Planck)



Il est impossible de prélever une quantité de chaleur  $Q$  d'une seule source d'énergie et de la transformer intégralement en travail  $W$

Cet énoncé impose à toute machine thermique de fonctionner au minimum entre 2 sources de chaleur, il faut disposer d'une différence de température pour convertir de la chaleur en travail mécanique

**Remarque :**

Le second principe comme le premier principe est suggéré par l'expérience.

Si au cours d'une transformation un système est en contact avec une seule source de chaleur on dit que cette transformation est monotherme, avec 2 sources de chaleur elle ditherme, avec plusieurs sources de chaleur elle polytherme.

### **III.3. Transformation cyclique monotherme**

#### **III.3.1. Cycle monotherme irréversible**

L'énoncé de Thomson implique que  $W \geq 0$  et  $Q \leq 0$  puisque  $(\Delta U = 0 = W + Q)$

Le système a fourni de la chaleur à la source.

#### **III.3.2. Cycle monotherme réversible**

Les transformations étant réversibles, on peut envisager de décrire dans un sens 1 et dans le sens 2 en passant par les mêmes états d'équilibre ce qui entraîne :  $W_1 = -W_2$

Or nous savons que  $W_1$  et  $W_2 \geq 0$

Ces trois propositions simultanément vérifiées implique :

$$W_1 = -W_2 = 0 \text{ et } Q_1 = -Q_2 = 0$$

### **III.4. Transformation cyclique ditherme réversible**

Un cycle est dit ditherme lorsque le système se trouve en contact avec 2 sources de chaleur : une source chaude  $S_2$  à la température  $T_2$  et une source froide  $S_1$  à la température  $T_1$  ( $T_2 > T_1$ )

Lorsqu'un tel système est réversible et comporte 2 adiabatiques et 2 isothermes, ce cycle est appelé **cycle de Carnot**

#### **III.4.1. Machine moteur ditherme**

Le moteur thermique est une machine ditherme réversible possédant un agent de transformation qui est un fluide, très souvent assimilé à un gaz parfait. Le rôle du moteur est de fournir du travail au milieu extérieur. Soit un moteur thermique fonctionnant suivant le cycle de Carnot

**Transformation A → B**

On retire l'écran  $E_1$ , le gaz étant à l'état A ( $P_A, V_A, T_2$ ) subit une détente isotherme jusqu'à l'état B ( $P_B, V_B, T_2$ ).

Au cours de cette transformation, nous avons :  $\Delta U_{AB} = C_v \Delta T = 0$

Le travail mis en jeu

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} P dv = -nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Comme  $V_B > V_A \rightarrow W_{A \rightarrow B} < 0$  : le système fournit du W

D'où :  $Q_{AB} = -W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$  avec  $Q_{AB} = Q_2 > 0$

Le système reçoit de la chaleur de  $S_2$

### **Transformation B→C**

On remet l'écran  $E_1$ , le gaz à l'état B( $P_B, V_B, T_2$ ) est isolé thermiquement subit alors une détente adiabatique jusqu'à l'état C( $P_C, V_C, T_1$ )

Au cours de cette transformation, il n'y a pas d'échange de chaleur

$$Q_{BC} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta U_{BC} = W_{BC} = C_v(T_1 - T_2)$$

Nous avons aussi :  $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

### **Transformation C→D**

On retire l'écran  $E_2$ , le gaz est à l'état C( $P_C, V_C, T_1$ ), on le comprime à température constante jusqu'à l'état D ( $P_D, V_D, T_1$ )

$$\Delta U_{CD} = C_v \Delta T = 0 \quad \text{et} \quad W_{C \rightarrow D} = - \int_{V_C}^{V_D} P dv = -nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Vu que  $V_D < V_C \rightarrow W_{C \rightarrow D} > 0$  le système reçoit du travail

D'où  $Q_{CD} = -W_{CD} < 0$  le système cède de la chaleur

### **Transformation D→A**

On remet l'écran  $E_2$  et on comprime le gaz de manière adiabatique à le ramener à l'état initial A

$$Q_{DA} = 0; \quad \text{et} \quad \Delta U_{DA} = W_{DA} = C_v(T_2 - T_1)$$

$$P_D V_D^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

Au cours du cycle réversible, le 1<sup>er</sup> principe s'écrit :

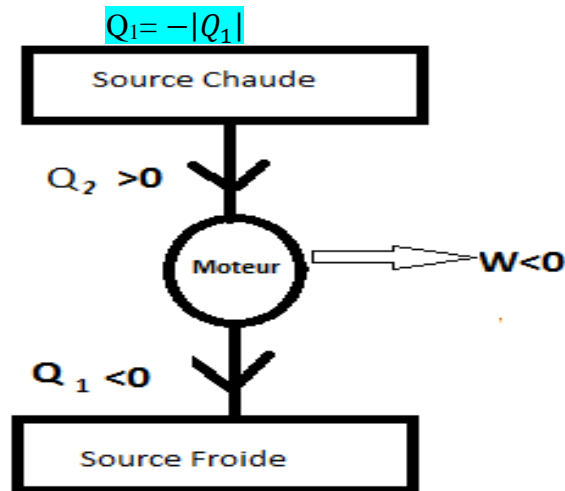
$$\text{Et} \quad \Delta U_{\text{Cycle}} = (W + Q)_{\text{Cycle}} = W + Q_1 + Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad W = -(Q_1 + Q_2)$$

Comme un moteur est une machine fournissant du travail au milieu extérieur on a :

$$W < 0 \quad \rightarrow \quad (Q_1 + Q_2) > 0$$

Avec  $Q_2 > |Q_1|$  et comme  $Q_2 > 0$  et  $Q_1 < 0$

$Q_1$  pouvant s'écrire :



## Conclusion

Pour qu'un moteur thermique puisse fournir du travail au milieu extérieur, il doit nécessairement emprunter de la chaleur ( $Q_2 > 0$ ) à la source chaude et restituer obligatoirement une quantité de chaleur ( $Q_1 < 0$ ) à la source froide

### III.4.2. Egalite de Clausius

D'après le cycle de Carnot

$$Q_{AB} = Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} \quad \text{et} \quad Q_{CD} = Q_1 = -nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Pour les Transformations adiabatiques  $B \rightarrow C$  et  $D \rightarrow A$

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \quad \text{Et} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

D'où :  $\Rightarrow Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$  et  $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$  **Egalité de Clausius**

$$Q_1 = -nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

### III.4.3. Rendement d'un moteur thermique

Le rendement d'un moteur thermique est défini comme le rapport du travail mécanique fournit par le système à la quantité de chaleur empruntée à la source chaude :

$$\eta = \frac{-W}{Q_2}$$

D'après le premier principe

$$\Delta U_{\text{Cycle}} = (W+Q)_{\text{Cycle}} = W+Q_1+Q_2 \implies W = -(Q_1+Q_2)$$

$$\eta = \frac{Q_1+Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$$

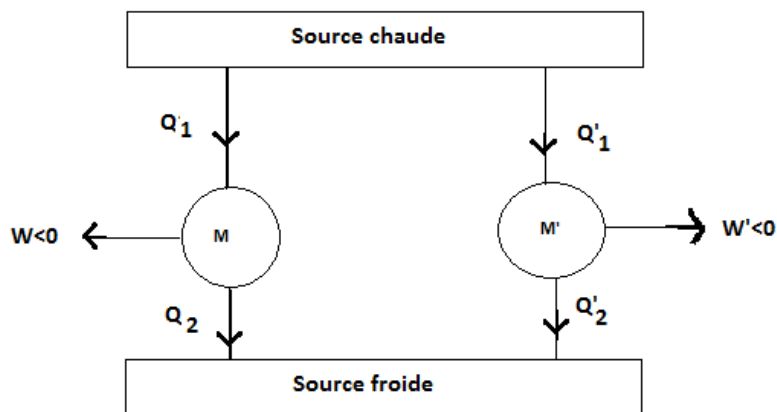
D'après l'égalité de Clausius  $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0 \implies \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2}$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{avec} \quad 0 < \eta < 1$$

Cette relation est valable quel que soit les moteurs ditherme réversibles fonctionnant entre les températures  $T_1$  et  $T_2$

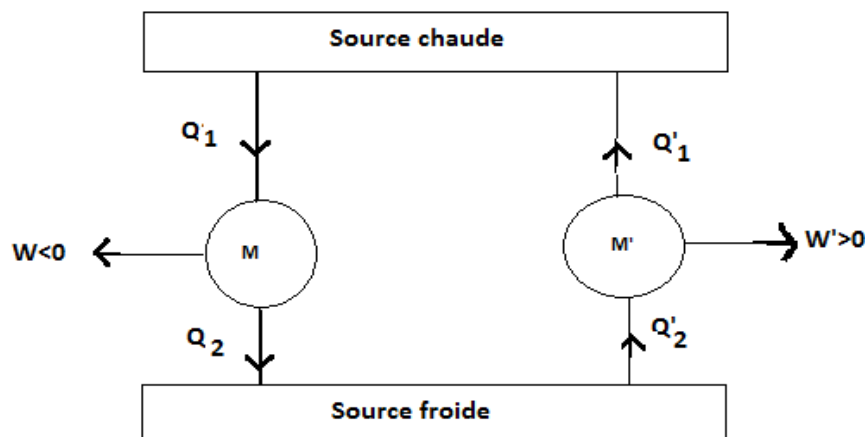
#### III.4.4. Théorème de Carnot :

Soient deux moteurs ditherme réversibles fonctionnant entre deux mêmes sources de chaleur



Leurs rendements respectifs ont pour valeurs  $\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$  et  $\eta' = 1 + \frac{Q'_2}{Q'_1}$

Puisque les deux moteurs sont réversibles, on peut inverser le sens de l'un d'entre eux.



**Hypothèse :** On peut adapter le système des deux moteurs de façon que les machines échangent avec l'une des sources des quantités de chaleurs identiques  $|Q_2| = |Q'_2|$

L'ensemble des deux machines est assimilé à une machine thermique complexe n'échangeant de la chaleur qu'avec la source chaude : donc associer les deux moteurs se comportant comme une machine monotherme réversible. Pour un tel cycle on avait déjà  $W=0$  et  $Q=0$  avec  $Q = Q_1 + Q'_1 \rightarrow Q_1 = -Q'_1$  on peut écrire  $|Q_1| = |Q'_1|$  et puisque  $|Q_2| = |Q'_2|$

Alors

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_1} \rightarrow \eta = \eta'$$

### Ainsi le théorème de Carnot

Tous moteurs ditherme réversibles fonctionnant entre deux températures  $T_1$  et  $T_2$  ont le même rendement : ce rendement est indépendant du caractère du cycle de transformation et indépendant de la nature de fluide décrivant le cycle.

#### III.4.5. Cycle de Carnot irréversible

D'après le corolaire du Théorème Carnot  $\eta_{irreversible} < \eta_{reversible}$

$$\eta_{irreversible} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$\eta_{reversible} = 1 + \frac{Q'_1}{Q'_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Donc  $1 + \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2} \implies \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} < 0$  La relation de Clausius pour les cycles ditherme irréversible.

#### III.4.6. Généralisation de la relation de Clausius

$$\text{a- Cycle ditherme} \quad \begin{cases} \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0 & \text{transformation réversible} \\ \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} < 0 & \text{transformation irréversible} \end{cases}$$

#### Rendement et efficacités des machines thermiques fonctionnant en cycle de Carnot

- Pour un moteur thermique, nous avons défini précédemment son rendement comme étant :

$$\rho = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Si le cycle de cette machine est réversible (cycle de Carnot) on a encore :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

Il en résulte que le rendement

$$\rho = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

- Pour une machine frigorifique nous avons défini précédemment son efficacité comme étant :

$$e = -\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

Si le cycle de cette machine est réversible (cycle de Carnot) on a encore :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

Il en résulte que :

$$e = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

- Pour une pompe à chaleur nous avons défini précédemment son efficacité comme étant :

$$e = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}$$

Si le cycle de cette machine est réversible (cycle de Carnot) on a encore :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

Il en résulte que :

$$e = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

## **ENTROPIE**

### **III.5. Propriétés des cycles**

#### **III.5.1. Cycles dithermes**

- Pour le cycle **ditherme réversible** on a :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

- Pour le cycle **ditherme irréversible** on a :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

#### **III.5.2. Cycles polythermes-inégalité de Clausius**

On peut généraliser les deux relations précédentes :

Considérons d'abord un cycle réversible comportant plus de deux sources de chaleur « cycle polytherme »

Désignons par  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  les chaleurs échangées avec les  $n$  sources dont les températures sont respectivement  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

On admet sans démonstration qu'on a :

- Dans le cas d'un **cycle polytherme réversible** :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} = 0$$

- Dans le cas d'un **cycle polytherme non réversible** :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} < 0$$

- Dans le cas général on a :

$$\sum_i^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

C'est l'inégalité de Clausius

### III.5.3. Généralisation de L'inégalité de Clausius

Supposons un cycle fonctionnant au contact d'une infinité de sources dont les températures varient d'une façon continue de l'une à l'autre et soient  $\delta Q_1, \delta Q_2 \dots \delta Q_n$  les chaleurs échangées avec ces sources. L'inégalité précédente se généralise comme suit :

$$\oint \frac{\delta Q}{T_s} \leq 0$$

$T_s$  étant la température de la source avec laquelle le système échange la quantité de chaleur élémentaire  $\delta Q$ .

Le symbole  $\oint$  indique que l'intégrale s'étend à tout le cycle.

#### Remarque

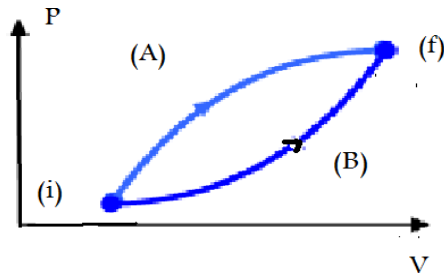
Dans le cas d'une transformation **cyclique réversible** quelconque, la température de la source s'identifie à tout instant à la température  $T$  du système et on a alors :

## III.6. Transformations non cycliques

### III.6.1. Cas de la réversibilité. Notion d'entropie

Considérons un système qui évolue d'un état d'équilibre initial (i) à un état d'équilibre final (f) par une série de transformations réversibles. Nous schématisons deux de ces transformations iAf et iBf





Si on considère la transformation inverse fBi, le cycle iAfBi est réversible et on peut écrire

$$\oint_{iAfBi} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$$\int_{iA}^f \frac{\delta Q}{T} + \int_{iB}^f \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Soit

$$\int_{iA}^f \frac{\delta Q}{T} = \int_{iB}^f \frac{\delta Q}{T}$$

et (B) étant deux transformations quelconques de l'ensemble de toutes les transformations réversibles. On constate donc que  $\int \frac{\delta Q}{T}$  est indépendante du chemin suivi et  $\frac{\delta Q}{T}$  est donc une différentielle totale exacte d'une fonction d'état S qu'on appelle entropie telle que :

$$\int_i \frac{\delta Q}{T} = S_f + S_i = \Delta S$$

Dans le cas d'une transformation infinitésimale réversible lorsque le système à la température T reçoit une quantité de chaleur  $\delta Q$ , sa variation d'entropie est :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

### Remarque

- L'entropie s'exprime normalement en Système Internationale (SI) en joule par degré Kelvin, mais souvent on emploie calorie par degré Kelvin.
- Pour une transformation **réversible** infinitésimale on peut alors écrire

$$\delta Q = TdS$$

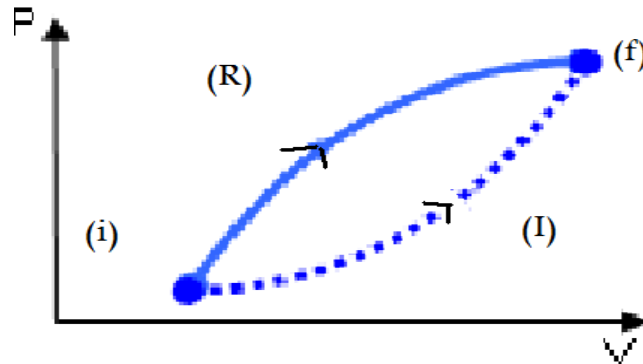
$$dU = TdS - PdV$$

- Pour une transformation adiabatique  $\delta Q = 0 \Rightarrow dS = 0$ . Une telle transformation se fait donc à entropie constante. On la qualifie de transformation isentropique.

### III.6.2. Cas de l'irréversibilité.

Considérons un système qui évolue d'un état d'équilibre initial (i) à un état d'équilibre final (f) des deux manières :

- Par une transformation irréversible iIf
- Par une transformation réversible iRf



Décrivons alors un cycle iIf+fRi. Ce cycle est entièrement irréversible (car l'une de ses portions l'est)

$$\oint_{iIfRi} \frac{\delta Q}{T_S} < 0$$

$$\int_{iI}^f \frac{\delta Q}{T_S} + \int_{fR}^i \frac{\delta Q}{T_S} < 0$$

$$\int_{iI}^f \frac{\delta Q}{T_S} - \int_{iR}^f \frac{\delta Q}{T_S} < 0$$

$$\int_{iI}^f \frac{\delta Q}{T_S} - (S_f - S_i) < 0$$

Soit

$$\int_{iI}^f \frac{\delta Q}{T_S} < (S_f - S_i)$$

Cela signifie que lorsqu'un système évolue irréversiblement entre deux états d'équilibre (i) et (f)

l'intégrale  $\oint_I \frac{\delta Q}{T_S}$  prise le long du chemin suivi est inférieure à la variation de l'entropie

- ✓ Insistons ici sur le fait que  $T_S$  représente la température d'une source et non celle du système qui d'ailleurs peut ne pas être définie

- Pour une transformation élémentaire irréversible on a alors :

$$dS > \frac{\delta Q}{T_S}$$

$dS$  est donc la somme de deux termes :

$$dS = dS_{\text{échangé}} + \delta S_{\text{créée}}$$

Le premier terme  $dS_{\text{échangé}} = \frac{\delta Q}{T_S}$  est la variation de l'entropie d'échange appelée aussi «reçue».

Ce terme est nul pour une transformation adiabatique

Le second terme  $\delta S_{\text{créée}}$  est l'entropie créée à l'intérieur du système au cours de sa transformation. Il est strictement positif ( $\delta S_{\text{créée}} > 0$ ) pour tout processus réel (donc irréversible) et nul dans le cas de la réversibilité.

### III.7. Calcul de la variation d'entropie

Il s'agit de calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  accompagnant le passage du système d'un état d'équilibre initiale (i) à un état d'équilibre final (f)

$$\Delta S = S_f - S_i$$

Dans le cas d'une transformation irréversible le calcul de  $\int_{iI}^f \frac{\delta Q}{T_S}$  n'a pas un grand intérêt car on sait simplement que d'après ce qui précède que la variation de l'entropie  $\Delta S$  est supérieur à la valeur de cette intégrale

Pour calculer effectivement  $\Delta S$  il faut imaginer une transformation réversible ramenant le système de (i) à (f) puis évaluer  $\int_{iR}^f \frac{\delta Q}{T_S}$

Pour cette transformation réversible on sait que  $\Delta S = \int_{iR}^f \frac{\delta Q}{T_S}$

Cas de la transformation adiabatique

Pour une transformation réversible adiabatique di et isentropique

$$\Delta S = 0$$

#### Détente ou compression isotherme réversible d'un gaz parfait

Dans ce cas  $T = \text{Cste}$

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T}$$

Nous avons vu que pour n moles de gaz parfait

$$Q = nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

Soit alors :

$$\Delta S = nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

#### Échauffement ou refroidissement réversible d'un corps à pression constante

Considérons l'échauffement ou le refroidissement isobare d'un corps (de capacité calorifique  $mc_p$ ) de l'état d'équilibre initial (i) à l'état d'équilibre final (f)

La transformation étant isobare  $\delta Q = mc_p dT$

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = m \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_p dT}{T}$$

Si on admet que  $C_p$  reste constante on a :

$$\Delta S = m C_p \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = m C_p \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right)$$

#### Échauffement ou refroidissement réversible d'un corps à volume constant

Considérons l'échauffement ou le refroidissement isochore d'un corps (de capacité calorifique  $mc_v$ ) de l'état d'équilibre initial (i) à l'état d'équilibre final (f)

La transformation étant isochore  $\delta Q = dU = m C_V dT$

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = m \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_V dT}{T}$$

Si on admet que  $C_V$  reste constante on a :

$$\Delta S = m C_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = m C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

### III.8. Evolution spontanée d'un système isolé

Si un système isolé est le siège d'une évolution spontanée donc irréversible entre états d'équilibre initial (i) et final (f) on a, puisque  $\delta Q = 0$

$$0 < S_f - S_i$$

$$\Rightarrow S_f > S_i$$

L'entropie d'un système isolé ne peut que croître ( $\Delta S > 0$ )

#### Exemple

Soit un système isolé de l'extérieur grâce à une enceinte isolée. Au sein de ce système se trouve un corps C1 à une température initiale  $T_1$  et un corps C2 à une température initiale  $T_2$ . On suppose que ces deux corps sont identiques de même masse  $m$  et de même chaleur spécifique  $c$ . Mettons ces deux corps en contact thermique qui après un certain temps se mettent en équilibre thermique à la température  $T_e$ .

Dans cette opération le corps C1 a échangé la quantité de chaleur

$$Q_1 = mc(T_e - T_1)$$

Et le corps C2 a échangé une quantité de chaleur

$$Q_2 = mc(T_e - T_2)$$

Le système étant isolé ce qui implique :

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$mc(T_e - T_1) + mc(T_e - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La variation de l'entropie du corps C1

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_e} \frac{\delta Q_1}{T} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{mc dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right)$$

La variation de l'entropie du corps C2

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_e} \frac{\delta Q_2}{T} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{mc dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right)$$

La variation de l'entropie du système est

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right) + mc \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right)$$

$$\Delta S = mc \ln \left( \frac{T_e^2}{T_1 \cdot T_2} \right) = mc \ln \left( \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 \cdot T_2} \right)$$

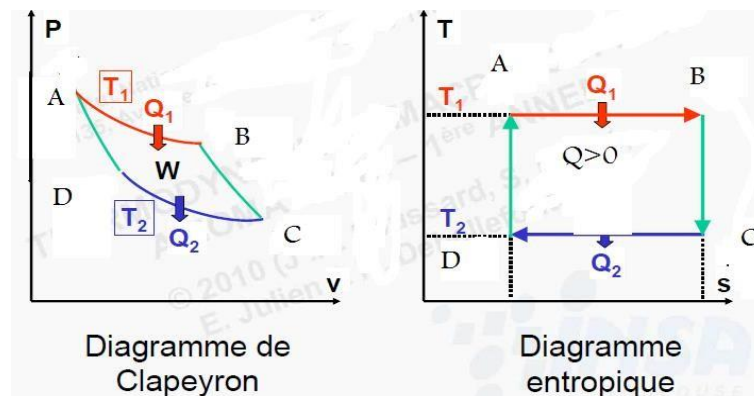
Avec  $(T_1 + T_2)^2 = (T_2 - T_1)^2 + 4T_1 \cdot T_2$

$$\Delta S = mc \ln \left( 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 \cdot T_2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta S > 0$$

### III.9. Diagramme entropique

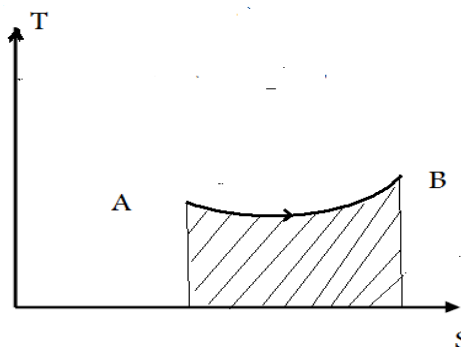
Dans un tel diagramme on porte la température  $T$  en ordonnée et l'entropie en abscisse ; Pour une transformation réversible  $AB$ , l'aire hachurée sous la courbe  $(AB)$  est mesurée par :



$$\int_{S_A}^{S_B} T dS = \int_A^B \delta Q = Q_{AB}$$

$Q_{AB}$  est la quantité de chaleur reçue par le système dans la transformation  $AB$ .

Dans le cas d'un cycle, l'aire de ce cycle dans le diagramme entropique représente la chaleur totale  $Q$  reçue par le système au cours du cycle.  $Q$  est positif si le cycle est parcouru dans le sens des « aiguilles d'une montre »



### III.10. Entropie de l'univers

Pour calculer cette entropie il faut considérer l'univers comme étant constitué du système et du milieu extérieur (plus précisément de sources de chaleur). La variation de l'entropie de l'univers est donc la somme algébrique de la variation de l'entropie du système et celles des sources de chaleur

$$\Delta S_{Univers} = \Delta S_{Système} + \Delta S_{Sources\ de\ chaleur}$$

### III.10.1. Cas de la réversibilité

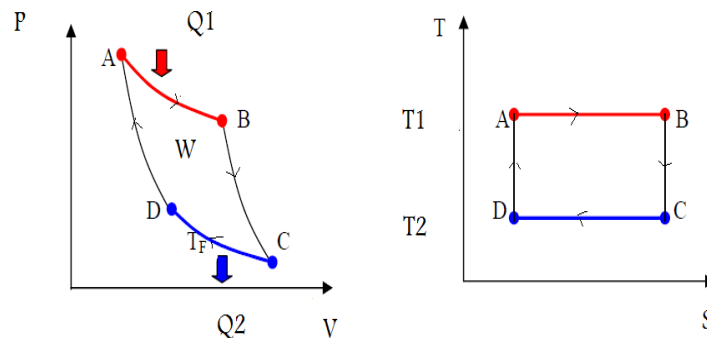
Lors de l'échange réversible de chaleur entre une source de chaleur à la température  $T$  et un système, la température de cette dernière est pratiquement égale à celle de la source. Soit  $\delta Q$  la chaleur reçue par le système ; son entropie varie alors de :  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  Corrélativement la source de chaleur a « reçu » la quantité de chaleur  $-\delta Q$ . Sa variation d'entropie est donc  $-\frac{\delta Q}{T}$ . Le total des deux variations précédentes montre que la variation de l'entropie de l'univers dans ce cas est nulle. Ce résultat est donc encore vrai pour l'ensemble de la transformation réversible.

**Théorème** : Pour toute transformation réversible, l'entropie de l'univers reste inchangée

$$\Delta S_{Univers} = 0$$

#### Exemple

Soit un système qui décrit un cycle de Carnot



$$\Delta S_{Système} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CV} + \Delta S_{DA}$$

$$\Delta S_{Système} = \frac{Q_1}{T_1} + 0 + \frac{Q_2}{T_2} + 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Delta S_{Source\ de\ chaleur} = \Delta S_{Source\ chaude} + \Delta S_{Source\ froide} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow \Delta S_{Univers} = 0$$

### III.10.2. Cas de l'irréversibilité

Supposons qu'un système reçoit irréversiblement une quantité de chaleur  $\delta Q$  d'une source de chaleur à la température  $T_S$ . Dans ce cas la température  $T$  du système doit être différente de celle de la source. On peut imaginer pour le système une transformation réversible qui la ramène de son état final à son état d'équilibre initial ce qui permet de calculer la variation de son entropie, soit

$$dS_{Système} = \frac{\delta Q}{T}$$

La variation de l'entropie de source de chaleur est :

$$dS_{Source\ de\ chaleur} = -\frac{\delta Q}{T_S}$$

La variation de l'entropie de l'univers est donc :

$$dS_{Univers} = dS_{Système} + dS_{Source\ de\ chaleur} = \frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_S} = \frac{\delta Q(T_S - T)}{T \cdot T_S}$$

$dS_{Univers}$  est toujours positif car

- S'il s'agit d'un échauffement du système  $\delta Q > 0$  et  $(T_S - T) > 0$
- S'il s'agit d'un refroidissement du système  $\delta Q < 0$  et  $(T_S - T) < 0$

Ce résultat est donc vrai pour l'ensemble de la transformation irréversible

$$\Rightarrow \Delta S_{Univers} > 0$$

### **Exemple**

Prenons pour un corps de capacité calorifique constante  $mc$ . Sa température initiale est  $T_0$ .

Mettons-le en contact avec une source de chaleur à la température  $T_S$ .  $T_S$  est nettement différente de  $T_0$

Dans ces conditions, le corps se mettra en équilibre thermique avec la source par une transformation fondamentalement irréversible au cours de laquelle la température du corps passe de  $T_0$  à  $T_S$

Imaginons un échauffement (ou un refroidissement) réversible pour lequel la variation d'entropie du corps ou du système est donnée par :

$$\Delta S_{Système} = mc \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right)$$

Pour provoquer la variation de température du corps, celui-ci aura « reçu » une quantité de chaleur

$$Q = mc (T_S - T_0)$$

La source de chaleur aura elle « reçu » une quantité de chaleur :

$$Q = mc (T_0 - T_S)$$

La variation d'entropie de la source est donc :

$$\Delta S_{Source\ de\ chaleur} = mc \left( \frac{T_0 - T_S}{T_S} \right)$$

La variation d'entropie de l'univers est donc :

$$\Delta S_{Univers} = \Delta S_{Système} + \Delta S_{Source\ de\ chaleur} = mc \ln\left(\frac{T_S + T_0}{T_0 - T_S}\right)$$

Une discussion mathématique du signe de cette expression montre que  $\Delta S_{Univers} > 0$  dans tous les cas sauf pour  $T_S = T_0$  où  $\Delta S_{Univers} = 0$  (où il ne se passe rien).

## **III.11. Entropie d'un gaz parfait**

### **III.11.1. Entropie en fonction des variables T et V**

La quantité de chaleur reçue pour  $n$  moles d'un gaz parfait est :

$$\delta Q = C_V dT + P dV = \frac{nR}{\gamma - 1} dT + \frac{nRT}{V} dV$$

La transformation étant réversible

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{nR}{V} dV$$

$$dS = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln T + nR \ln V + S_0$$

$S_0$  est une constante

### **Remarque**

- Pour une transformation réversible finie

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

- Pour une transformation isentropique (adiabatique réversible)

$$dS = 0 \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cste$$

### **III.11.2. Entropie en fonction des variables T et P**

La quantité de chaleur reçue pour n moles d'un gaz parfait est :

$$\delta Q = C_P dT + V dP = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} dT - \frac{nRT}{P} dP$$

La transformation étant réversible

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - \frac{nR}{P} dP$$

$$dS = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln T + nR \ln P + S_0$$

$S_0$  est une constante

### **Remarque**

- Pour une transformation réversible finie

$$\Delta S = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i}$$

- Pour une transformation isentropique (adiabatique réversible)

$$dS = 0 \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cste$$

### **III.11.3. Entropie en fonction des variables P et V**

La quantité de chaleur reçue pour n moles d'un gaz parfait est

$$\delta Q = C_P \frac{P}{nR} dV + C_V \frac{V}{nR} dP$$

La transformation étant réversible

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = C_P \frac{P}{nRT} dV + C_V \frac{V}{nRT} dP$$

$$ds = \frac{dV}{V} + C_V \frac{dP}{P}$$



$$\Delta S = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln V - nR \ln P + S_0$$

$S_0$  est une constante

**Remarque**

- Pour une transformation réversible finie

$$\Delta S = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{V_f}{V_i} - \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{P_f}{P_i}$$

- Pour une transformation isentropique (adiabatique réversible) :

$$dS = 0 \Rightarrow PV^\gamma = \text{Cste}$$

# Chapitre IV : Applications des deux principes : machines thermiques

## IV.1. Machines thermiques

### IV.1.1. Définition

On appelle machine thermique, un système thermodynamique (en général un fluide) décrivant des cycles fermés de transformations au cours desquels il échange du travail avec le milieu extérieur et de la chaleur avec un ou plusieurs thermostats.

### IV.1.2. Relations fondamentales

Le premier principe appliqué au système sur un cycle s'écrit :

$$\Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad W + \sum_i Q_i = 0$$

Le second principe appliqué au système sur un cycle s'écrit :

$$\Delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad W + \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

$Q_i$  représente la quantité de chaleur échangée (reçue algébriquement) **par le système** avec le thermostat à la température  $T_i$ . Cette inégalité de Clausius devient une égalité si le cycle est décrit de manière réversible donc si toutes les transformations qui le constituent sont réversibles.

### IV.1.3. Classification de machines thermiques

On classe les machines thermiques en fonction du travail échangé avec l'extérieur en:

- ✓ **Machines motrices** qui fournissent du travail à l'extérieur :  $W < 0$ .
- ✓ **Machines réceptrices** qui reçoivent du travail de l'extérieur :  $W > 0$ .

Puis on distingue le nombre de sources qui échangent de la chaleur avec le système :

- ✓ Machines monothermes
- ✓ Machines dithermes

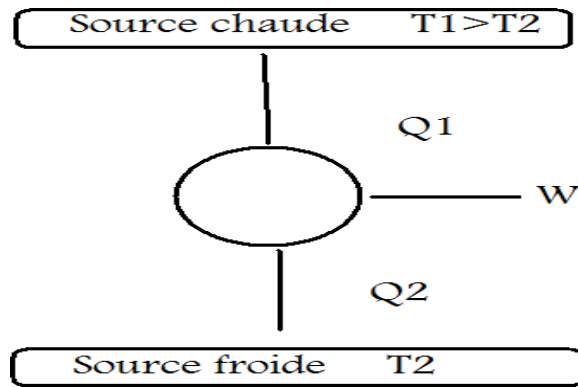
## IV.2. Machines monothermes

C'est une machine à une seule source  $T_0$ . La machine est alors nécessairement réceptrice car  $Q/T_0 < 0$  impose  $W > 0$ . Ce cas est sans intérêt.

### IV.2.1. Machines dithermes

#### IV.2.1.1. Principe de fonctionnement

C'est un système thermodynamique permettant l'échange du travail avec le milieu extérieur et chaleur avec deux sources qui dans la suite seront conventionnellement appelées source chaude ( $T_1$ ) et sources froide ( $T_2$ )



1<sup>er</sup> Principe ou bilan énergétique :  $\Rightarrow, \quad Q_1 + Q_2 + W = 0$

2<sup>ème</sup> Principe ou bilan entropique :  $\Rightarrow \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$

#### IV.2.1.2. Diagramme de fonctionnement ou diagramme de Raveau

On appelle diagramme de Raveau un diagramme dont les axes sont respectivement  $Q_1$  et  $Q_2$ . Nous allons faire figurer sur ce diagramme deux droites :

- ✓ La droite de travail nul : d'après l'écriture du premier principe appliqué à la machine ditherme, si  $W = 0$  alors  $Q_1 + Q_2 = 0$  qui est l'équation de la droite.
- ✓ La droite de réversibilité : pour une évolution réversible du système, la variation d'entropie (qui est nulle pour un cycle) se limite à l'entropie reçue et donc  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

La droite de travail nul associée aux deux axes partage le plan de Raveau en six zones qui correspondent aux différents signes possibles des grandeurs algébriques  $W$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$ , le premier principe excluant qu'elles soient toutes les trois de même signe.

La droite de réversibilité partage le plan de Raveau en deux parties, seule la partie  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$  étant autorisée par le second principe.

On s'aperçoit qu'il existe quatre possibilités de fonctionnement compatibles avec les deux principes de la thermodynamique pour une **machine ditherme** :

**Zone 1** :  $W < 0, Q_1 > 0, Q_2 < 0$

Le système reçoit  $Q_1$  et le transforme en travail  $-W$  et chaleur  $-Q_2$  cédés au milieu extérieur et à la source froide. Ce type de système est appelé **moteur thermique**

**Zone 2** :  $W > 0, Q_1 > 0, Q_2 < 0$

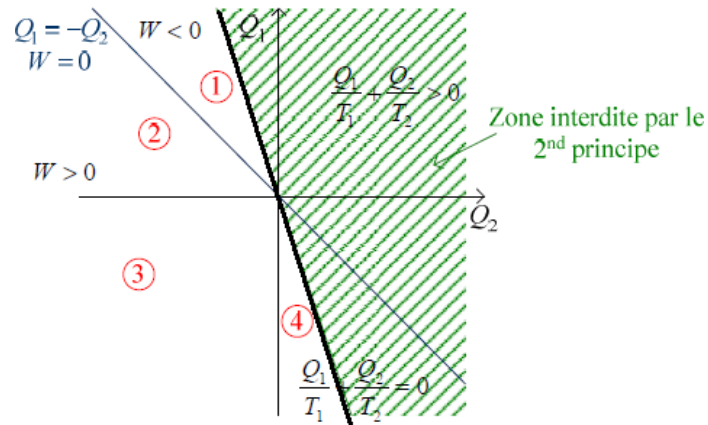
Type de fonctionnement inutile : on **fournit un travail** pour faire un transfert de chaleur d'une **source chaude** à une **source froide**.

**Zone 3** :  $W > 0, Q_1 < 0, Q_2 < 0$

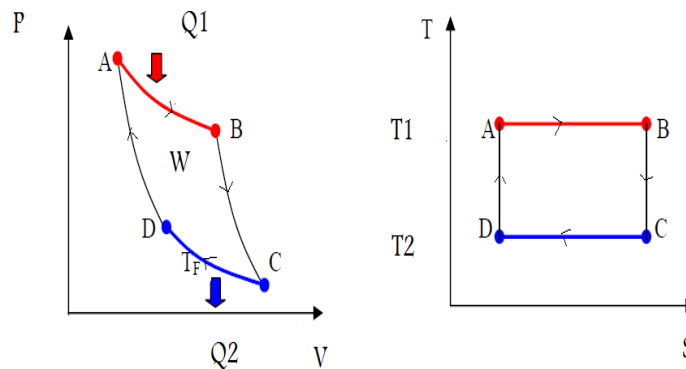
Fonctionnement aussi inutile : un cycle monotherme suffit pour **transformer du travail en chaleur**

**Zone 4** :  $W > 0, Q_1 < 0, Q_2 > 0$

Transfert de chaleur d'une source froide vers une source chaude grâce à un travail. Ce type de système est une machine frigorifique ou pompe à chaleur



#### IV.2.2. Moteurs thermiques dithermes



##### IV.2.2.1. Moteur idéal : Cycle de Carnot

$$\rho = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

##### IV.2.2.2. Moteurs à combustion interne

On distingue le cycle à 4 temps et le cycle à 2 temps

Cycle à 4 temps (moteur à 2 soupapes pour admission, échappement)

- 1<sup>er</sup> temps : expiration du nouveau mélange
- 2<sup>er</sup> temps : compression (explosion ou combustion plus au moins rapide)
- 3<sup>me</sup> temps : détente (temps moteur)
- 4<sup>ème</sup> temps : refoulement des gaz brûlés

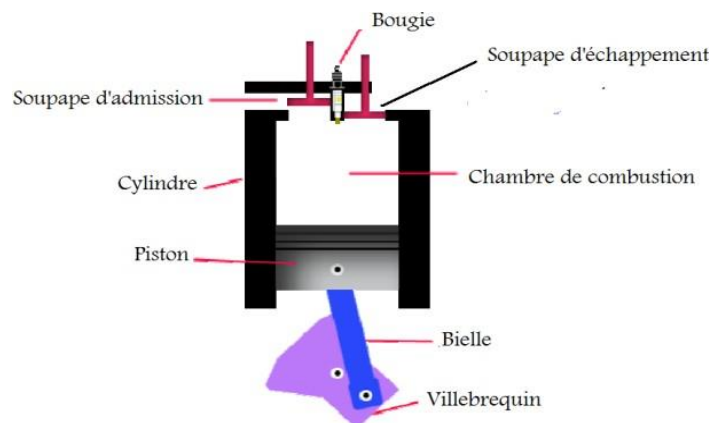
Cycle à 2 temps (moteur à lumières pour échappement en balayage)

- 1<sup>er</sup> temps : compression (explosion ou combustion plus au moins rapide)
- 2<sup>ème</sup> temps : détente (temps moteur)

(Vers la fin de la détente, le piston découvre une première lumière par où les gaz commencent à s'échapper puis une deuxième lumière par où le nouveau mélange, préalablement comprimé légèrement, vient remplir le cylindre en repoussant ce qui restait des gaz brûlés = balayage).

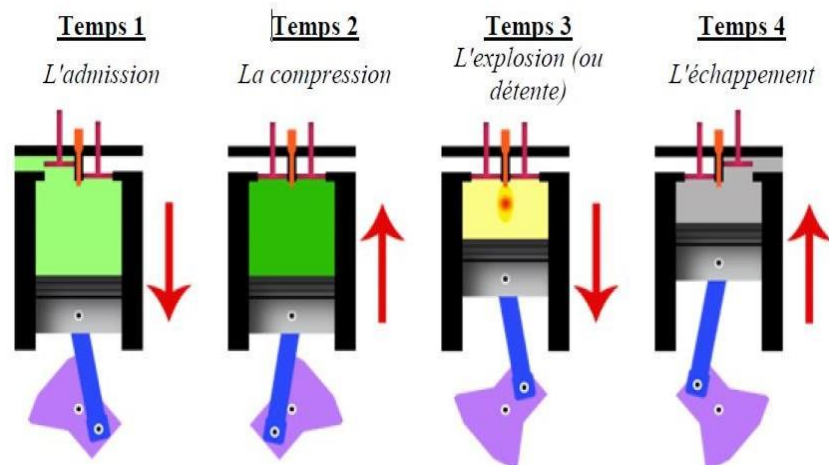
#### IV.2.2.3. Moteurs à explosion. Moteurs à essence ou à gaz

Le premier moteur à explosion a été mis au point par Otto en 1878. Le cycle du moteur à 4 temps a été proposé par Beau de Rochas en 1862.

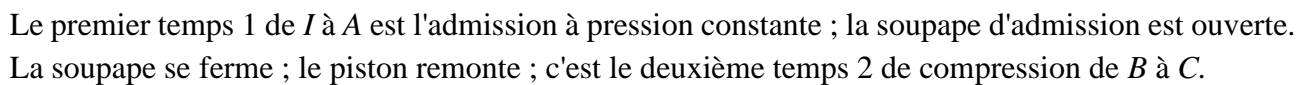


Les 4 temps du moteur à explosion sont les suivants :

- 1<sup>er</sup> temps : La soupape d'admission s'ouvre et le piston descend, aspirant le mélange air-essence
- 2<sup>ème</sup> temps : Les soupapes d'admission et d'échappement se ferment. Le piston remonte comprimant le mélange air-essence
- 3<sup>ème</sup> temps : Les deux soupapes fermées, la bougie émet une étincelle provoquant l'explosion du mélange air-essence. La pression fournie permet de faire redescendre le piston (**temps moteur**)
- 4<sup>ème</sup> temps : La soupape d'échappement s'ouvre et le piston remonte permettant l'évacuation des gaz brûlés que l'on retrouvera à la sortie du pot d'échappement



Un cycle correspond à deux tours du vilebrequin.

[illegible]

La soupape d'échappement s'ouvre, mettant le cylindre à la pression extérieure, puis les gaz s'échappent  
: c'est le quatrième temps d'échappement, de  $D$  à  $A$ , puis à  $I$ .

On comprime (AB) un mélange d'air et d'essence (préparé par passage de l'air dans le carburateur ou par injection d'essence dans la pipe d'admission) ou bien un mélange d'air et de gaz, pour les moteurs à gaz ; la combustion du mélange comprimé est déclenchée par une étincelle (à la bougie) ; cette combustion est très rapide et conduit à un échauffement et à une augmentation brutale de la compression à volume presque constant (BC). La détente motrice (CD) a lieu ensuite jusqu'à ce que le volume (donc le volume massique) du gaz revienne (D) à la même valeur que précédemment (A) c'est à dire au volume total du cylindre. On a ensuite renouvellement des gaz – échappement – admission : le cycle idéal correspondant (cycle de OTTO) est formé de 2 isentropes (AB et CD) et 2 isochores (BC et DA)

On définit le taux de compression  $\tau$ , rapport des volumes  $\tau = V_A/V_B$

$$\rho = \frac{(-W)}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$Q_1 = C_V(T_C - T_B)$$

$$Q_2 = C_V(T_A - T_D)$$

$$\rho = \frac{(-W)}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

L'isentrope AB  $\Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \tau^{\gamma-1}$

L'isentrope CD  $\Rightarrow T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_C}{T_D} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \tau^{\gamma-1}$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C - T_B}{T_D - T_A} = \tau^{\gamma-1}$$

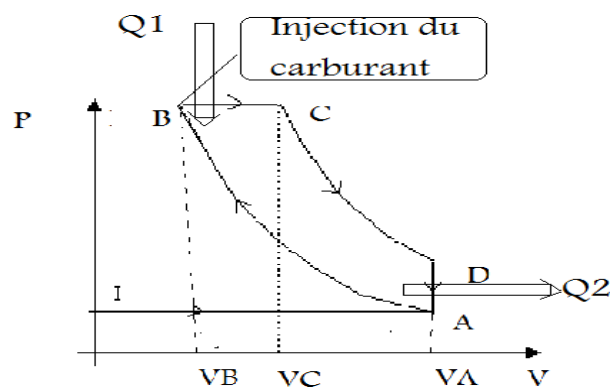
$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{1}{\tau^{\gamma-1}}$$

Le rendement ne dépend que du taux de compression  $\tau$ . Les ordres de grandeurs sont données dans le tableau suivant (pour  $\gamma = 1,4$ )

$\tau$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho = 1 - \frac{1}{\tau^{\gamma-1}}$	0,24	0,39	0,43	0,47	0,51	0,54	0,56	0,58	0,60

#### IV.2.2.4. Moteur Diesel

On comprime de l'air, sans combustible AB ; quand cet air est comprimé (point sur haut B) on injecte dans le cylindre le combustible (gaz-oil) grâce à une pompe extérieure à haute pression – 100 à 250 bars. Ce combustible pulvérisé dans le cylindre s'enflamme spontanément en présence de l'air chauffé par la compression ; la pompe d'injection est calculée de telle manière que l'injection dure une partie importante du cycle (BC) et si bien que la pression reste sensiblement constante bien que le volume du gaz augmente. On cesse l'injection à un moment qui dépend de la charge du moteur (position de l'accélérateur) et la fin de la course du piston correspond à la fin de la détente (DA) ; en D on est au point mort bas d'où l'on poursuivra par échappement et admission ; le cycle idéal correspondant (DIESEL) est formé de 2 isentropes (AB et CD) une isobare (BC) et une isochore (DA)



#### Rendement théorique :

On définit le taux de compression  $\tau$ , rapport des volumes  $\tau = V_A/V_B$  et la charge du moteur  $v = V_C/V_B$  (qui serait égal à un pour un moteur à explosion).

On peut faire facilement les calculs pour un gaz parfait de  $\gamma$  indépendant de T et en considérant que, lors de la combustion, on apporte une quantité de chaleur  $Q_1$  à l'air. Le rendement est alors le rapport du travail  $(-W)$  fourni à l'arbre de la machine rapporté à la quantité  $Q_1$

$$\rho = \frac{(-W)}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$Q_1 = C_P(T_C - T_B)$$

$$Q_2 = C_V(T_A - T_D)$$

$$\rho = \frac{(-W)}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$$\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \frac{\frac{T_D}{T_B} - \frac{T_A}{T_B}}{\frac{T_D}{T_B} - 1}$$

$$\text{L'isentrope } \underline{AB} \Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \tau^{\gamma-1}$$

$$\text{L'isobare } \underline{BC} \Rightarrow \frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right) = \vartheta$$

$$\text{L'isentrope } \underline{CD} \Rightarrow T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_D}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\vartheta}{\tau}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C - T_B}{T_D - T_A} = \tau^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{\vartheta^{\gamma-1}}{\gamma \tau^{\gamma-1}}$$



## Exercices et problèmes

### Exercice 1

Soit la fonction  $f(x, y) = x^2 y^2 + 3x + y^3$

- 1) Calculer  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$  et  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ . En déduire la différentielle de  $f$ .
- 2) Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , conclure

### Solution de l'exercice 1

$$f(x, y) = x^2 y^2 + 3x + y^3$$

$$1. \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy^2 + 3$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2x^2 y + 3y^2$$

Le différentielle de  $f$  notée  $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$

$$df = (2xy^2 + 3)dx + (2x^2 y + 3y^2)dy$$

$$2. \text{ Calculons } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = 4xy$$

$$\text{Calculons } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = 4xy$$

L'ordre de la dérivée seconde n'a pas d'importance.

### Exercice 2

On considère la forme différentielle donnée par l'expression suivante :

$$\delta P = -\frac{T}{V^2} \left(1 + 2\frac{a}{V}\right) dV + \frac{1}{V} \left(1 + \frac{a}{V}\right) dT \text{ où } a \text{ est une constante.}$$

- 1) Montrer que cette forme différentielle est Différentielle Totale Exacte (DTE).
- 2) Déterminer la fonction  $P(T, V)$  dont la forme précédente est sa différentielle.

### Solution de l'exercice 2

1. La forme différentielle  $\delta P$  on l'écrit sous la forme suivante ;

$$\delta P = M(T, V) dV + N(T, V) dT \text{ avec } T \text{ et } V \text{ sont des variables}$$

$$\text{et } M(T, V) = -\frac{T}{V^2} \left(1 + 2\frac{a}{V}\right) \text{ et } N(T, V) = \frac{1}{V} \left(1 + \frac{a}{V}\right)$$

Pour Montrer que cette forme différentielle est Différentielle Totale Exacte (DTE) il faut vérifier

$$\text{que } \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T$$

Alors  $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_V = -\frac{1}{V^2} \left(1 + 2\frac{a}{V}\right)$  et  $\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{a}{V}\right) - \frac{1}{V} \frac{a}{V^2} = -\frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2a}{V}\right)$

Donc  $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T$  ce qui vérifie que  $\delta P$  est une DTE et que sera noté  $dP$

2. Déterminons la fonction  $P(T, V)$

On a  $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT$

Et  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{T}{V^2} \left(1 + 2\frac{a}{V}\right)$  (1)

Et  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{V} \left(1 + \frac{a}{V}\right)$  (2)

A partir de l'équation de (1)  $P(T, V) = -\int \frac{T}{V^2} \left(1 + 2\frac{a}{V}\right) dV$  (avec  $T$  considéré comme une constante) =

$$T \int \frac{dV}{V^2} - T \int \frac{2a}{V^3} dV$$

$$P(T, V) = \frac{T}{V} + \frac{Ta}{V^2} + g(T) \quad (3)$$

$g(T)$  est la constante d'intégration qu'on doit déterminer

en insérant l'expression (3) dans l'équation (2) on a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{V} + \frac{a}{V^2} + \frac{dg}{dT} = \frac{1}{V} \left(1 + \frac{a}{V}\right) \text{ alors } \frac{dg}{dT} = 0 \text{ ce qui donne } g(T) = K \text{ une vraie constante}$$

$$\text{D'où } P(T, V) = \frac{T}{V} + \frac{Ta}{V^2} + K$$

### **Exercice 3**

Soit  $\delta Q$  la quantité de chaleur échangée par une mole de gaz en fonction des variables  $P$  et  $T$  avec:

$$\delta Q = -\frac{RT}{P} dP + C_p(T) dT \text{ avec } R \text{ constante et } C_p(T) \text{ dépend de } T.$$

- 1) Montrer que  $\delta Q$  n'est pas une Différentielle Totale Exacte.
- 2) On pose  $dS = \delta Q T^n$  avec  $n$  un entier. Déterminer  $n$  pour que  $dS$  soit une Différentielle Totale Exacte (DTE).
- 3) Déterminer une fonction  $f(T)$  tel que  $f(T)\delta Q$  soit une DTE

### **Solution de l'exercice 3**

1. On a  $\delta Q = -\frac{RT}{P} dP + C_p(T) dT$  et qui est de la forme

$$\square Q = M(P, T) dP + N(P, T) dT \text{ avec } M(P, T) = -\frac{RT}{P} \text{ et } N(P, T) = C_p(T)$$

$$\text{On calcule } \frac{\partial(M)}{\partial T}, \frac{\partial(-\frac{RT}{P})}{\partial T} = -\frac{R}{P} \text{ et}$$

$$\text{On calcule } \frac{\partial(N)}{\partial T}, \frac{\partial(C_p(T))}{\partial T} = 0$$

$$\text{On a } \frac{\partial(M)}{\partial T} \neq \frac{\partial(N)}{\partial T} \text{ alors } \square Q \text{ n'est pas une D.T.E.}$$

2.  $dS = \square Q T^n = -\frac{RT^{n+1}}{P} dP + C_p(T) T^n dT$

$$\text{pour que } dS \text{ soit une D.T.E. il faut que } \frac{\partial(-\frac{RT^{n+1}}{P})}{\partial T} = \frac{\partial(C_p(T) T^n)}{\partial P}$$

$$\text{alors } \frac{R}{P} (n+1) T^n = 0 \text{ il faut que } n = -1$$

$$\text{d'où } dS = \frac{\delta Q}{T}$$

on a  $\square Q$  n'est pas une D.T.E. alors que  $dQ/T$  est une DTE

## Exercice 4

Un système thermodynamique décrit par l'équation d'état  $f(P, V, T) = 0$ , les variables d'état  $P$ ,  $V$  et  $T$  sont reliées entre elles par les relations suivantes :  $P = P(V, T)$ ,  $V = V(P, T)$  et  $T = T(P, V)$ .

1-Montrer les deux relations suivantes :  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 1$  et  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$

2-On donne les coefficients thermo élastiques:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P ; \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V ; \chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

- Donner la définition de ces coefficients et leurs unités dans le S.I
- Trouver la relation liant ces 3 coefficients
- Déterminer ces coefficients pour les cas :
  - ✓ D'un gaz parfait  $PV = nRT$
  - ✓ D'un gaz d'équation  $P(V-nb) = nRT$  avec  $n$ ,  $b$  et  $R$  sont des constantes

3-Réécrire  $\chi$  en fonction de la masse volumique et de sa dérivée partielle  $\rho$  (masse est constante)

## Solution de l'exercice 4

La fonction  $f(P, V, T) = 0$  est une fonction implicite

Et tel que, on peut écrire  $P = P(V, T)$ ,  $V = V(P, T)$  et  $T = T(P, V)$

1. On calcule la différentielle de  $P$  ;  $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT$  (1)

Et on calcule la différentielle de  $V$  ;  $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$  (2)

On remplace l'expression de  $dP$  (1) dans l'équation (2) et on a

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT\right] + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \\ dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial V} dV + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial T} + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT \end{aligned}$$

Par identification on a

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial V} = 1 \Rightarrow \text{que } \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$$

$$\text{Et } \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial T} + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] = 0 \Rightarrow \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial T}\right]_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \text{ or } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}$$

$$\text{On a alors } \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

2

a) la signification des coefficients

$\alpha$ : coefficient de dilatation thermique à pression constante. Unité  $K^{-1}$

$\beta$ : coefficient de compression isochore. Unité  $K^{-1}$

$\chi$ : coefficient de compressibilité isotherme :  $(Pa)^{-1}$

b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial V} &= -1 \Rightarrow -\chi V \beta P \frac{1}{\alpha V} = -1 \\ &\Rightarrow \alpha = \beta P \chi \end{aligned}$$

c) Pour un gaz parfait  $PV = nRT$  on a  $\alpha = \frac{1}{T}$ ,  $\beta = \frac{1}{T}$  et  $\chi = \frac{1}{P}$

Pour le gaz qui a pour équation  $P(V-nb) = nRT$

$$\alpha = \frac{V-nb}{TV}, \beta = \frac{1}{T} \text{ et } \chi = \frac{1}{V} \frac{(V-nb)}{P}$$

## Exercice 5

L'air est assimilé à un gaz parfait ( $PV = nRT$ ), de masse molaire  $M=29\text{g/mole}$ ;  $R=8.32\text{J/K mole}$ ;  $g=10\text{ms}^{-2}$ .

- 1- Etablir la condition d'équilibre d'un volume élémentaire  $dV$  de fluide au repos, placé au voisinage d'un point M où la pression vaut  $P(M)$  et la masse volumique  $\rho(M)$ .
- 2- En déduire la pression à l'altitude  $z$  en supposant que l'air est à la température constante  $T_0$  et le champ de pesanteur est uniforme dans le domaine d'étude. On notera  $P_0$  la pression à l'altitude  $z=0$ .

A.N : Calculer  $P$  à  $z = 5\text{Km}$ , sachant que  $P_0 = 1\text{atm}$ ,  $T_0 = 293\text{K}$

- 3- En fait la température décroît avec l'altitude selon une loi  $\frac{dT}{dz} = -a$  ( $a$  est une constante positive). On pose  $\alpha = \frac{Mg}{Ra}$

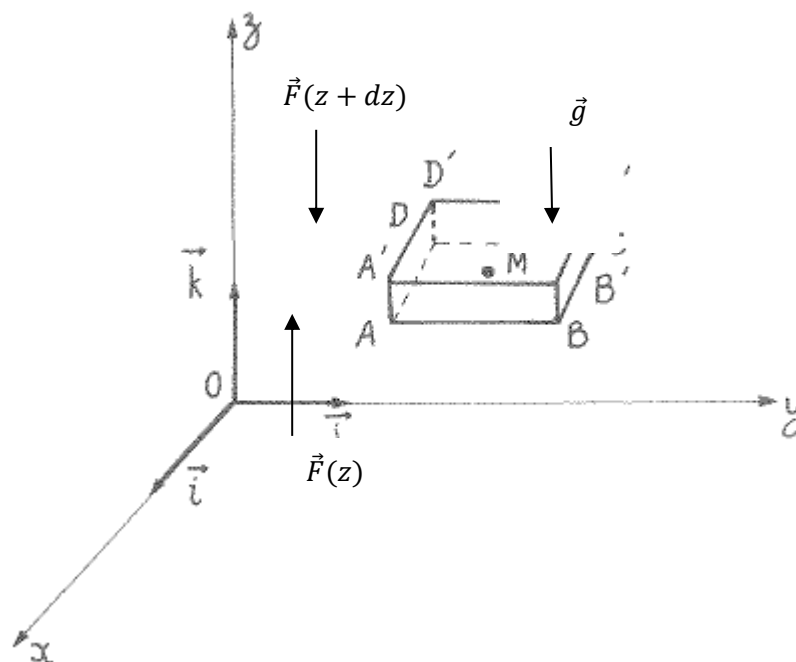
-Exprimer la pression  $P(z)$  en fonction de  $\alpha, P_0, T_0$  et  $z$  puis en fonction de  $T, T_0, P_0$  et  $\alpha$

- 4- Exprimer la masse volumique  $\rho$  de l'air en fonction de la pression et la masse volumique  $\rho_0$  ( $P_0, T_0$ )

## Solution de l'exercice 5

Etablir la condition d'équilibre ; loi de la statique des fluides

On considère un élément de fluide de volume  $dV$  contenant une masse élémentaire  $dm$  enfermé dans un parallélépipède



La condition d'équilibre de la masse  $dm$  est  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

Les forces extérieures sont  $\left\{ \begin{array}{l} \text{les forces de pression notées : } \vec{f}_{ext} \\ \text{le poids } \vec{P} = dm\vec{g} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$  La projection suivant l'axe Oz  $P(z)dS_{xy} - P(z+dz)dS_{xy} - dm\vec{g} = 0$

Or  $P(z+dz) - P(z) = dP(z)$

Donc  $-dP(z)dS_{xy} - dm\vec{g} = 0 \Rightarrow dP(z) = -dm\vec{g}$  or  $dm = \rho dV$  avec  $\rho$  la masse volumique et  $dV = dS_{xy}dz$

On a alors  $dP(z) = -\rho g dz$

$\Rightarrow$  La projection suivant l'axe Ox donne  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow$  que la pression ne dépend pas de la variable  $x$

$\Rightarrow$  La projection suivant l'axe Oy donne  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow$  que la pression ne dépend pas de la variable  $y$

On conclue que la pression ne dépend que de la variable  $z$  ;  $P(z)$

L'air est un gaz parfait  $PV = nRT_0$  et  $PV = mRT_0/M$  ( $M$  masse molaire du gaz) et  $\rho = m/V = PM/RT_0$

$$dP = -(PM/RT_0)g dz \Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = - \int_0^z \frac{Mg}{RT_0} dz \Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = - \frac{Mg}{RT_0} z$$

$$P(z) = P_0 \exp \left( - \frac{Mg}{RT_0} z \right)$$

$$\text{A.N. } P(z=5\text{Km}) = 10^5 \exp \left( \frac{-29.10^{-3} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^3}{8.32 \cdot 293} \right) = 0.55 \text{ atm}$$

La température décroît avec la loi  $\frac{dT}{dz} = -a$  ((car  $a$  étant considéré positif)

$$\Rightarrow T(z) = -az + T_0$$

$$\frac{dP(z)}{P} = - \frac{Mg}{R(T_0 - az)} dz = - \frac{Mg}{RT_0} \frac{dz}{(1 - \frac{az}{T_0})}$$

$$\text{On fait le changement de variable } y = 1 - \frac{az}{T_0} \Rightarrow dy = - \frac{a}{T_0} dz$$

$$\text{On a alors } \frac{dP(z)}{P} = \frac{Mg}{RT_0} \frac{T_0}{a} \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dP(z)}{P} = \frac{Mg}{Ra} \frac{d(1 - \frac{az}{T_0})}{1 - \frac{az}{T_0}}$$

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = \frac{Mg}{Ra} \ln \left( 1 - \frac{az}{T_0} \right)$$

$$P(z) = P_0 \left( 1 - \frac{az}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{Ra}} = P_0 \left( 1 - \frac{az}{T_0} \right)^\alpha$$

$$P(z) = P_0 \left( \frac{T_0 - az}{T_0} \right)^\alpha = P_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^\alpha$$

$$\rho = \frac{P(z) \cdot M}{RT(z)} = \frac{P_0}{R} \left( \frac{T}{T_0} \right)^\alpha \frac{M}{T} = \frac{P_0 M}{RT_0} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\alpha-1}$$

## **Exercice 6**

Un thermomètre à mercure (Hg), gradué linéairement est plongé dans un bain de glace fondante, le mercure indique la division  $x = -2$ . Dans un bain de la vapeur d'eau bouillante sous la pression atmosphérique (76cmde Hg), il indique la division  $x = 10^3$ .

- 1- Dans un bain tiède, le mercure indique la division  $x=70$ , quelle est la valeur de la température correspondante ?
- 2- Déterminer la correction à apporter à la division  $x$  sous la forme  $\theta - x = f(x)$
- 3- En déduire le point de la température où aucune correction n'est possible.

## **Solution de l'exercice 6**

La graduation du thermomètre varie linéairement avec la température

$$X = a + b\theta \quad (1) \text{ ou } \theta = \alpha + \beta x \quad (2)$$

Pour la glace fondante on  $\theta = 0^\circ\text{C} \Rightarrow a = -2$

Pour la vapeur  $\theta = 100^\circ\text{C} \Rightarrow 103 = -2 + 100b \Rightarrow b = 105/100$

D'où l'équation  $x = -2 + (105/100) \cdot x$

$$\text{Ou } \theta = \frac{200}{105} + \frac{100}{105} x$$

1. pour  $x = 70 \Rightarrow \theta = 68.57^\circ\text{C}$

2. la correction est définie par  $\theta - x = f(x) \Rightarrow \theta + 2 - (105/100)\theta = f(\theta)$

$$\text{Ou } \frac{200}{105} + \frac{100}{105} x - x = f(x) \Rightarrow \frac{200}{105} + x \left( \frac{100}{105} - 1 \right) = \frac{200}{105} - \frac{5}{105} x = f(x)$$

Aucune correction n'est possible lorsque  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 40$

---

## Exercice 7

On utilise un calorimètre que l'on supposera dans un premier temps parfait, (c'est à dire qu'il n'échange pas de chaleur). Ce calorimètre contient une masse  $m_1 = 95\text{g}$  d'eau à  $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ . On ajoute une masse  $m_2 = 71\text{g}$  d'eau à  $\theta_2 = 50^\circ\text{C}$ .

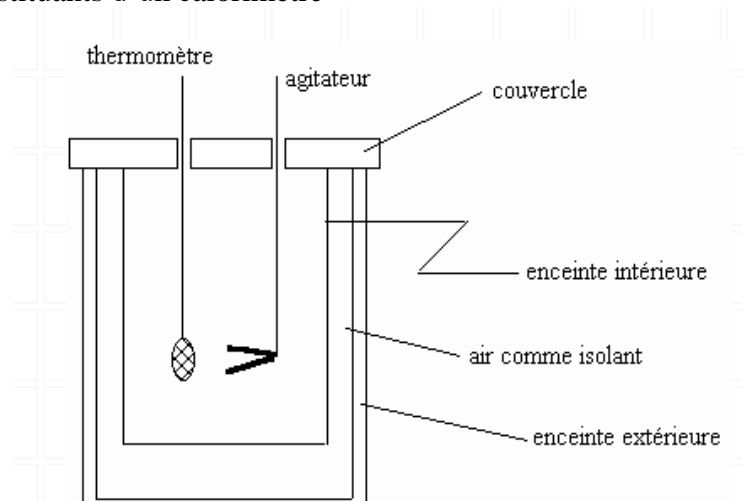
1-Quelle serait la température d'équilibre  $\theta_e$  de l'ensemble.

2-La température d'équilibre est en fait  $\theta_e = 31.3^\circ\text{C}$ , en déduire la valeur en eau du vase et ses accessoires.

3-Le même calorimètre contient maintenant  $m'_1 = 100\text{g}$  d'eau à  $\theta'_1 = 15^\circ\text{C}$ . On y plonge un échantillon métallique de masse  $m'_2 = 25\text{g}$  à  $\theta'_2 = 95^\circ\text{C}$ . La température d'équilibre est  $\theta_e = 16.7^\circ\text{C}$ . Calculer la chaleur massique du métal. On donne  $c_{\text{eau}} = 1\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ .

## Solution de l'exercice 7

On rappelle les constituants d'un calorimètre



1. Qui est un dispositif qui ne permet d'échange de chaleur avec le milieu me c'est-à-dire il permet la conservation de la chaleur  $\Rightarrow \sum Q_i = 0$

On mélange deux masses d'eau à température différente

$Q_1 + Q_2 = 0$  avec  $Q_1 = m_1 c_1 (\theta_e - \theta_1)$  et  $Q_2 = m_2 c_1 (\theta_e - \theta_2)$

$$\text{On alors } m_1 c_1 (\theta_e - \theta_1) + m_2 c_1 (\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_e = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}$$

A.N.  $\theta_e = 32.83^\circ\text{C}$

2. Soit  $\mu$  la valeur en eau du calorimètre

En utilisant toujours le principe de conservation de l'énergie  $\sum Q_i = 0$

$$(m_1 + \mu)c_{\text{eau}}(\theta_e - \theta_1) + m_2 c_{\text{eau}}(\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_e - \theta_1} - m_1$$

A.N.  $\mu = 22.5\text{g}$

3. Calculons la chaleur massique du métal

En utilisant toujours le principe de conservation de l'énergie  $\sum Q_i = 0$

$$(m_1 + \mu)c_{\text{eau}}(\theta_e - \theta_1) + m_2 c_{\text{métal}}(\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow c_{\text{métal}} = \frac{(m_1 + \mu)c_{\text{eau}}(\theta_2 - \theta_1)}{m_2(\theta_2 - \theta_e)}$$

A.N.  $c_{\text{métal}} = 0.11 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$

---

## **Exercice 8**

Un récipient, fermé par un piston mobile, contient une mole d'hélium (gaz parfait,) dans les conditions  $(P_1, V_1)$ . On opère une compression isotherme, de façon réversible, qui amène le gaz dans les conditions  $(P_2, V_2)$ . Sachant que  $P_1 = 1\text{atm}$ ,  $V_1 = 10 \text{ litres}$  et  $P_2 = 3\text{atm}$ .

**1-Déterminer:**

**a-** Le volume final  $V_2$  et la température  $T_2$ ?

**b -** Le travail reçu par le gaz et la quantité de chaleur

**c -** La variation d'énergie interne du gaz

**2-** L'opération est effectuée de l'état 1 d'une façon brutale amenant le gaz à l'état 2.

Déterminer :

**a-** Le travail reçu par le gaz et la quantité de chaleur

**b -** La variation d'énergie interne du gaz

**3-** Comparer les travaux trouvés dans les deux cas

## **Solution de l'exercice 8**

Rappel

Le premier principe de la thermodynamique : la variation de l'énergie interne est égale à la somme du travail et de la quantité de chaleur échangée  $\Delta U = W + Q$

1. a. La transformation est isotherme donc  $T_1 = T_2 = \frac{P_1 V_1}{R} = \frac{1000}{8.32} = 120.19\text{K}$

On un gaz parfait  $P_1 V_1 = P_2 V_2$  alors  $V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2}$  A.N.  $V_2 = 3.33 \text{ litres}$

b. Le travail élémentaire  $\delta W = -P dV$  comme la transformation étant isotherme on a  $P = \frac{RT}{V}$

$$\text{donc } W^{\text{rev}} = \int_1^2 -\frac{RT}{V} dV = -RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 1109\text{J}$$

la chaleur échangée  $Q$  lors de cette transformation isotherme

on utilise la première loi de joule l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température dans ces conditions  $\Delta U = 0 = W + Q \Rightarrow Q = -W = -1109\text{J}$

2. compression brutale (la transformation est irréversible )

a.  $W^{\text{irr}} = -P_2(V_2 - V_1) = 2000\text{J}$

- b. La variation de l'énergie interne ne dépend pas du chemin suivi, elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final donc  $\Delta U=0$
3. Le travail reçu lors de la transformation réversible est inférieur à celui de la transformation irréversible (car lors de la transformation irréversible il y a des frottements qui s'opposent au travail)

### **Exercice 9:**

**1-**On considère une transformation de Joule élémentaire faisant varier la température de  $dT$  et le volume de  $dV$ . Donner en fonction de  $\beta, C_v, P$  et  $T$  le coefficient  $A = \left( \frac{dT}{dV} \right)$ . En déduire  $A$  pour un gaz parfait. Montrer que la détente d'un gaz réel s'accompagne d'un réchauffement ou d'un refroidissement selon le signe de  $A$ .

**2-**Le gaz considéré obéit à l'équation d'état.  $PV = RT + BP$

$B$  est fonction de la température,

Déterminer  $A$ . En déduire la condition sur  $B$  pour que la détente conduise à un refroidissement ou un réchauffement. On donne  $\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$  et  $l = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

### **Solution de l'exercice 9**

1. La variation élémentaire de l'énergie interne est :  $dU = C_v dT + (l - P) dV$

$$l = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad \beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Avec et

$$dU = C_v dT + (\beta T - 1) l dV$$

Détente de joule  $U = \text{constante}$  donc  $dU = 0$

$$\text{Donc } A = \left( \frac{dT}{dV} \right) = - (P / C_v) * (\beta T - 1)$$

Pour un gaz parfait  $\beta = 1/T$  d'où  $A = 0$

Pour un gaz réel  $A = - (P / C_v) * (\beta T - 1)$

La détente de joule s'accompagne d'un réchauffement si  $A > 0$  car  $dT > 0$  et  $dV < 0$

Donc on a  $\beta T - 1 < 0$  ce qui donne  $\beta < 1/T$

Pour un refroidissement  $A < 0$  on vérifie que  $\beta > 1/T$

2. L'équation d'état du gaz est :  $PV = RT + BP$  avec  $B(T)$

$$A = \frac{-P}{C_v} (\beta P - 1) ; \text{ on a } P = \frac{RT}{V - B}$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V - B} + \frac{RT}{(V - B)^2} \frac{dB}{dT}$$

$$\beta = \frac{1}{T} + \frac{1}{(V - B)} \frac{dB}{dT}$$



$$A = - \frac{1}{c_V} \frac{RT^2}{(V-B)^2} \frac{dB}{dT}$$

Il y a réchauffement refroidissement pour  $A > 0$

Donc  $\frac{dB}{dT} < 0 \Rightarrow dB < 0$  et  $\beta < \frac{1}{T}$

Il y a refroidissement pour  $A < 0$

Donc  $\frac{dB}{dT} > 0 \Rightarrow dB > 0$  et  $\beta > \frac{1}{T}$

## Exercice 10

Une mole d'air assimilée à un gaz parfait subit une transformation de  $(P_0, V_0)$  à un état  $(P_1, V_1)$  avec  $P_1 = P_0/k$  et  $V_1 = KV_0$ ;  $K > 1$

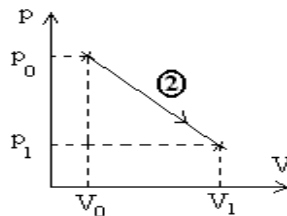
1-Comparer la température  $T_0$  dans l'état  $(P_0, V_0)$  à celle  $T_1$  dans l'état  $(P_1, V_1)$ , en déduire la variation d'énergie interne

2-On envisage, pour passer de l'état  $(P_0, V_0)$  à l'état  $(P_1, V_1)$ , deux transformations, une transformation réversible isotherme notée **1**, une transformation réversible notée **2** (représentée sur la figure ci-contre) où la pression évolue linéairement de  $P_0$  à  $P_1$ .

-Représenter graphiquement la transformation **1** et en déduire que les travaux échangés  $W_1$  et  $W_2$  sont tels que  $W_1 > W_2$  si  $k > 1$

3-Déterminer les quantités de chaleur échangées  $Q_1$  et  $Q_2$  et les travaux  $W_1$  et  $W_2$  Pour la

transformation **2**, montrer que la température peut être écrite sous la forme  $T = \frac{T_0}{k} \left( \frac{V}{V_0} (k+1) - \frac{V^2}{V_0^2} \right)$



## Solution de l'exercice 10

1. Etat 1  $(P_0, V_0)$  état 2  $(P_1, V_1)$

On a  $P_1 = \frac{P_0}{K}$  et  $V_1 = KV_0$

Une mole d'un gaz parfait  $P_0 V_0 = RT_0$  et  $P_1 V_1 = RT_1 \Rightarrow \frac{P_0}{K} KV_0 = RT_1 \Rightarrow P_0 V_0 = RT_1$

On en déduit que  $T_1 = T_0$

Cette transformation est isotherme donc  $\Delta U = 0$

2. La transformation (1) est une transformation isotherme

Géométriquement le travail est caractérisé par une surface

La surface  $S_1 = \int_{(1)} P dV$

La surface  $S_2 = \int_{(2)} P dV$

$S_2 > S_1$  et comme  $W_1 = -\int_{(1)} P dV = -S_1$  et  $W_2 = -\int_{(2)} P dV = -S_2$

Alors  $W_2 < W_1$

**3.** Le chemin 2 est linéaire et tel que on a  $P = aV + b$

Et avec  $a = -\frac{P_0}{KV_0}$  et  $b = \frac{P_0}{K}(K+1)$  donc  $P = -P_0 V + \frac{P_0}{K}(K+1)$

$\delta W = -PdV \Rightarrow W_2 = \frac{P_0}{K} \int_{V_0}^{V_1} \left( \frac{V}{V_0} - (K+1) \right) dV$

$$W_2 = \frac{P_0}{K} \left[ \frac{V_1^2 - V_0^2}{2V_0} - (K+1)(V_1 - V_0) \right]$$

$W_2 = \frac{P_0 V_0}{K} (K-1) \left[ \frac{K+1}{2} - (K+1) \right]$

$$W_2 = \frac{P_0 V_0}{2K} (K^2 - 1) \quad W_2 < 0$$

Pour la transformation (1) qui est une transformation isotherme  $\delta W = -PdV$

$$W_1 = -P_0 V_0 \ln K \quad W_1 < 0$$

Le principe de principe  $\Delta U = W + Q$  cette variation ne dépend que de l'état initial et de l'état final

$\Delta U = Q_1 + W_1 = Q_2 + W_2 = 0$

$Q_2 = -W_2 = \frac{P_0 V_0}{2K} (K^2 - 1)$

$Q_1 = W_1 = -P_0 V_0 \ln K$

On a  $PV = RT$  avec  $(P = aV + b)$  on alors  $V(aV + b) = RT$  (E)

On remplace a par son expression ainsi que b dans l'équation (E)

On rappelle que  $R = \frac{P_0 V_0}{T_0}$

On trouve  $T = \frac{T_0}{k} \left( \frac{V}{V_0} (k+1) - \frac{V^2}{V_0^2} \right)$

## **Exercice 11**

Un cylindre vertical de section  $S = 100 \text{ cm}^2$  est fermé par un piston horizontal de masse négligeable mobile sans frottement. Une masse  $m = 1 \text{ g}$  d'Hélium (gaz supposé parfait de masse molaire  $M = 4 \text{ g}$ ) est initialement enfermée dans le cylindre dans les conditions  $T_0 = 300 \text{ K}$  et  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . Les parois du piston et du cylindre sont imperméables à la chaleur.

**1-** On applique brutalement une force  $F = 1000 \text{ N}$  sur le piston. Le gaz prend un nouvel état

d'équilibre  $(P_1, V_1, T_1)$  Calculer le taux de compression  $X = \frac{P_1}{P_0}$

**2-** Exprimer  $\frac{V_1}{V_0}$  et  $\frac{T_1}{T_0}$  en fonction de  $X$  et  $\gamma$ .

**3-** Calculer numériquement, dans l'état d'équilibre final la température  $T_1$  du gaz et la hauteur  $h_1$  du piston au dessus du fond. Que devient cette hauteur si la force  $F$  est appliquée progressivement sur le piston jusqu'à ce que la pression soit  $P_1$

## Solution de l'exercice 11

1. On une transformation irréversible (application brutale)

La résultante des forces appliquée  $\vec{F} + \vec{F}_0 = \vec{F}_1$

$$F + P_0 S = P_1 S \Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 1 + \frac{F}{SP_0}$$

$$\text{A.N. } X = \frac{P_1}{P_0} = 2$$

2. le principe  $\Delta U = W + Q$  ( $Q=0$  car la transformation est adiabatique)

Et comme la transformation est irréversible  $W = -P_{\text{ext}}(V_1 - V_0)$

$$P_{\text{ext}} = P_1 = P_0 + F/S$$

D'autre part  $\Delta U$  ne dépend pas du chemin suivi

$$\Delta U = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1} \text{ car la transformation est adiabatique}$$

$$\text{donc } -P_1(V_1 - V_0) = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}$$

$$\text{avec } P_1 = X P_0 \text{ et on divise par } P_1 V_0 \text{ on a : } 1 - \frac{V_1}{V_0} = \frac{\frac{V_1}{V_0} - \frac{1}{X}}{\gamma - 1}$$

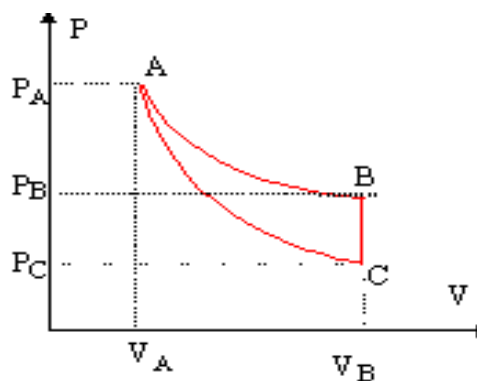
$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{X\gamma + 1 - X}{X\gamma} \text{ ou } \frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{1 - X}{X\gamma}$$

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = X - \frac{X - 1}{\gamma}$$

## Exercice. 12

Soit un cycle qui comprend une isotherme AB, une adiabatique CA, une isochore BC. La masse de gaz est constante.



On étudie le cycle ABCA. Les transformations sont réversibles. La masse d'air, assimilé à un G.P de  $m = 1\text{g}$ . Masse molaire  $29\text{ g/mol}$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $V_A = 8 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$ ;  $P_A = 10^6\text{ Pa}$ .  $P_A / P_C = 10$ .

**a-** Calculer  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$ ,  $P_B$ ,  $V_B$ ,  $V_C$ .

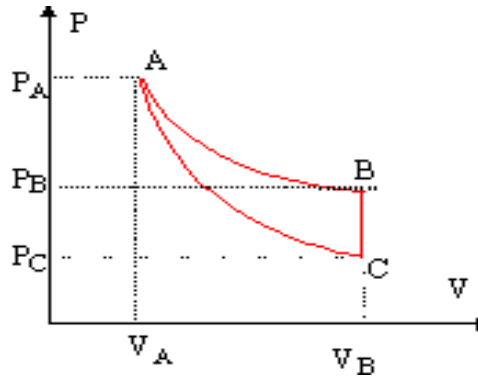
**b-** Calculer les travaux échangés avec l'extérieur au cours des transformations AB, BC, CA.

**c-** Calculer les quantités de chaleur échangées avec l'extérieur au cours des transformations AB, BC, CA.

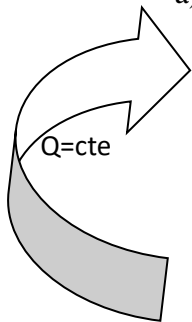
b- Vérifier le premier principe de la thermodynamique

## Solution de l'exercice 12

$n = m/M = 1/29$  mol avec  $m$  : est la masse et  $M$  la masse molaire



a) Calculer  $T_A, T_B, P_B, V_B$  et  $V_C$



Etat	T(K)	P(p <sub>a</sub> )	V (m <sup>3</sup> )
A	$T_A$	$P_A = 10^6$	$V_A = 8 \cdot 10^{-3}$
B	$T_B = T_A$	$P_B$	$V_B = V_C$
C	$T_C$	$P_C = 10^5$	$V_C$

En l'état A on a  $P_A V_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{P_A V_A}{nR}$

A.N.  $T_A = 280$  K et  $T_A = T_B$

De l'état C à l'état A on a une transformation adiabatique réversible alors

$$P_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_A = P_C^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C \Rightarrow T_C = \left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_A$$

A.N.  $T_C = 145$  K

De l'état B à l'état C on a une transformation isochore réversible ( $V_B = V_C$ ) alors

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C}$$

$$P_B = \frac{T_B}{T_C} \cdot P_C = \frac{T_A}{T_C} \cdot P_C$$

A.N.  $P_B = 1.95 \cdot 10^5$  p<sub>a</sub>

De l'état A à l'état B on a une transformation isotherme réversible ( $T_B = T_A$ ) alors

$$P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{P_A V_A}{P_B}$$

A.N.  $V_B = 4.1 \cdot 10^{-4}$  m<sup>3</sup> et  $V_C = V_B$

b. Calculons le travail échangé lors de la transformation isotherme AB

Pour un gaz parfait

$$W_{A \rightarrow B} = -P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -Q_{AB}$$

Calculons le travail échangé lors de la transformation adiabatique CA

$$W_{C \rightarrow A} = \frac{P_A V_A - P_C V_C}{\gamma - 1} = n c_V (T_A - T_C) \text{ et}$$

$$Q_{CA} = 0$$

Calculons le travail échangé lors de la transformation isochore BC

$$W_{BC}=0 \text{ car } dV=0$$

$$Q_{BC}=nc_V(T_C-T_B)$$

$$d. \quad \square U_{\text{cycle}}=W_{\text{cycle}}+Q_{\text{cycle}}$$

$$=W_{AB}+W_{BC}+W_{CA}+Q_{AB}+Q_{BC}+Q_{CA}$$

$$=-P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} + 0 + nc_V(T_A - T_C) + P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} + nc_V(T_C - T_B) + 0$$

$$\text{Or } T_A=T_B$$

$$\text{Donc } \square U_{\text{cycle}}=0$$

### Exercice 13

On fait décrire à une mole de gaz parfait un cycle **ABCD** décrit comme suit :

Le gaz parfait est comprimé de l'état **A** ( $P_A, V_A, T_A$ ) à l'état **B** ( $P_B=2P_A, V_B, T_B$ ) et détendu de l'état **C** ( $P_C=4P_A, V_C, T_C$ ) à l'état **D** ( $P_D, V_D, T_D$ ) par des transformations réversibles et isothermes

- Entre les états B et C et D et A le gaz subit une transformation adiabatique réversible

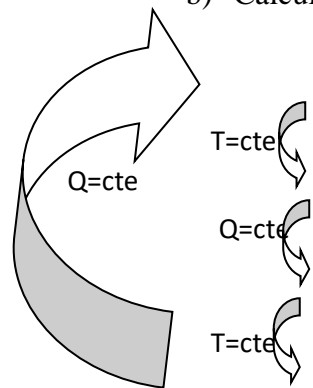
1- Déterminer les coordonnées des quatre points remarquables du cycle et représenter le dans le diagramme de Clapeyron

2- Déterminer le travail  $W$  ainsi que la quantité de chaleur échangée par le gaz pendant le cycle **ABCD** avec le milieu et vérifier le premier principe

4- Déterminer la variation d'entropie au cours de chaque transformation

### Solution de l'exercice 13

b) Calculer  $T_A, T_B, P_B, V_B$  et  $V_C$



Etat	P(p <sub>a</sub> )	V (m <sup>3</sup> )	T(K)
A	P <sub>A</sub>	V <sub>A</sub>	T <sub>A</sub>
B	P <sub>B</sub> =2P <sub>A</sub>	?	T <sub>B</sub> =T <sub>A</sub>
C	P <sub>C</sub> =4P <sub>A</sub>	?	?
D	?	?	T <sub>D</sub> =T <sub>C</sub>

De l'état A à l'état B on a une transformation isotherme réversible ( $T_B=T_A$ ) alors

$$P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{P_A V_A}{P_B} = \frac{V_A}{2}$$

De l'état B à l'état C on a une transformation adiabatique réversible alors

$$P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma \Rightarrow V_C = \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_B = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{V_A}{2}$$

$$V_C = 2^{-\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)} \cdot V_A$$

On détermine  $T_C$  on a

De l'état B à l'état C on a une transformation adiabatique réversible alors

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} \cdot T_B$$

$$T_C = T_A \left(\frac{V_A}{2} \frac{1}{2^{-\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)} \cdot V_A}\right)^{\gamma-1} = T_A 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

De l'état D à l'état A on a une transformation adiabatique réversible alors

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Rightarrow V_D = \left(\frac{T_A}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_A$$

Donc  $V_D = V_A 2^{-\frac{1}{\gamma}}$

De même on a  $P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma \Rightarrow P_D = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^\gamma$

Donc  $P_D = 2P_A$

2. Déterminons le travail du cycle ainsi sa quantité de chaleur

$$W_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

On rappelle que lors d'une transformation isotherme entre l'état I et l'état final F

Pour un gaz parfait

$$W_{I \rightarrow F} = -P_I V_I \ln \frac{V_F}{V_I} = -Q_{IF}$$

Et lors d'une transformation adiabatique réversible entre l'état I et l'état final F

Pour un gaz parfait

$$W_{I \rightarrow F} = \frac{P_F V_F - P_I V_I}{\gamma - 1} = C_V (T_F - T_I)$$

Donc

$$W_{\text{cycle}} = P_A V_A \ln 2 + \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1} - P_C V_C \ln \frac{V_D}{V_C} + \frac{P_A V_A - P_D V_D}{\gamma - 1}$$

On a  $P_A V_A = P_B V_B$  et  $P_D V_D = P_C V_C$

$$W_{\text{cycle}} = P_A V_A \ln 2 - P_A V_A 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \ln 2$$

$$Q_{\text{cycle}} = Q_{AB} + Q_{CD}$$

$$Q_{\text{cycle}} = -P_A V_A \ln 2 + P_A V_A 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \ln 2$$

On a alors  $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0$

3.  $\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$  or de A à B on a une transformation isotherme donc

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_A} Q_{AB} = -\frac{P_A V_A}{T_A} \ln 2$$

$\Delta S_{BC} = 0$  car la transformation adiabatique B à C

De même  $\Delta S_{DA} = 0$  car la transformation adiabatique D à A

On a de l'état C à D on a

$$\Delta S_{CD} = \int_C^D \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_C} Q_{CD} = \frac{P_A V_A}{T_A} \ln 2$$

Donc  $\Delta S_{\text{cycle}} = 0$

## **Exercice-14**

A- On considère une mole de gaz parfait que l'on peut faire passer réversiblement de l'état A( $P_0, V_0, T_0$ ) à l'état D( $P_3, V_3, T_3$ ) par trois chemins distincts.

Chemin AD: T<sup>r</sup> adiabatique triplant la pression initiale.

Chemin ABD: (AB) T<sup>r</sup> isobare ( $P = P_0$ ) suivie d'une T<sup>r</sup>(BD) isochore ( $V = V_3$ ).

Chemin ACD: (AC) isotherme ( $T = T_0$ ) suivie de la transformation (CD) isochore ( $V = V_3$ ).

1- Exprimer les coordonnées des points B, C et D en fonction de ( $P_0, V_0, T_0, \gamma$ ).

2- Calculer pour chaque chemin le travail et la quantité de chaleur échangée entre le gaz et le milieu extérieur.

3-Calculer la variation d'énergie interne, pour les trois chemins. Que peut-on conclure ?

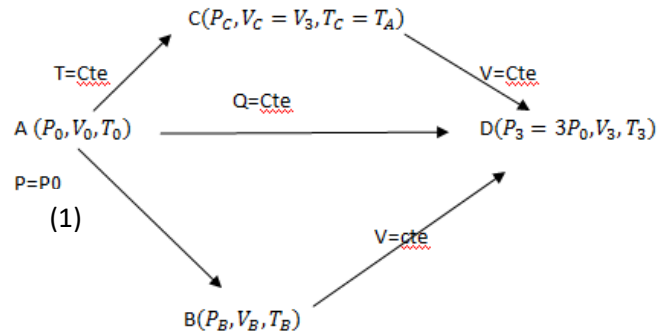
B-On se propose de comparer le rendement du moteur thermique fonctionnant selon le cycle (ABCD) et celui d'un moteur de Carnot utilisant les sources  $S_1$  à  $T_3$  et  $S_2$  à  $T_0$ , ( $T_3 > T_0$ ).

1-Calculer le rendement de ce moteur fonctionnant selon le cycle ABCDA.

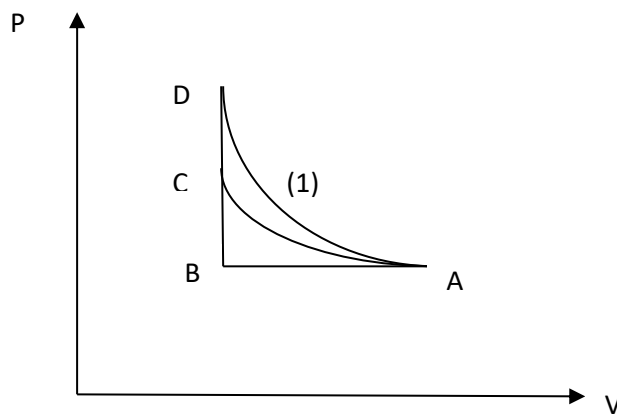
2-Comparer par le calcul ce rendement à celui du cycle de Carnot.

A.N :  $\gamma = 1,41$  ;  $(\frac{1}{3})^{1/\gamma} = 0,46$

### Solution de l'exercice 14



Le schéma comme suit



Les des points B, C et D en fonction ( $P_0, V_0, T_0$  et  $\gamma$ )

La transformation AD est une transformation adiabatique  $P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma \Rightarrow V_D = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{\gamma}} V_0$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = (3)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0$$

La transformation AC est une transformation isotherme  $P_A V_A = P_C V_C \Rightarrow P_C = P_0 3^{\frac{1}{\gamma}}$

La transformation AB est une transformation isobare  $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = T_0 3^{-\frac{1}{\gamma}}$

1. Les travaux et les quantités de chaleurs

Les travaux

$$\text{Chemin 1 } W_{AD} = \frac{P_D V_D - P_A V_A}{\gamma - 1} = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} (3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1)$$

$$\text{Chemin 2 } W_{ABD} = W_{AB} + W_{BD} = P_0 V_0 (1 - 3^{-\frac{1}{\gamma}})$$

Chemin 3  $W_{ACD} = W_{AC} + W_{CD} = -P_0 V_0 \ln \frac{V_C}{V_D} = \frac{P_0 V_0}{\gamma} \ln 3$

Les quantités de chaleurs

Chemin 1  $Q_{AD}=0$

Chemin 2  $Q_{ABD} = Q_{AB} + Q_{BD} = C_p(T_B - T_A) + C_v(T_D - T_B)$

Je vous rappelle que  $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$  et  $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$

On alors  $Q_{ABD} = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} \left( \gamma \left( 3^{-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) + 2 * 3^{-\frac{1}{\gamma}} \right)$

Chemin 3  $Q_{ACD} = Q_{AC} + Q_{CD} = P_0 V_0 \ln \frac{V_C}{V_D} + \frac{R}{\gamma-1} (T_D - T_C) = -\frac{P_0 V_0}{\gamma} \ln 3 + \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} \left( 3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$

2. La variation de l'énergie interne pour chaque chemin

Chemin 1  $\Delta U_1 = W_{AD} + Q_{AD} = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} \left( 3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$

Chemin 2  $\Delta U_2 = W_{ABD} + Q_{ABD} = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} \left( 3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$

Chemin 3  $\Delta U_3 = W_{ACD} + Q_{ACD} = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} \left( 3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$

Conclusion la variation de l'énergie interne  $\Delta U$  ne dépend pas du chemin suivi

Elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final

## Exercice-15

On fait subir à une mole de gaz parfait le cycle réversible suivant:

$A(P_1, V_1, T_1) \xrightarrow{(a)} B(P_2, V_2, T_2) \xrightarrow{(b)} C(P_3=P_2, V_3, T_3) \xrightarrow{(c)} D(P_4, V_4=V_1, T_4) \xrightarrow{(d)} A(P_1, V_1, T_1)$

(a) est une compression adiabatique.

(b) est une transformation isobare avec élévation de la température.

(c) est une détente adiabatique.

(d) est une transformation isochore avec diminution de la température.

On suppose connues les grandeurs  $P_1, T_1, P_2, T_3$ , le rapport  $\gamma = C_p/C_v$  (indépendant de la température) et la constante des gaz parfaits  $R$ .

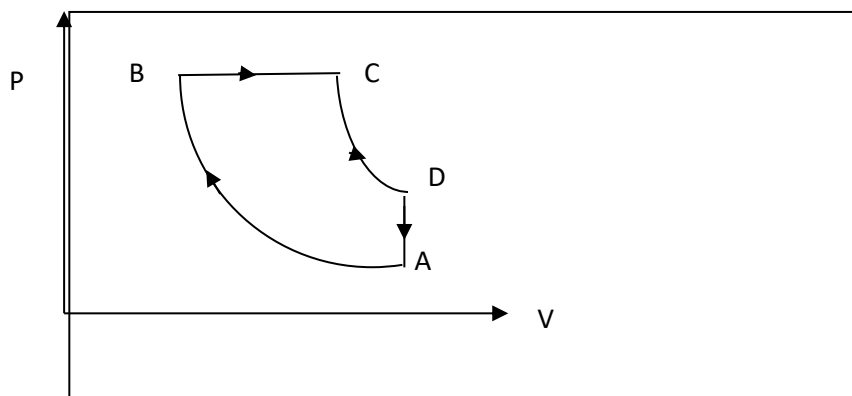
1- Donner l'expression de  $V_1, V_2, T_2, V_3, P_4$ , et  $T_4$  en fonction des grandeurs qui sont connues.

2-Si  $C_p$  et  $C_v$  sont les capacités thermiques molaires, donner l'expression des quantités de chaleur  $Q_b$  et  $Q_d$  échangées au cours des transformations (b) et (d) respectivement.

3-Soit  $W$  le travail échangé au cours du cycle (moteur) et  $\eta$  le rendement de ce cycle. Donner l'expression de  $\eta$  en fonction de  $\gamma, T_1, T_2, T_3$ , et  $T_4$ .

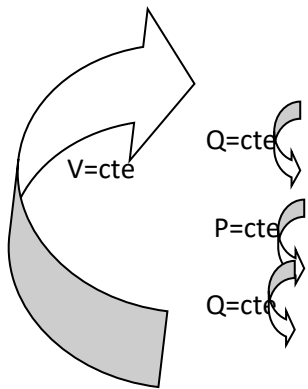
## Solution de l'exercice 15

$A(P_1, V_1, T_1) \xrightarrow{(a)} B(P_2, V_2, T_2) \xrightarrow{(b)} C(P_3 = P_2, V_3, T_3) \xrightarrow{(c)} D(P_4, V_4 = V_1, T_4) \xrightarrow{(d)} A(P_1, V_1, T_1)$





La transformation (a) est une transformation adiabatique



Etat	P	V	T
A	$P_1$	?	$T_1$
B	$P_2$	?	?
C	$P_3=P_2$	?	?
D	$P_4$	$V_4=V_1$	?

$$P_1 V_1 = RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{RT_1}{P_1}$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1$$

$$T_1 V_1^{1-\gamma} = T_2 V_2^{1-\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma}$$

De même  $T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

La transformation (b) est une transformation isobare

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow V_3 = T_3 \frac{V_2}{T_2} = T_3 \frac{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1}{T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma}} \text{ or } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Donc  $V_3 = \frac{T_3}{T_1} V_1^{1+\gamma}$

On a la transformation (c) est adiabatique

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \Rightarrow P_4 = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma P_3 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^\gamma \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\gamma$$

$$P_4 V_4 = RT_4 \Rightarrow T_4 = \frac{P_4 V_1}{R}$$

3.  $Q_b = C_p(T_3 - T_2)$  la quantité de chaleur échangée lors de la transformation isobare  
 $Q_d = C_v(T_1 - T_4)$  la quantité de chaleur échangée lors de la transformation isochore
4.  $W_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$   
 $= C_v(T_2 - T_1) - P_2(V_3 - V_2) + 0 + C_v(T_4 - T_3)$   
 $= C_v(T_2 - T_1) - RT_3 + RT_2 + C_v(T_4 - T_3) = C_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_3) + C_v(T_4 - T_3)$   
 $= (C_v + R)(T_2 - T_3) + C_v(T_4 - T_1) = C_p(T_2 - T_3) + C_v(T_4 - T_1) = -(Q_{BC} + Q_{DA})$

Le rendement est  $\eta = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{chaleur}}} = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$

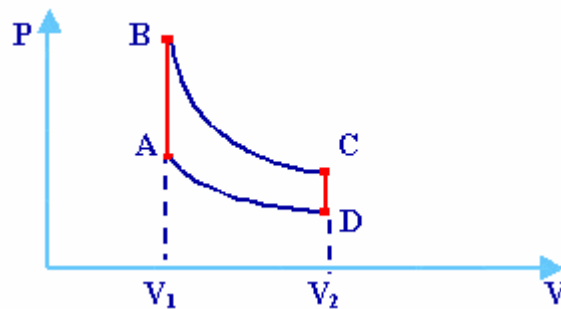
$$\eta = 1 + \frac{C_v}{C_p} \frac{(T_1 - T_4)}{(T_3 - T_2)} = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{(T_1 - T_4)}{(T_3 - T_2)}$$

## Exercice 16

Pour faire fonctionner une moissonneuse-batteuse, on utilise  $n$  moles d'un gaz parfait qui décrivent le cycle de Beau de Rochas dans le sens indiqué sur la figure. Les transformations **DA** et **BC** sont des adiabatiques alors que les transformations **CD** et **AB** sont des isochores. On désigne par  $a = V_2 / V_1$  le rapport des volumes (taux de compression).  $C_v$  est supposé constant pendant tout le cycle.

- 1– Exprimer la quantité de chaleur reçue par le gaz pendant l'explosion **AB** en fonction de  $T_A$  et  $T_B$ .
- 2– Déterminer le travail **W** fourni pendant le cycle en fonction des températures.
- 3– En déduire le rendement du cycle en fonction des températures.
- 4– Montrer que ce rendement s'exprime simplement en fonction de  $a$  et de  $\gamma$
- 5– Donner l'expression de la variation d'entropie au cours des différentes transformations

Application numérique :  $a = 9$ ;  $\gamma = 1,4$ .



### Solution de l'exercice 16