A continuous random variable X has the following cumulative distribution function (cdf):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & 2 \geq x \\ k \cdot x - \frac{2}{3}, & 2 < x \leq 5 \\ 1, & 5 < x \end{cases}$$

1) Show that the probability density function (pdf) is given as:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & 2 \geq x \\ k, & 2 < x \leq 5 \\ 0, & 5 < x \end{cases}$$

Tæthedsfunktionen er givet ved (cdf differentieret giver pdf)

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{dF}_x(x)}{\mathrm{dx}}$$

–

$$2 \geq x : \frac{\mathrm{dF}_x(x)}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d0}}{\mathrm{dx}} = 0$$

–

$$2 < x \leq 5 : \frac{\mathrm{dF}_x(x)}{\mathrm{dx}} = \frac{d\left(k \cdot x - \frac{2}{3}\right)}{\mathrm{dx}} = k$$

for at være sikre kan vi differentiere denne funktion *i* mathcad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k \cdot x - \frac{2}{3}\right) \to k$$

–

$$5 < x : \frac{\mathrm{dF}_x(x)}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d0}}{\mathrm{dx}} = 0$$

Ligesom for $2 \geq x$ kan vi udføre samme udregning og få samme resultat.

2) For hvilken værdi af k er $f_X(x)$ en gyldig tæthedsfunktion? Begrund svaret.

Vi ved at for alle mulige værdier ved vi at resultatet skal give 1. I dette eksperiment er vores samplespace et interval fra 2-5, derfor kan vi opskrive nedenstående funktion.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,\mathrm{dx} = 1 \Rightarrow \int_{2}^{5} k\,\mathrm{dx} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

Ved brug af mathcad kan vi sikre os svaret

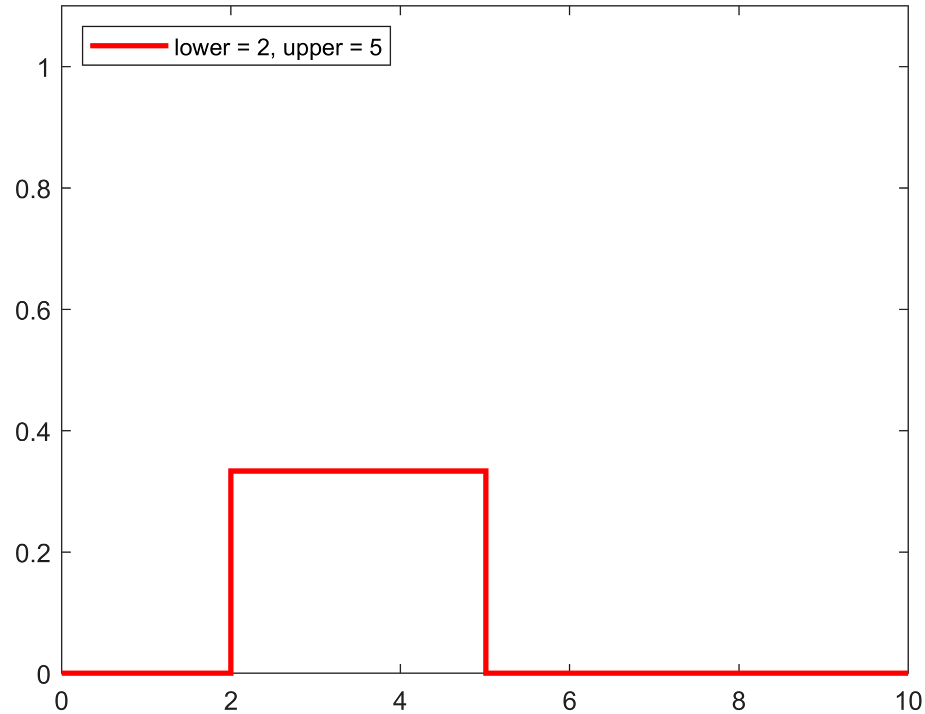
$$\int_{2}^{5} k\,\mathrm{d}x = 1 \xrightarrow{solve,k} \frac{1}{3}$$

3) Skitsér tæthedsfunktionen og angiv navnet på fordelingsfunktionen.

```
% Create three distribution objects with different parameters
pd1 = makedist('Uniform','lower',2,'upper',5);

% Compute the pdfs
x = 0:.01:10;
pdf1 = pdf(pd1,x);

% Plot the pdfs
figure;
stairs(x,pdf1,'r','LineWidth',2);
hold on;
ylim([0 1.1]);
legend({'lower = 2, upper = 5'},'Location','NW');
hold off;
```



En skitse af tæthedsfunktionen kan ses på grafen. Navnet på fordelingfunktionen er en uniformfordeling $U(2, 5)$

4) Brug $F_X(x)$ til at beregne sandsynligheden $\Pr(x \geq 3)$. Antag at $k = \frac{1}{3}$.

For at beregne $\Pr(x \geq 3)$ skal vi udregne sandsynligheden for at $\Pr(x < 3)$. Det udregner vi ved at indsætte 3 i vores CDF hvilket betyder at vi skal udregne $F_x(x = 3)$ (det er det samme som $F_x(3)$). Når dette er udregnet trækker vi resultatet fra 1. så vi ender med $1 - F_x(x = 3) = 1 - \Pr(x < 3) = \Pr(x \geq 3)$

```
1-((1/3)*3-(2/3))
```

```
ans = 0.6667
```

0.6667 svarer til $\frac{2}{3}$, hvilket betyder at $\Pr(x \geq 3) = \frac{2}{3}$

5) Bestem forventningsværdien og variansen af X udfra $f_X(x)$. Angiv desuden hvilken formler, der bruges til at bestemme værdierne. Antag at $k = \frac{1}{3}$.

NOTE:Forventningsværdi=Expected value

NOTE:Varians = Variance

EXPECTED VALUE:

Ved antagelsen at $k = \frac{1}{3}$ kan vi skrive $f_x(x)$ således:

$$f_x(x) = \frac{1}{3}$$

For udregning af forventningsværdi bruger vi denne formel:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\mathrm{dx}$$

hvilket giver os:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\mathrm{dx} = \int_{2}^{5} x \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{dx} \Rightarrow \frac{7}{2}$$

$$\int_{2}^{5} x \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{7}{2}$$

I det at vi ved at dette er en uniformfordeling kan vi slå og i en tabel og se at en muligformel er :

$$E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

Variance:

variancen af x kan findes ved nedenstående formel:

$$\mathrm{var}(x) = E|X^2| - E|X|^2$$

Vi har allerede fundet forventnings værdien $E[X]$ og derfor ved vi at $E\Big|X|^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

Vi skal derfor finde $E|X^2|$, hvilket udføres ved samme formel som der blev brugt til at finde forventningsværdien dog hvor x udskiftes med x^2 derfor kan vi skrive formlen:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_x(x)\mathrm{dx} = \int_2^5 x^2 \cdot \frac{1}{3}\ \mathrm{dx} \Rightarrow 13$$

$$\int_2^5 x^2 \cdot \frac{1}{3} \, \mathrm{d}x \rightarrow 13$$

Vi kan nu udregne variancen.

```
13-(7/2)^2
```

```
ans = 0.7500
```

$$\mathrm{var}(x) = E\left|X^2\right| - E\left|X\right|^2 = 13 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 0.75 = \frac{3}{4}$$

vi har derfor en forventningsværdi på $E[X] = \frac{7}{2}$ og en varians på $\mathrm{var}(x) = \frac{3}{4}$