অধ্যায় ১

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

MATRICES & DETERMINANT

১.১. ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা (Definition of Matrix)

সংজ্ঞা

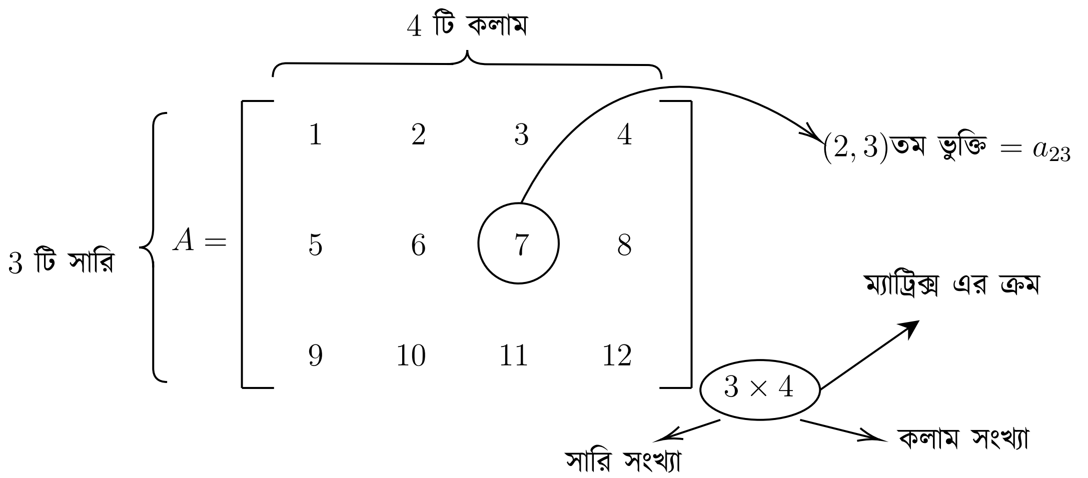
নির্দিষ্ট সংখ্যক সংখ্যা, প্রতীক বা রাশি এর আয়তাকার বিন্যাসকে ম্যাট্রিক্স (Matrix) বলে।

$$\begin{array}{c} \\ \text{Example: } A = [a_{ij}] = \end{array}
\begin{array}{cccc}
\text{১ম কলাম} & \text{২য় কলাম} & \cdots & n\text{-তম কলাম} \\
\downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\
\end{array}$$

$$\text{Example: } A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ ১ম সারি} \\ \rightarrow \text{ ২য় সারি} \\ \quad\ \vdots \\ \rightarrow m\text{-তম সারি} \end{array}$$

যেখানে, সারি $i = 1, 2, \cdots, m$ এবং কলাম $j = 1, 2, \cdots, n$
একটি $m \times n$ (সারি সংখ্যা by কলাম সংখ্যা) আকারের ম্যাট্রিক্স।
ম্যাট্রিক্স বোঝাতে [ ], ( ) বা || || ব্যবহার করা হয়।

- **ভুক্তি (Entry):** ম্যাট্রিক্স অন্তর্গত সংখ্যাগুলিকে ভুক্তি (Entry) বলে। a_{ij} হলো (i, j) -তম ভুক্তি যেখানে $i =$ সারি নাম্বার এবং $j =$ কলাম নাম্বার।
- **ক্রম (Order):** কোন ম্যাট্রিক্স এর সারির সংখ্যা m ও কলাম সংখ্যা n হলে $m \times n$ কে ঐ ম্যাট্রিক্স এর ক্রম (Order) বলে।



চিত্র ১.১: একটি ম্যাট্রিক্স

১.২. ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদ (Classification of Matrix)

১. **আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular Matrix):** যদি কোনো $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স এ $m \neq n$ হয় তবে তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে। Example: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ একটি 2×3 আকারের আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

২. **সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix):** কেবল একটি সারি সম্বলিত ম্যাট্রিক্স কে সারি মাত্রিক্সক বলে। Example: $\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}_{1\times 3}$ একটি 1×3 ক্রমের সারি ম্যাট্রিক্স।

৩. **কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix):** কেবল একটি কলাম সম্বলিত ম্যাট্রিক্স কে কলাম ম্যাট্রিক্স বলে। Example: $\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ একটি 3×1 আকারের কলাম ম্যাট্রিক্স।

৪. **বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix):** কোনো ম্যাট্রিক্স এর সারি ও কলাম সংখ্যা সমান $(m = n)$ হলে তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। Example: $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ একটি 3×3 বর্গ ম্যাট্রিক্স।

- **মুখ্যকর্ণ (Principal Diagonal):** ম্যাট্রিক্স $(1, 1)$-তম ভুক্তিগামি কর্ণকে মুখ্যকর্ণ বলে। Example: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- **গৌণকর্ণ (Anti-diagonal):** কোনো $m \times m$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এর $(1, m)$ বা $(m, 1)$-তম ভুক্তিগামি কর্ণকে গৌণকর্ণ বলে।

  Example: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **ট্রেস (Trace):** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স এর মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলোর সমষ্টিকে ট্রেস বলে।

  Example: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস$= a_{11} + a_{22} + a_{33}$

৫. **কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix):** যে বর্গ ম্যাট্রিক্স এর মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলো ব্যতীত বাকি সকল ভুক্তিগুলো শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।

Example: $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স যেখানে $a \neq b \neq c \neq 0$।

৬. **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):** কর্ণ ম্যাট্রিক্স এর অশূন্য ভুক্তিগুলো সমান হলে তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

Example: $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স যেখানে $k \neq 0$।

৭. **অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity Matrix):** স্কেলার ম্যাট্রিক্স এর অশূন্য ভুক্তিগুলোর মান 1 হলে তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে। একে I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

Example: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$।

৮. **শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null Matrix):** যে ম্যাট্রিক্স এর সকল ভুক্তি শূন্য তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলে।

Example: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$।

৯. **ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Triangular Matrix):** যে বর্গ ম্যাট্রিক্স এর মুখ্য কর্ণের নিচে বা উপরের ভুক্তিগুলো শূন্য তাকে ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

Example: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$।

- **ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Upper Triangular Matrix):** বর্গ ম্যাট্রিক্স এর মুখ্য কর্ণের নিচের সকল ভুক্তি শূন্য।

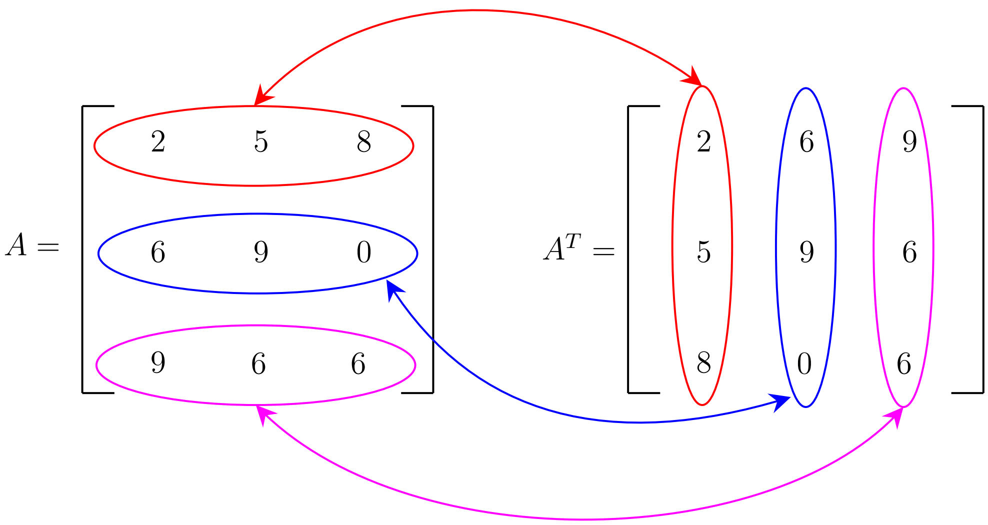
  Example: $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ যেখানে $a_{ij} = 0$ এবং $i > j$।

- **নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Lower Triangular Matrix):** বর্গ ম্যাট্রিক্স এর মুখ্য কর্ণের উপরের সকল ভুক্তি শূন্য।

  Example: $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ যেখানে $a_{ij} = 0$ এবং $i < j$।

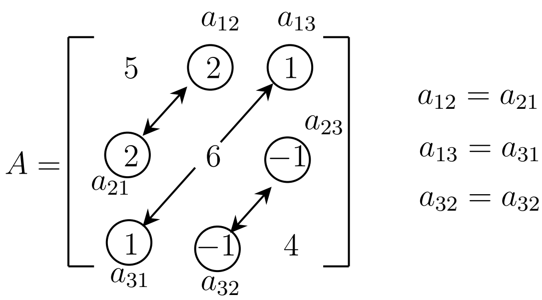
১০. **বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose Matrix):** কোনো ম্যাট্রিক্স A এর কলামগুলোকে সারি এবং সারিগুলোকে কলাম এ পরিনত করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ঐ ম্যাট্রিক্স এর বিম্ব ম্যাট্রিক্স বলে যাকে A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 6 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$।



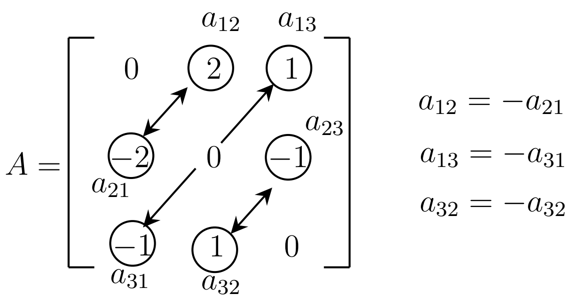
চিত্র ১.২: বিম্ব ম্যাট্রিক্স

১১. **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix):** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ এবং এর ট্রান্সপজ ম্যাট্রিক্স পরস্পর সমান হলে অর্থাৎ $a_{ij} = a_{ji}$ তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়। Example: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ এখানে $A = A^T$। সুতরাং A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।



চিত্র ১.৩: প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

১২. **বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew-Symmetric Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ এর জন্য $A = -A^T$ হলে অর্থাৎ $a_{ij} = -a_{ji}$ তাকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। Example: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ যেখানে $A = -A^T$। সুতরাং A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।



চিত্র ১.৪: বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

Note: বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স এর মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য হয়।

১৩. **হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Hermitian Matrix):** কোনো ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ কে Hermitian Matrix বলা হবে যদি $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ হয় যেখানে $\overline{a_{ij}}$ দ্বারা (i, j)-তম ভুক্তির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বুঝায়।

Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & 3 & i \\ 4 & -i & 1 \end{bmatrix}$।

Note:
যেকোনো জটিল সংখ্যাকে $x = a + ib$ আকারে লেখা যায়।
যেখানে, $a =$বাস্তব অংশ ও $b =$জটিল অংশ।
x এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে $\bar{x} = a - ib$।
অর্থাৎ জটিল অংশের চিহ্ন উল্টিয়ে দিলেই অনুবন্ধী পাওয়া যায়।
Example:

(i) $x = 2 + i$ হলে $\bar{x} = 2 - i$

(ii) $x = 2 - 3i$ হলে $\bar{x} = 2 + 3i$

(iii) $x = 2$ হলে $\bar{x} = 2$ (বাস্তব অংশের চিহ্ন পরিবর্তন হয় না)

(বিস্তারিত উচ্চতর গণিত ২য় পত্র জটিল সংখ্যা অধ্যায়)

১৪. **স্কিউ-হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Skew-Hermitian Matrix):** কোনো ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ কে Skew-Hermitian Matrix বলা হবে যদি $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ হয় যেখানে $\overline{a_{ij}}$ দ্বারা (i, j)-তম ভুক্তির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বুঝায়।

Example: $A = \begin{bmatrix} i & 2+i & 3-4i \\ -2+i & 0 & 4+5i \\ -3-4i & -4+5i & 3i \end{bmatrix}$।

১৫. **উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub-matrix):** কোনো ম্যাট্রিক্স এর যেকোনো সংখ্যক সারি ও কলাম এর ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্স এর উপ-ম্যাট্রিক্স বলে।

Example: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স এর উপ-ম্যাট্রিক্স

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$।

১৬. **বর্গ ম্যাট্রিক্সের ঘাতের উপর ভিত্তি করে কিছু প্রকারভেদঃ**

> কোনো ম্যাট্রিক্স A এর ঘাত k বলতে বুঝায় ম্যাট্রিক্সটিকে k সংখ্যকবার গুণ করা। অর্থাৎ $A^k = A.A \ldots k$ সংখ্যক

(i) **পিরিওডিক ম্যাট্রিক্স (Periodic Matrix):**
$A^k = A$ হলে, A একটি পিরিওডিক ম্যাট্রিক্স যার পিরিয়ড k।
$k = 2$ একে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix) বলা হয়।
Example: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ কারণ
$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

(ii) **অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (Involutory Matrix):**
$A^2 = A.A = I$ হলে, A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।
Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ কারণ
$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

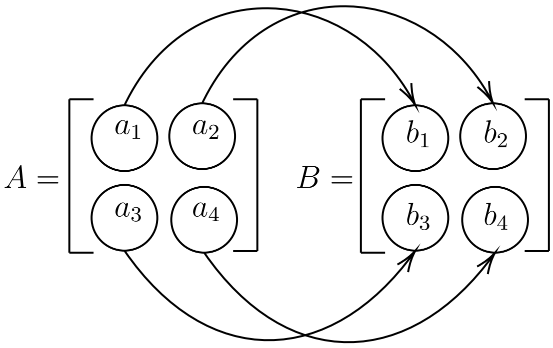
(iii) **শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (Nilpotent Matrix):**
ক্ষুদ্রতম স্বাভাবিক সংখ্যা k এর জন্য A^k শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে A একটি শুন্নঘাতি ম্যাট্রিক্স। এই k কে শুন্নঘাতির সূচক বা ধাত (index) বলে।
Example: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ কারণ
$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
সুতরাং A একটি শুন্নঘাতি ম্যাট্রিক্স যার সূচক 2।

১.৩. ম্যাট্রিক্স এর সমতা (Equality of Matrices)

দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B সমান হবে যদি ও কেবল যদি,

১. A ও B এর ক্রম (order) সমান হয়।

২. A ও B এর অনুরুপ ভুক্তিগুলো সমান হয়।



$$A = B$$

$$a_1 = b_1 \qquad a_3 = b_3$$
$$a_2 = b_2 \qquad a_4 = b_4$$

$$\begin{bmatrix} 4x - 5y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 4x - 5y = 1$$
$$\therefore\ 3x + 2y = 0$$

চিত্র ১.৫: ম্যাট্রিক্স এর সমতা

১.৪. ম্যাট্রিক্স এর যোগ-বিয়োগ (Addition & Subtraction of Matrices)

যদি দুইটি একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix}$ এর জন্য

$A \pm B = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 & a_2 \pm b_2 & a_3 \pm b_3 \\ a_4 \pm b_4 & a_5 \pm b_5 & a_6 \pm b_6 \\ a_7 \pm b_7 & a_8 \pm b_8 & a_9 \pm b_9 \end{bmatrix}$ ।

Example: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ হলে,

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -1+0 \\ 3+5 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 & -1-0 \\ 3-5 & 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

১.৫. ম্যাট্রিক্স এর গুণন (Multplication of Matrices)

১.৫.১. ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক (Scalar Multiple of a Matrix)

কোনো ম্যাট্রিক্স A কে কোনো একটি ধ্রুব সংখ্যা k দ্বারা গুন করলে kA ম্যাট্রিক্স এর প্রতিটি ভুক্তি k দ্বারা গুন করতে হবে।

Example: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ হলে $\therefore kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$।

১.৫.২. দুইটি ম্যাট্রিক্স এর গুণন (Multiplication of Two Matrices)

দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B গুণের শর্তঃ

- ◇ **A এর কলাম সংখ্যা ও B এর সারি সংখ্যা সমান হতে হবে।**

যদি A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times l$ হয় তবে AB সংজ্ঞায়িত কিন্তু BA সংজ্ঞায়িত নয় কারণ $l \neq m$।

ম্যাট্রিক্স গুণের নিয়ম

১. A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রতিটি ভুক্তি B ম্যাট্রিক্সের প্রথম কলাম এর অনুরূপ ভুক্তির সাথে গুণ করতে হবে। এই গুণফলগুলির বীজগাণিতিক সমষ্টি হবে AB ম্যাট্রিক্স এর প্রথম সারির প্রথম ভুক্তি। অনুরুপভাবে A ম্যাট্রিক্সের ১ম সারির ভুক্তিগুলোকে যথাক্রমে B ম্যাট্রিক্সের ২য় কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলোর সাথে গুণ করে যোগ করলে AB ম্যাট্রিক্স এর ১ম সারির ২য় ভুক্তিটি পাওয়া যাবে। এভাবে অগ্রসর হয়ে AB ম্যাট্রিক্সের ১ম সারির সবগুল ভুক্তি বের করতে হবে। (চিত্র ১.৬)

২. নিয়ম ১ এর প্রক্রিয়ায় AB এর সবগুল সারি নির্ণয় করতে হবে।

1st Row $\times$ *1st Column*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2\times1+5\times2+8\times0 & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

1st Row $\times$ *2nd Column*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 12 & 2\times0+5\times1+8\times3 & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 29 & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

1st Row $\times$ *3rd Column*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 12 & 29 & 2\times1+5\times0+8\times1 \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 29 & 10 \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

2nd Row $\times$ *1st Column*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 12 & 29 & 10 \\ 6\times1+9\times2+0\times0 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 29 & 10 \\ 24 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

3rd Row $\times$ *3rd Column*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 12 & 29 & 10 \\ 24 & 9 & 6 \\ 21 & 24 & 9\times1+6\times0+6\times1 \end{bmatrix} = \underset{AB}{\begin{bmatrix} 12 & 29 & 10 \\ 24 & 9 & 6 \\ 21 & 24 & 15 \end{bmatrix}}$$

চিত্র ১.৬: ম্যাট্রিক্স এর গুণন

Example: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে AB ও BA নির্ণয় কর।

Solution: যেহেতু A এর ক্রম 2×3 এবং B এর ক্রম 3×2 তাই AB এবং BA উভয় সংজ্ঞায়িত।

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times -1 + 0 \times 4 + -2 \times 2 & 1 \times 3 + 0 \times 0 + -2 \times 6 \\ 3 \times -1 + -2 \times 4 + -1 \times 2 & 3 \times 3 + -2 \times 0 + -1 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 1 + 3 \times 3 & -1 \times 0 + 3 \times -2 & -1 \times -2 + 3 \times -1 \\ 4 \times 1 + 0 \times 3 & 4 \times 0 + 0 \times -2 & 4 \times -2 + 0 \times -1 \\ 2 \times 1 + 6 \times 3 & 2 \times 0 + 6 \times -2 & 2 \times -2 + 6 \times -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 4 & 0 & -8 \\ 20 & -12 & -10 \end{bmatrix}$$

Note: A ও B এর ক্রম যথাক্রমে $m \times n$ ও $n \times l$ হলে AB এর ক্রম হবে $(m \times l)$

১.৬. নির্ণায়ক এর সংজ্ঞা (Definition of Determinant)

প্রত্যেক বর্গ ম্যাট্রিক্স সংশ্লিষ্ট একটি গুরুত্বপূর্ণ সংখ্যারাশি রয়েছে যাকে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক (Determinant) বলা হয়। কোনো ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ হলে এর নির্ণায়ককে $|A|$ বা $det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যার মান $a_1 b_2 - a_2 b_1$। অনুরুপভাবে $B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক $|B| = det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$।

- **নির্ণায়ক এর মুখ্যপদঃ** নির্ণায়ক এর মুখ্যকর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলোর গুনফল।

  Example: $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর জন্য মুখ্যপদ $a_1b_2c_3$।

- **নির্ণায়ক এর মাধ্যমিক পদঃ** নির্ণায়ক এর গৌণকর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলোর গুনফল।

  Example: $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর জন্য মাধ্যমিক পদ $a_3b_2c_1$।

১.৬.১. নির্ণায়ক এর অনুরাশি ও সহগুণক (Minor & Co-factor of determinant)

- **অনুরাশি (Minor):** কোনো নির্ণায়ক $|A|$ এর (i, j)-তম ভুক্তি a_{ij} যে সারি ও যে কলামে অবস্থিত সে সারি (i) ও সে কলাম (j) ব্যাতীত অবশিষ্ট ভুক্তি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে উক্ত ভুক্তির অনুরাশি (Minor) বলে।

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix} \qquad (1,1) \text{ তম ভুক্তির সহগুনক} = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix} \qquad (2,2) \text{ তম ভুক্তির সহগুনক} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

চিত্র ১.৭: অনুরাশি (Minor)

Example:
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এর জন্য a_{11} এর বা $(1,1)$-তম ভুক্তির অনুরাশি $|a_{22}| = a_{22}$।

আবার $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ এর জন্য a_{11} এর বা

$(1,1)$-তম ভুক্তির অনুরাশি $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

> **Note:** একটিমাত্র ভুক্তি সম্বলিত নির্ণায়ক এর মান ঐ ভুক্তির মানের সমান।

- **সহগুণক (Co-factor):** কোনো নির্ণায়ক $|A|$ এর কোনো ভুক্তি a_{ij} এর যথাযথ চিহ্নযুক্ত অনুরাশিকে ঐ ভুক্তির সহগুণক (Co-factor) বলে যাকে A_{ij} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। (i,j)-তম ভুক্তি a_{ij} এর চিহ্ন হবে $(-1)^{i+j}$।

  Example:

  একটি 2×2 নির্ণায়ক $D \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$ এর ভুক্তিগুলোর সহগুণকগুলো যথাক্রমে

  $D_{11} = (-1)^{1+1}|d_{22}| = d_{22}$
  $D_{12} = (-1)^{1+2}|d_{21}| = -d_{21}$
  $D_{21} = (-1)^{2+1}|d_{12}| = -d_{12}$
  $D_{22} = (-1)^{2+2}|d_{11}| = d_{11}$

  আবার একটি 3×3 নির্ণায়ক $A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ এর ভুক্তিগুলোর সহগুণকগুলো যথাক্রমে

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Note:

- $(i+j)$ জোড় হলে চিহ্ন $(+)$ এবং বিজোড় হলে চিহ্ন $(-)$
- $\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}_{2\times2}, \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}_{3\times3}, \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}_{4\times4}$

১.৭. নির্ণায়ক এর মান ও বিস্তৃতি (Value & Expansion of Determinant)

কোনো নির্ণায়ক এর যেকোনো একটি সারি বা কলামের ভুক্তিসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহগুণকের গুণফলের সমষ্টিই নির্ণায়ক এর মান।

Example:

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

আবার,

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

১.৭.১. সহগুণকের মাধ্যমে নির্ণায়ক এর বিস্তৃতি (Expansion of Determinant using Co-factor)

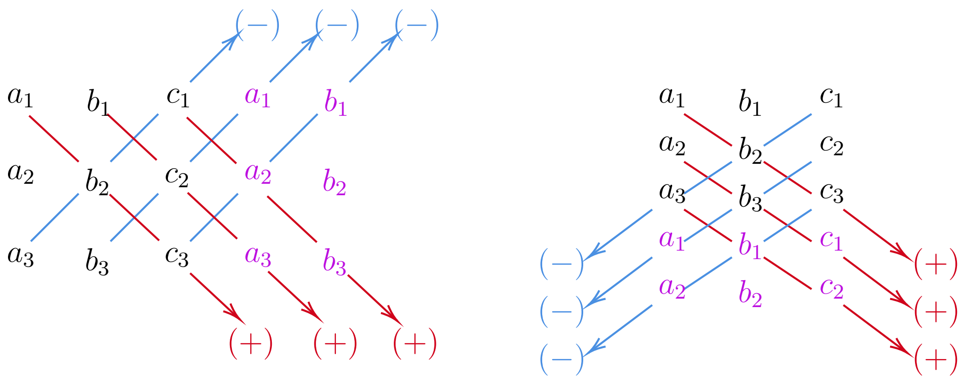
$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়ক এর প্রথম সারির a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1।

$\therefore D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ (১ম সারি বরাবর বিস্তৃতি)

অনুরূপভাবে

$$\begin{aligned} D &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 && \text{(২য় সারি বরাবর বিস্তৃতি)} \\ &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 && \text{(৩য় সারি বরাবর বিস্তৃতি)} \\ &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 && \text{(১ম কলাম বরাবর বিস্তৃতি)} \\ &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 && \text{(২য় কলাম বরাবর বিস্তৃতি)} \\ &= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 && \text{(৩য় কলাম বরাবর বিস্তৃতি)} \end{aligned}$$

১.৭.২. সারাস চিত্রের মাধ্যমে নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expansion of Determinant Using Sarrus Diagram)



চিত্র ১.৮: 3×3 নির্ণায়কের সারাস চিত্র

কোনো ম্যাট্রিক্স $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর মান D দ্বারা সূচিত হলে সারাস চিত্র (চিত্র ১.৮) অনুযায়ী লাল রেখা বরাবর গুণ করলে $(+)$ চিহ্নযুক্ত পদগুলো পাওয়া যায় এবং নীল রেখাগুলো বরাবর গুণ করলে $(-)$ চিহ্নযুক্ত পদগুলো পাওয়া যায়।

$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$

১.৮. নির্ণায়ক এর ধর্মাবলী (Properties of Determinant)

১. নির্ণায়ক এর কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি শূন্য হলে নির্ণায়ক এর মান শূন্য হবে।

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

২. নির্ণায়ক এর সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়ক এর মান একই থাকে।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

৩. নির্ণায়কের দুইটি সারি অথবা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়ক এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয় কিন্তু সাংখ্যিক মান একই থাকে।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ এবং } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

অনুসিদ্ধান্ত ১.৮.১: এই ধর্মের পর্যায়ক্রমিক প্রয়োগের দ্বারা একটি কলাম বা একটি সারিকে এক অবস্থান থেকে অন্য যেকোনো অবস্থানে নেয়া যায়। একবারে শুধুমাত্র দুইটি কলাম বা সারিতে এটি প্রয়োগ করা যাবে।

৪. নির্ণায়কের দুইটি সারি বা দুইটি কলাম সমান হলে নির্ণায়ক এর মান শূন্য হবে।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

৫. নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির ভুক্তিগুলো কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা দ্বারা করলে, নির্ণায়কের মানও ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ হয়।

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

অনুরূপভাবে, $\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

৬. **নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলাম এর ভুক্তিগুলোর সাথে অপর কোনো সারি বা কলাম এর সংশ্লিষ্ট সহগুণকগুলি দ্বারা যথাক্রমে গুণ করলে প্রাপ্ত গুণফলগুলোর বীজগাণিতিক সমষ্টি শূন্য হবে।**

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ এর জন্য}$$

$$\begin{aligned} a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, &\quad a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0, \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0, &\quad a_1A_3 + a_2A_1 + a_3A_2 = 0, \\ \cdots \quad \cdots, &\quad c_1C_3 + c_2C_1 + c_3C_2 = 0 \end{aligned}$$

৭. **নির্ণায়ক এর একটি সারি বা কলাম এর ভুক্তিগুলোর প্রত্যেকটি দুইটি ভুক্তির বীজগাণিতিক সমষ্টিরূপে গঠিত হলে, ঐ নির্ণায়কটিকে দুইটি নির্ণায়ক এর বীজগাণিতিক সমষ্টি আকারে প্রকাশ করা যায়।**

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

অনুরুপভাবে,

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm \alpha_1 & b_1 \pm \alpha_2 & c_1 \pm \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

৮. **নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের প্রত্যেকটি ভুক্তিকে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর কোনো সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলোর সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে নির্ণায়ক এর মান একই থাকে।**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \; [\boldsymbol{c_1' = c_1 \pm mc_2}]$$

অনুরুপভাবে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm ma_2 & b_1 \pm mb_2 & c_1 \pm mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \; [\boldsymbol{r_1' = r_1 \pm mr_2}]$

Note: নির্ণায়কের সারিগুলোকে $r_1, r_2, r_3, \cdots$ দ্বারা প্রকাশ করা হলে উপরুক্ত ধর্মগুলো প্রয়োগ করার পর সারিগুলোকে $r_1', r_2', r_3', \cdots$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কলাম এর ক্ষেত্রে $c_1', c_2', c_3', \cdots$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

১.৯. ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী ও অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Singular, Non-singular & Adjoint Matrix)

ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular & Non-singular Matrix)

সংজ্ঞাঃ যে সকল বর্গ ম্যাট্রিক্স এর নির্ণায়কের মান শূন্য তাদের ব্যাতিক্রমী (Singular) এবং যে সকল বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান অশূন্য তাদের অব্যতিক্রমী (Non-singular) ম্যাট্রিক্স বলে।

মনেকরি, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার নির্ণায়ক কে $|A| = |a_{ij}|_{m\times m}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
যদি $|A| = 0$ হয়, তবে A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী (Singular)।
যদি $|A| \neq 0$ হয়, তবে A ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী (Non-singular)।
Example:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি নির্ণায়ক,

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = -3 + 12 - 9 = 0$$

$\therefore A$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী।

আবার, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি নির্ণায়ক,

$$\therefore |B| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0$$

$\therefore B$ ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী।

অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Adjoint Matrix)

সংজ্ঞাঃ কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকগুলি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স (ভুক্তির ক্রমানুসারে) এর বিম্ব (Transpose) ম্যাট্রিক্সকে অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Adjoint Matrix) বলে। A ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী মাত্রিক্সকে $Adj(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

Example: মনেকরি, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$|A|$ এর সহগুণকগুলর নিম্নরুপঃ

$$A_{11} = 2 - 3 = -1, \quad A_{12} = -(1-9) = 8, \quad A_{13} = 1 - 6 = -5$$
$$A_{21} = -(1-2) = 1, \quad A_{22} = 0 - 6 = -6, \quad A_{23} = -(0-3) = 3$$
$$A_{31} = 3 - 4 = -1, \quad A_{32} = -(0-2) = 2, \quad A_{33} = 0 - 1 = -1$$

$|A|$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

১.১০. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix of Square Matrix)

সংজ্ঞা

$n \times n$ মাত্রার দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A ও B এর জন্য যদি $AB = BA = I_n$ হয়, তবে এদের একটিকে অপরটির বিপরীত (Inverse) ম্যাট্রিক্স বলে। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

Note:

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- A ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স তখনই বিদ্যমান যখন $|A| \neq 0$ অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী (Non-singular)।

১.১০.১. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের পদ্ধতি

অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Adjoint Matrix Method)

মনেকরি, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ $|A| \neq 0$।
A ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিগুলোর সহগুণকগুলোকে $A_1, B_1, C_1, \cdots$ দ্বারা প্রকাশ করা হলে,
$$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore A \cdot Adj(A) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} \quad \text{(অনুচ্ছেদ ১.৭ এবং অনুচ্ছেদ ১.৮ ধর্ম ৬)} \\
&= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(অনুচ্ছেদ ১.৫.১)}
\end{aligned}$$

$$\therefore A \cdot \frac{Adj(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (১.১০.১)$$

ধরি, $B = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$ তাহলে সমীকরণ (১.১০.১) হতে পাই $AB = I_3$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

Example: মনেকরি, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6) = -2 \neq 0$।

সুতরাং A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা সম্ভব।

$|A|$ এর সহগুণকগুলর নিম্নরুপঃ

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-9) = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0-6 = -6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(0-3) = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0-1 = -1$$

$$\therefore Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^{-1} &= \frac{Adj(A)}{|A|} \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (Answer)$$

বীজগাণিতিক পদ্ধতি (Algebraic Method)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1} নির্ণয়ঃ

মনেকরি, $AX = B$, যেখানে $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. তাহলে $X = A^{-1}B$

এখন,

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0x + 1y + 2z \\ 1x + 2y + 3z \\ 3x + 1y + 1z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$y + 2z = a \tag{1}$$
$$x + 2y + 3z = b \tag{2}$$
$$3x + y + z = c \tag{3}$$

(1) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = a - 2z \tag{4}$$

(2) নং সমীকরণে $y = a - 2z$ বসিয়ে পাই,

$$x + 2(a - 2z) + 3z = b$$
$$\therefore z = x + 2a - b \tag{5}$$

(2) নং সমীকরণে $y = a - 2z$ বসিয়ে পাই,

$$3x + a - 2z + z = c$$
$$\Rightarrow 3x + a - z = c$$
$$\Rightarrow 3x + a - x + 2z + b = c \quad [(5) \text{ নং হতে}]$$
$$\therefore x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \tag{6}$$

(5) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$z = \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c \tag{7}$$

(4) নং সমীকরণে z এর মান বসিয়ে পাই,

$$y = -4a + 3b - c \tag{8}$$

$(6), (7)$ ও (8) নং সমীকরণ কে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করলে,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (Answer)$$

Note:

১. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্যঃ

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iv) $(BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = B$

২. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

১.১১. নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান (Cramer's Rule)

১.১১.১. দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

মনেকরি, দ্বিচলক বিশিষ্ট দুইটি একঘাত সমীকরণঃ

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \tag{2}$$

ধ্রুবপদগুলোকে বামপক্ষে এনে পাই,

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0 \tag{1}$$
$$a_2x + b_2y - c_2 = 0 \tag{2}$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই,

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \qquad \therefore y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

যেখানে,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad [x, y \text{ এর সহগ সম্বলিত নির্ণায়ক}]$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad [D \text{ এর ১ম কলাম ধ্রুবপদগুলো দ্বারা প্রতিস্থাপন করে গঠিত নির্ণায়ক}]$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad [D \text{ এর ২য় কলাম ধ্রুবপদগুলো দ্বারা প্রতিস্থাপন করে গঠিত নির্ণায়ক}]$$

১.১১.২. তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

মনেকরি, তিন চলকবিশিষ্ট তিনটি একঘাত সমীকরণঃ

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \tag{1}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{2}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{3}$$

Cramer's Rule অনুযায়ী সমাধান,

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D} \text{ এবং } z = \frac{D_z}{D}$$

যেখানে,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad [x, y, z \text{ এর সহগ সম্বলিত নির্ণায়ক}]$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad [D \text{ এর ১ম কলাম ধ্রুবপদগুলো দ্বারা প্রতিস্থাপন করে গঠিত নির্ণায়ক}]$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad [D \text{ এর ২য় কলাম ধ্রুবপদগুলো দ্বারা প্রতিস্থাপন করে গঠিত নির্ণায়ক}]$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad [D \text{ এর ৩য় কলাম ধ্রুবপদগুলো দ্বারা প্রতিস্থাপন করে গঠিত নির্ণায়ক}]$$

Note: $D = 0$ হলে সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান নেই অথবা অসংখ্য সমাধান আছে।

Note: সমীকরণ জোটের ধ্রুবপদগুলোকে অবশ্যই সমীকরণের ডানপক্ষে নিতে হবে।

Example:

(i) $\left.\begin{array}{r} 5x+2y-11=0 \\ 3x+4y-1=0 \end{array}\right\}$ সমীকরণ জোটের সমাধানঃ

সমীকরণ জোট,

$$5x + 2y = 11 \quad (1)$$
$$3x + 4y = 1 \quad (2)$$

Cramer's Rule অনুযায়ী,

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 44 - 2 = 42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 33 = -28$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{42}{14} = 3$$

$$\therefore y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$$\therefore (x, y) = (3, -2) \quad (Answer)$$

$$(ii)\quad \left.\begin{aligned} x+2y-z&=5\\ 3x-y+3z&=7\\ 2x+3y+z&=11 \end{aligned}\right\}$$ সমীকরণ জোটের সমাধানঃ

সমীকরণ জোট,

$$x+2y-z=5 \tag{1}$$
$$3x-y+3z=7 \tag{2}$$
$$2x+3y+z=11 \tag{3}$$

Cramer's Rule অনুযায়ী,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1(-1-9)-2(3-6)-1(9+2)=-15$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1\\ 7 & -1 & 3\\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}=5(-1-9)-2(7-33)-1(21+11)=-30$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1\\ 3 & 7 & 3\\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}=1(7-33)-5(3-6)-1(33-14)=-30$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 7\\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}=1(-11-21)-2(33-14)+5(9+2)=-15$$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D}=\frac{-30}{-15}=2$$

$$\therefore y=\frac{D_y}{D}=\frac{-30}{-15}=2$$

$$\therefore z=\frac{D_z}{D}=\frac{-15}{-15}=1$$

$$\therefore (x,y,z)=(2,2,1)\quad (Answer)$$