

SORBONNE UNIVERSITÉ

3M101 PROJET

Théorie de la percolation

Écrit par:

Ouafi NAIT-YAHIA
Abdulaziz SADI-CHÉRIF
Malcom LUNETTE
Florent RONDEAU

Tuteur:

Quentin BERGER



Contents

1	Introduction	2
2	Rappels de Théorie des graphes, Mesure et Probabilités	3
2.1	Théorie des graphes	3
2.2	Théorie de la mesure et probabilités	4
3	Présentation du modèle de percolation	5
3.1	Espace de probabilité	5
3.2	Amas sur G^d	6
3.3	Probabilité critique	7
4	Existence et unicité de la composante connexe infinie	12
4.1	Théorème d'existence	12
4.2	Théorème d'unicité	12
4.3	Preuve	12
4.3.1	Précisions et définitions	13
4.3.2	Étape 1 : Invariance par translation	14
4.3.3	Étape 2 : Changement dans des boîtes finies	15
4.3.4	Étape 3 : Pas de trifurcation	16
5	Simulation	19
5.1	Modèle	19
5.2	Explication du code	19
5.2.1	La conception d'une population	20
5.2.2	La propagation de la maladie	21
5.2.3	L'affichage dynamique	22
5.2.4	L'interface graphique	23
5.3	Résultat	24
5.3.1	Population basique	24
5.3.2	Pour aller plus loin	25
6	Conclusion	26

1 Introduction

La percolation désigne le passage d'un fluide à travers un milieu plus ou moins perméable. L'étude de ce phénomène donne accès à la connaissance de la porosité du milieu considéré. Une théorie mathématique a été initiée par John Hammersley en 1957. Elle permet de modéliser ce phénomène physique par le biais d'outils probabilistes. Nous allons ici présenter un modèle de percolation dans un graphe euclidien, en nous intéressant aux notions clefs de ce phénomène. Par exemple, lorsque l'on veut étudier la percolation dans un milieu, on s'intéresse au taux de porosité (ou de perméabilité) minimum, nécessaire au milieu considéré pour qu'il puisse soutenir la percolation : c'est ce que l'on appelle le seuil de percolation. Ces notions jouissent de propriétés mathématiques que nous allons tenter de décrire dans les pages qui suivent.

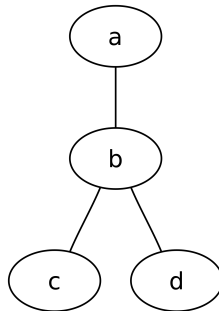
2 Rappels de Théorie des graphes, Mesure et Probabilités

Avant de commencer à parler des phénomènes de percolation, il est important de rappeler certaines notions de théorie des graphes ainsi que celles concernant la théorie de la mesure et des probabilités.

2.1 Théorie des graphes

Un graphe non orienté G est défini par un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes.

Pour illustrer ceci, soit $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, b), (b, c), (b, d)\}$. Ce graphe est représenté de la manière suivante,



Définitions :

- Une sous-graphe de $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subset V$ et $E' \subseteq E$.
- Une chaîne est une séquence de sommets et d'arêtes $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_n e_n v_{n+1}$ avec $v_i \in V$ pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$ et $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Un chemin est une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un cycle est une chaîne ν tel que $v_{n+1} = v_1$.
- Un graphe connexe est tel que, pour tout couple $(u, v) \in V^2$, il existe une chaîne entre u et v .

2.2 Théorie de la mesure et probabilités

La théorie de la percolation étant un domaine particulier des probabilités, il est important d'énoncer certaines définitions et propriétés que l'on aborde souvent lorsque l'on étudie des espaces de probabilités.

Définition : Une classe \mathcal{A} de parties d'un ensemble E est appelée tribu ou σ -algèbre si :

- (i) elle contient E : $E \in \mathcal{A}$;
- (ii) elle est stable par passage au complémentaire : pour tout $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$
- (iii) elle est stable par réunion dénombrable : si (A_n) est une famille dénombrable d'éléments de \mathcal{A} , alors $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable (E, \mathcal{A}) est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ qui :

- (i) associe la valeur 0 à l'ensemble vide : $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) est σ -additive : pour toute suite (A_n) d'éléments de \mathcal{A} deux à deux dis-joints, $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

De plus si $\mu(E) = 1$ on appelle μ une mesure de probabilité.

Un espace muni d'une mesure (μ par exemple) et noté (E, \mathcal{A}, μ) est appelé espace mesuré. Dans le cas où la mesure est une mesure de probabilité on dit que c'est un espace de probabilité.

3 Présentation du modèle de percolation

Il existe deux types de percolation. La percolation par sites et la percolation par arêtes. Soit un graphe G quelconque, la percolation par sites consiste à étudier des phénomènes de percolation sur les sommets de G . La percolation par arêtes se différencie en étudiant des phénomènes de percolation sur les arêtes de G . Chaque arête sera choisie ouverte ou fermée de manière aléatoire et indépendante. Bien que ces percolations semblent différentes, elles possèdent des propriétés similaires. Nous allons étudier la percolation par arêtes sur le graphe infini $G^d: (\mathbb{Z}^d, E^d)$ (nous nous focaliserons sur les graphes euclidiens).

Avant d'aller plus loin, nous devons d'abord définir un espace de probabilité.

3.1 Espace de probabilité

Afin d'utiliser une mesure de probabilité, il est important de choisir une tribu adéquate qui sera adaptée à l'étude faite sur les graphes.

On identifie l'ensemble des parties de E^d à l'ensemble

$$\Omega := \{0, 1\}^{E^d}$$

Du fait du choix de la mesure de probabilité qui donne l'indépendance, nous utiliserons la tribu cylindrique.

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_e)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète telle que X ne prenne que deux valeurs : $\Omega = \{0, 1\}$. On dit que X suit une loi de Bernoulli si $\mu_e(X = 0) = 1 - p$, $\mu_e(X = 1) = p$

Définition : Soit $G^d := (\mathbb{Z}^d, E^d)$. On dit qu'une arête $e \in E^d$ est ouverte avec une probabilité p si $\mu_e(X = 1) = p$ et est fermée avec probabilité $1 - p$ si $\mu_e(X = 0) = 1 - p$, pour $0 \leq p \leq 1$.

Dans la suite, nous allons prendre F aléatoirement dans Ω . On obtient (\mathbb{Z}^d, F) qui est un graphe aléatoire. Pour cela, nous allons construire F à partir de E en tirant à pile ou face pour savoir si on efface ou si on conserve chaque arête de E . On introduit donc la loi de Probabilité :

$$\mathbb{P}_p = \otimes_e \text{Bernoulli}(p)$$

sur Ω (avec $e \in E$ et $p \in [0, 1]$ un paramètre fixé).

Pour résumer, nous avons donc une collection de variable de Bernoulli indépendantes X_e , associé à chaque arête. Une arête est dite fermée si $X_e = 0$ et ouverte si $X_e = 1$.

3.2 Amas sur G^d

En prenant les sommets ou les arêtes ouverts de G^d comme sous-ensemble, on obtient des sous-graphes de G^d . Pour un graphe G , on appelle un amas (ou Cluster) un ensemble C qui est une composante connexe de G .

Reprenons la notion d'ouvert et de fermé pour les arêtes.

Définition : On note G' le sous graphe de G^d contenant tous ses sommets et arêtes ouvertes. On note

$$C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid y \text{ est connecté à } x \text{ par un chemin ouvert}\}$$

On appelle $C(x)$ l'amas contenant x .

Pour illustrer ces notions, voici quelques images :

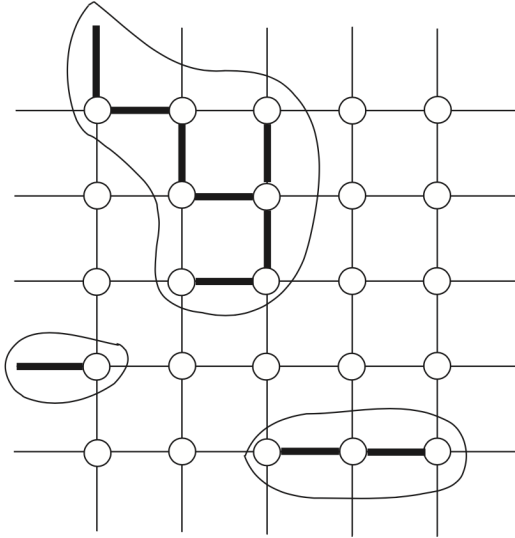


Figure 1: Percolation par lien

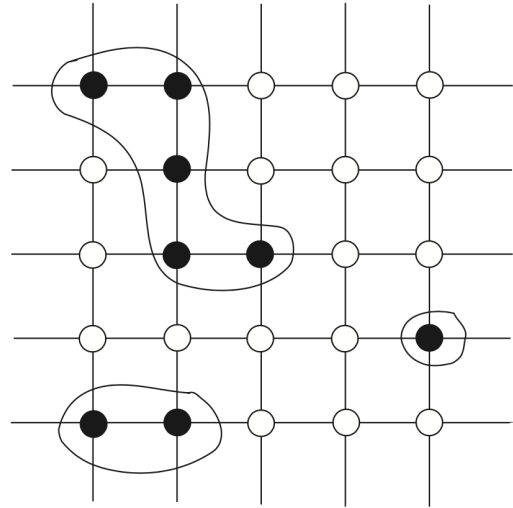


Figure 2: Percolation par site

Soient $w, v \in \mathbb{Z}^d$, On note $w \leftrightarrow v$ s'il existe un chemin ouvert joignant un sommet de w à un sommet v . Cette notation peut être utilisée pour chaque élément de v et w . A l'aide de cette notion, on obtiendra donc

$$C(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid y \leftrightarrow x\}$$

3.3 Probabilité critique

Maintenant que les bases ont été posées, nous allons nous intéresser de plus près à la percolation. On parlera de percolation si notre graphe G^d admet un amas de taille infinie (i.e. il existe un x tel que $|C(x)| = \infty$). On cherchera la probabilité p qui nous permettra d'obtenir des amas de taille infinie.

Probabilité de percolation : Soit $r \in \mathbb{Z}^d$ un sommet qui fera office de racine. On définit la probabilité de percolation sous \mathbb{P}_p pour r par

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(r \leftrightarrow \infty) = \mathbb{P}_p(|C(r)| = \infty)$$

c'est à dire la probabilité qu'il existe un chemin reliant la racine à "l'infini".

Cela correspond donc à la probabilité qu'un fluide puisse couler de la racine à l'infini. Le paramètre p désigne en fait la porosité du milieu, sont taux de perméabilité. Ainsi, plus p est élevé (proche de 1), plus il y a de chance qu'il existe dans notre milieu un chemin traversant le milieu (ici un chemin reliant la racine à l'infini).

Monotonie : La fonction $p \in [0,1] \rightarrow \theta(p)$ est croissante, et

$$\theta(0) = 0 \text{ et } \theta(1) = 1$$

De cette monotonie découle une autre probabilité cruciale dans ce projet, La probabilité critique. Cette probabilité va nous permettre d'introduire la notion de transition de phase qu'on verra par la suite.

La probabilité critique : notée $p_c(d)$ est définie comme suit

$$p_c(d) := \sup\{p \mid \theta(p) = 0\}$$

Remarque : On obtient donc

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si } p < p_c \\ > 0 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

Pour $d = 1$, le graphe obtenu s'apparente au graphe \mathbb{Z} , il est évident de remarquer que $p_c(1) = 1$. Lorsque $d > 1$, déterminer la probabilité critique devient complexe, dû au fait que la présence de cycle permet de faire des détours et que toutes les arêtes du graphe sont susceptibles de jouer un rôle.

Théorème : Pour $d > 1$, on a

$$0 < p_c(d) < 1$$

Commençons par démontrer que $0 < p_c(d)$:

On veut montrer que pour un certain $p > 0$ (proche de 0) on a $\mathbb{P}_p(r \leftrightarrow \infty) = 0$.

Considérons $h(n)$ le nombre de chemin ayant une longueur n . Soit $L(n)$, une variable aléatoire qui représente le nombre de chemins ouverts de longueur n . On obtient

$$\mathbb{P}_p(r \leftrightarrow \infty) \leq \mathbb{P}_p(L(n) \geq 1)$$

De plus

$$L(n) = \sum_{\text{chemins ayant une longueur } n} \mathbb{1}_{\{\text{chemin ouvert}\}}$$

$$\mathbb{E}[L(n)] = \sum_{\text{chemins ayant une longueur } n} \mathbb{P}(\text{chemin ouvert})$$

en utilisant l'inégalité de Markov, on a ainsi

$$\mathbb{P}_p(L(n) \geq 1) \leq \mathbb{E}_p[L(n)] = p^n h(n)$$

Or, on a $h(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$. Il est facile de voir que pour le premier sommet, il y a $2d$ choix possibles, puis $2d-1$ pour les autres. Pour nous en persuader, nous pouvons nous référer aux graphes figurant dans la section Amas sur G^d pour $d = 2$. Alors

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq p^n (2d(2d-1)^{n-1}) = \frac{2d}{2d-1} (p(2d-1))^n$$

En prenant $0 < p < \frac{1}{2d-1}$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient bien que $\theta(p) = 0$. En reprenant la définition de la probabilité critique, on a bien $0 < p_c$.

Il nous reste plus qu'à démontrer que $p_c(d) < 1$:

Décroissance : Si $2 \leq d \leq d'$ alors $\theta_d \leq \theta_{d'}$ et $p_c(d') \leq p_c(d)$.

Puisque les espace G^d peut être injecter dans G^{d+1} et $p_c(d+1) \leq p_c(d)$, par décroissance on peut s'intéresser qu'au cas où $d = 2$.

On va d'abord introduire la notion de graphe dual qui va nous être utile dans cette démonstration.

Le graphe dual G^2 est

$$G_{dual}^2 = (\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \mathbb{E}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

Une arête ouverte (resp. fermée) sur le graphe dual croise une arête fermée (resp. ouverte) de G^d .

Dans la suite, on notera G un graphe aléatoire de G^2 et G' le graphe dual associé à G . D'après la définition du graphe dual, on peut en déduire qu'une composante connexe ouverte contenant l'origine (\emptyset) dans G est fini s'il existe un cycle (courbe de Jordan) dans G' entourant ce sommet.

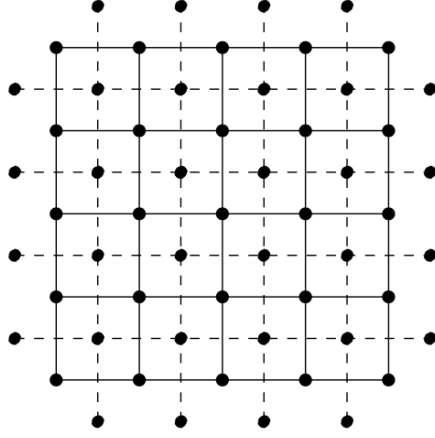


Figure 3: le graphe euclidien G^2 et son dual (trait pointillé)

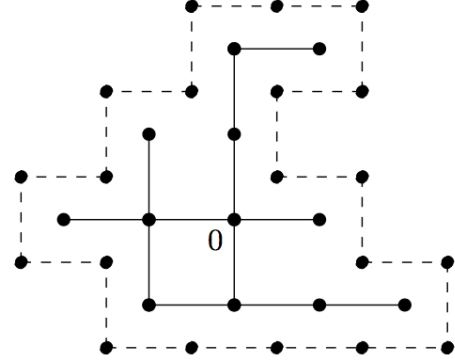


Figure 4: Composante finie entourée d'un circuit dual

En prenant A_ω comme l'événement " ω est un circuit (cycle) ouvert de G' " on a

$$\begin{aligned}
 1 - \mathbb{P}_p(\emptyset \leftrightarrow \infty) &= \mathbb{P}_p(\emptyset \leftrightarrow \infty) \\
 &= \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\omega \text{ circuit ouvert entourant } 0} \omega\right) \\
 &\leq \sum_{\omega \text{ circuit ouvert entourant } 0} \mathbb{P}_p(A_\omega)
 \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir une arête ouverte dans le dual est de $1 - p$, puisque la probabilité d'avoir un arête ouverte dans le graphe G est de p . On obtient donc la probabilité pour un circuit ω de longueur n

$$\mathbb{P}_p(A_\omega) = (1 - p)^n.$$

On prend à présent $g(n)$ le nombre de circuits de longueur n entourant entourant \emptyset . On a $g(n) \leq n3^n$. On obtient cette inégalité en remarquant que pour un cycle de longueur n , nous avons n choix possibles pour choisir le point de départ, ensuite nous avons 3 directions possibles. (N'oublions pas que nous sommes en dimension $d = 2$, le 3 se déduit du $2d-1$ choix possible après avoir choisi le premier sommet, et puissance puisque c'est un circuit). En remplaçant ceci dans l'équation, nous obtenons

$$1 - \mathbb{P}_p(\emptyset \leftrightarrow \infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n3^n (1 - p)^n$$

Si on prend $p < 1$ (proche de 1) de façon à obtenir

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 3^n (1-p)^n < 1$$

On aura $1 - \mathbb{P}_p(\emptyset \leftrightarrow \infty) < 1$, et finalement $\mathbb{P}_p(\emptyset \leftrightarrow \infty) > 0$. En reprenant la définition de la probabilité de percolation, on a $\mathbb{P}_p(\emptyset \leftrightarrow \infty) = \theta(p) > 0$ et qu'on a $\theta(p) > 0$ si $p > p_c$, et comme on a pris un $p < 1$, alors $p_c < 1$.

4 Existence et unicité de la composante connexe infinie

Nous avons vu précédemment la probabilité qu'un sommet appartienne à un amas ouvert de taille infinie. Nous voulons maintenant savoir la probabilité qu'un tel amas existe.

Définition : Soit $0 < p < 1$. On définit

$$\Phi(p) = \mathbb{P}_p(\text{il existe un amas ouvert de taille infinie})$$

Nous pouvons à présent introduire le théorème d'existence d'un amas ouvert de taille infinie.

4.1 Théorème d'existence

: La probabilité qu'il existe un amas ouvert de taille infinie satisfait

$$\Phi(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p > p_c \\ 0 & \text{si } p < p_c \end{cases}$$

4.2 Théorème d'unicité

: Pour $p \in]0, 1]$ fixé, alors

—Ou bien il n'y a $\mathbb{P}_p - p.s.$ pas de composante connexe infinie,

—Ou bien il y a $\mathbb{P}_p - p.s.$ une unique composante connexe infinie.

4.3 Preuve

: Cette preuve consiste à montrer la probabilité nulle d'un événement du type "il existe une arête ouverte qui relie deux composantes connexes infinies

qui seraient disjointes si cette arête était fermée”.¹

4.3.1 Précisions et définitions

- On note \mathbb{P}_p la loi de percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^d de paramètre p .
- On pose $n \geq 1$, $H_n \in \{0, 1\}^n$.
- On note \mathcal{H} l’algèbre des événements cylindriques, c’est-à-dire la classe des ensembles $H = \{\omega : (\omega(a_1), \dots, \omega(a_n)) \in H_n\}$, où les (a_n) appartiennent à l’ensemble des arêtes (ou des sites, si l’on considère la percolation par sites).
- On définit ω par l’application qui donne l’état d’une arête : ouverte ou fermée. Elle est donc à valeurs dans $\{0, 1\}$. On dit que ω est une **configuration**.
- On note \mathcal{F} la tribu engendrée par \mathcal{H} .
- **Définition** : On appelle **trifurcation** un site x tel que : x est dans une composante connexe infinie C , exactement trois des arêtes adjacentes à x sont ouvertes, et $C \setminus \{x\}$ a trois composantes connexes infinies
- **Définition** : On appelle **boîte finie** le pavé $[-n, n]^d$.
- **Définition** : Soit e un vecteur non nul de \mathbb{Z}^d . On appelle **translation de vecteur** e de la configuration ω la configuration ω^{+e} , où pour une arête a , $\omega(a)^{+e} = \omega(a - e)$. On dit qu’un événement B est **invariant par translation** de vecteur e si pour toute configuration ω , on a $\omega \in B \Leftrightarrow \omega^{+e} \in B$.

On admettra que les ensembles que nous allons considérer sont bien mesurables. La preuve se fait en trois étapes. Dans la première, nous démontrerons un lemme reposant sur l’invariance par translation de vecteur afin de mettre en évidence que le nombre de classes infinies ne prend qu’une seule valeur dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dans la deuxième étape, nous éliminerons la possibilité que le nombre de composantes connexes infinies k puisse être un entier supérieur à 2, par un argument qui utilise le changement de configuration

¹La démonstration que nous allons présenter ici se repose sur celle donnée dans le chapitre 2 de l’ouvrage de W. Werner, *Percolation et modèle d’Ising*

dans des boîtes finies au sein du graphe. Enfin, la troisième et dernière étape se chargera de montrer qu'il n'est pas possible d'avoir une infinité de classes infinies en étudiant le nombre de trifurcations possibles dans le graphe.

4.3.2 Étape 1 : Invariance par translation

Comme nous l'avons annoncé, nous allons dans cette partie donner une preuve du lemme ci-après.

Définition : Soit e un vecteur non nul de \mathbb{Z}^d . On dit qu'un événement B est **invariant par translation de vecteur e** si pour toute configuration ω , $\omega \in B \Leftrightarrow \omega^{+e} \in B$

Lemme : Si B est invariant par translation d'un vecteur $e \neq 0$, alors $\mathbb{P}_p(B) \in \{0, 1\}$

Preuve du lemme : Elle se décompose en deux parties.

Partie 1 : Dans un premier temps, nous allons montrer que pour tout événement B , il existe (B_n) une suite d'événements mesurables par rapport à l'état d'un nombre fini d'arêtes telle que $\mathbb{P}_p(B \Delta B_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, $B \Delta B_n$ désignant la différence symétrique entre B et B_n .

Considérons l'ensemble des événements B tels qu'il existe une telle suite B_n . Notons-le \mathcal{G} . Montrons que \mathcal{G} est une classe monotone.

Pour rappel, on appelle **classe monotone** une classe \mathcal{M} de parties d'un ensemble \mathcal{H} si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. \mathcal{M} contient \mathcal{H}
2. \mathcal{M} est stable par différence propre : pour tout $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$
3. \mathcal{M} est stable par union dénombrable croissante : si (A_n) est une suite croissante d'éléments de \mathcal{M} , alors $\cup_n A_n \in \mathcal{M}$.

Or, on a bien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Montrons que \mathcal{G} est stable par union dénombrable croissante. Soit B^r une suite croissante de \mathcal{G} . Pour chaque r , on peut trouver un événement \bar{B}^r qui ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes et

qui soit tel que $\mathbb{P}_p(B^r \Delta \bar{B}^r) \leq \frac{1}{r}$. On pose alors $B = \cup_r B^r$, et on a alors $\limsup_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(B^r \Delta \bar{B}^r) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} (\mathbb{P}_p(B \Delta B^r) + \mathbb{P}_p(B^r \Delta \bar{B}^r)) = 0$. Donc $B \in \mathcal{G}$.

Montrons maintenant la stabilité par passage au complémentaire. En fait, elle est immédiate : si l'on peut approximer, comme nous venons de le faire, B par une suite B_n , alors on peut approximer le complémentaire de B par la suite des complémentaires de B_n . En effet, si l'on pose $B = \cup_n B_n$, on a $B^c = (\cup_n B_n)^c = \cap_n B_n^c$. On voit bien que cela implique la stabilité par limite décroissante (on prend la suite des complémentaires).

Les hypothèses étant maintenant vérifiées, nous pouvons utiliser le théorème de la classe monotone pour obtenir que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Partie 2 : Dans cette seconde partie, on suppose que B est invariant par translation de vecteur. On a donc l'existence d'une suite B_n dans \mathcal{H} qui approxime B telle que $\mathbb{P}_p(B \Delta B_n) \rightarrow 0$. On peut trouver une suite (m_n) telle que pour tout n , B_n est mesurable par rapport à l'état des arêtes dans $[-m_n, m_n]^d$. B étant invariant par translation pour tout vecteur e , il l'est aussi pour tout vecteur $3m_n e$. Pour tout n , l'événement $\bar{B}_n = \{\omega : \omega^{+3m_n e} \in B_n\}$ est mesurable par rapport à l'état des arêtes de $[-m_n, m_n]^d + 3m_n e$ qui est disjoint de $[-m_n, m_n]^d$. On a donc B_n et \bar{B}_n indépendants. Mais comme B est invariant par translation, on a $\omega \in B \Leftrightarrow \omega^{+3m_n e} \in B$. On a donc $\mathbb{P}_p(B \Delta B_n) = \mathbb{P}_p(B \Delta \bar{B}_n)$ et que $\mathbb{P}_p(\bar{B}_n) \rightarrow \mathbb{P}_p(B)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On a alors $\mathbb{P}_p(B \Delta (B_n \cap \bar{B}_n)) \leq \mathbb{P}_p(B \Delta B_n) + \mathbb{P}_p(B \Delta \bar{B}_n) \rightarrow 0$, et $\mathbb{P}_p(B_n \cap \bar{B}_n) = \mathbb{P}_p(B_n) \mathbb{P}_p(\bar{B}_n) \rightarrow \mathbb{P}_p(B)^2$.

On obtient alors $\mathbb{P}_p(B) = \mathbb{P}_p(B)^2$. Et comme \mathbb{P}_p est une probabilité, elle est à valeur dans $[0, 1]$. Donc si $\mathbb{P}_p(B) = \mathbb{P}_p(B)^2$, \mathbb{P}_p ne peut qu'être à valeur dans $\{0, 1\}$. Cela conclut la définition du Lemme.

Posons N la variable aléatoire donnant le nombre de classes infinies. Pour j entier, l'événement $\{N = j\}$ est invariant par translation de tout vecteur de \mathbb{Z}^d . On en déduit alors que $\mathbb{P}_p(N = k) = 1$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de composantes connexes infinies. On a bien montré que N ne peut prendre qu'une valeur.

4.3.3 Étape 2 : Changement dans des boîtes finies

Dans cette partie va être exclue la possibilité d'avoir un nombre de classe infinie k supérieur à 2. Nous allons supposer que $\mathbb{P}_p(N \leq 1) = 0$, et que

$k \geq 2$ avec $k \neq \infty$. Considérons la boîte finie $[-n, n]^d$, pour n un entier assez grand. Alors

$$\mathbb{P}_p(N = k \text{ et les } k \text{ composantes connexes infinies intersectent } [-n, n]^d) > 0 \quad (1)$$

En effet, quand n tend vers ∞ , la probabilité qu'une classe infinie intersecte la boîte tend vers 1, cette dernière augmentant son volume à mesure que n augmente.

Nommons C l'événement "toute classe infinie touche $[-n, n]^d$ ". On a donc $\mathbb{P}_p(C) > 0$. De plus, C ne dépend que de l'état des arêtes à l'extérieur de la boîte.

L'idée va maintenant être de définir, à partir de ω une nouvelle configuration ω' : on garde l'état des arêtes donné par ω à l'extérieur de la boîte, mais on relance au hasard l'état des arêtes à l'intérieur avec la même loi de Bernoulli de paramètre p que l'on a utilisée pour définir le graphe aléatoire. ω' suit donc la même loi de percolation que ω .

Nommons A l'événement "toutes les arêtes sont ouvertes pour ω' à l'intérieur de $[-n, n]^d$ ". On a aussi $\mathbb{P}_p(A) > 0$ puisque que chaque arête a une probabilité $p > 0$ d'être ouverte. De plus, A et C sont indépendants, puisque A ne dépend que des arêtes à l'intérieur de la boîte, et C ne dépend que des arêtes à l'extérieur. Ainsi, on a $\mathbb{P}_p(A \cap C) > 0$. Mais si A et C sont réalisés simultanément, ω' n'a qu'une seule composante connexe infinie, puisque la boîte ferait s'intersecter toutes les classes infinies distinctes. Cependant, on a bien une contradiction avec notre supposition de départ, qui était que $\mathbb{P}_p(N = k \geq 2) = 1$, puisque, comme nous venons de le montrer, la probabilité non nulle de la réalisation simultanée de A et de C rend non nulle la probabilité que N vaille 1. Nous pouvons donc conclure que k ne peut être qu'égal à 0, 1 ou ∞ .

4.3.4 Étape 3 : Pas de trifurcation

Il ne nous reste donc qu'à éliminer la possibilité qu'il y ait une infinité de classes infinies, c'est à dire montrer que $\mathbb{P}_p(N = \infty) = 0$. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde, et supposer que $\mathbb{P}_p(N = \infty) > 0$, ce qui implique $\mathbb{P}_p(N = \infty) = 1$ puisqu'on a vu dans l'étape 1 que N ne peut prendre qu'une seule valeur. En particulier $\mathbb{P}_p(N \geq 3) = 1$

Pour cela, nous allons montrer que le nombre de trifurcations dans $[-n, n]^d$

ne peut pas excéder le nombre de trifurcation sur le bord de la boîte. Supposons $\mathbb{P}_p(N \geq 3) = 1$.

On pose D_n l'événement "il existe trois composantes connexes disjointes infinies qui intersectent toutes trois $[-n, n]^d$ ". Avec n assez grand, on a $\mathbb{P}_p(D_n) > 0$. On note O la racine. On introduit la même configuration ω' que dans l'étape 2. Pour toute configuration ω telle que D_n est vérifiée, il existe une configuration ω' , pour laquelle O est une trifurcation, et telle que les trois classes infinies soient reliées par des chemins simples ouverts disjoints à l'origine et que les autres arêtes soient fermées. De plus, la probabilité pour que l'on ait une telle configuration est non nulle : pour n fixé, la probabilité de n'importe quelle configuration dans la boîte de taille n est minorée par $\min(p, 1-p)$ élevé à la puissance le nombre d'arêtes dans la boîte. On a donc $\mathbb{P}_p(O \text{ est une trifurcation}) = c > 0$.

On utilise l'invariance par translation pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}_p(x \text{ est une trifurcation}) = \mathbb{P}_p(O \text{ est une trifurcation}) = c$. On peut montrer, par une récurrence sur d , que la boîte $[-n, n]^d$ contient $(2n+1)^d$ sites. Chaque site a une probabilité c d'être une trifurcation. La variable aléatoire donnant le nombre de trifurcations au sein de la boîte a donc une espérance de $c(2n+1)^d$.

Montrons maintenant que le nombre de trifurcations dans $[-n, n]^d$ ne peut pas excéder le nombre de points sur le bord de la boîte. On suppose que C désigne une classe infinie. Par définition, une trifurcation x dans C divise $C \setminus \{x\}$ en trois parties infinies C_1 , C_2 , et C_3 telles que tout chemin dans C joignant un point $x_1 \in C_1$ à un point $x_2 \in C_2$ passe par x .

Définissons alors trois chemins auto-évitants infinis l_1 , l_2 et l_3 qui sont issus de x et qui appartiennent respectivement à C_1 , C_2 et C_3 . Ces chemins sont donc disjoints. Soit maintenant une seconde trifurcation x' dans C . On définit de la même manière que précédemment les trois chemins l'_1 , l'_2 et l'_3 . Ensuite, on les rabote comme ceci : issus de x , ils s'arrêtent la première fois qu'ils intersectent $l_1 \cup l_2 \cup l_3$. On obtient de cette façon trois chemins, finis ou non, notés l_4 , l_5 et l_6 . Le graphe $L = \cup_{j=1}^6 l_j$ est une réunion d'arbres, et ne contient donc pas de cycles. On se donne une troisième trifurcation x'' et on répète le procédé, et ce jusqu'à n trifurcations. Considérons l'union des l_1, \dots, l_{3n} .

On obtient ainsi une nouvelle réunion d'arbres contenant les n trifurcations. On admettra que les sites de ces arbres sont de degré au moins 2, et que les trifurcations ont dans ce nouveau graphe formé un degré d'au moins 3. Considérons maintenant l'intersection de ce nouveau graphe (la réunion

des arbres) avec la boîte $[-n, n]^d$. On obtient ainsi une réunion d'arbres finis dont toutes les feuilles sont au bord de la boîte (puisque aucun site n'a un degré inférieur à 2 et que, rappelons-le, une feuille est un site ayant au plus un voisin. Ces feuilles sont bien obtenues par l'intersection des arbres avec la boîte). On admettra que le nombre de feuilles d'un arbre fini est au moins égal au nombre de nœuds de degré trois de cet arbre.

On obtient donc que le nombre de trifurcations dans $[-n, n]^d$ est majoré par une constante fois n^{d-1} . Ceci vient en contradiction avec le fait que l'espérance du nombre de trifurcations dans la boîte soit égal à $c(2n+1)^d$. En effet, nous aurions alors $c(2n+1)^d \leq n^{d-1}$, c'est-à-dire $\frac{c(2n+1)^d}{n^{d-1}} \leq 1$, ce qui est impossible lorsque n tend vers l'infini, étant donné que le membre de gauche tend vers l'infini. On en conclut donc que $\mathbb{P}_p(N \geq 3) = 0$, ce qui vient rendre nulle la probabilité d'avoir une infinité de composantes connexes infinies. Ainsi, soit il n'y en a pas, soit il n'y a qu'une seule classe infinie. Q.E.D.

5 Simulation

Harry Kesten a montré qu'en dimension 2, la probabilité critique est de $1/2$, connaissant donc la valeur théorique, nous avons décidé de la vérifier à l'aide d'une simulation.

5.1 Modèle

Nous avons choisi de simuler la propagation d'une maladie au sein d'une population. On fera l'hypothèse que la maladie est très contagieuse et que toutes personnes, non immunisées contre celle-ci, deviennent malade si elles rentrent au contact avec un malade. Il s'agit d'une percolation par site, où chaque site désignera un individu. Une personne est susceptible de contracter cette maladie avec une probabilité p comprise entre 0 et 1, les personnes restantes seront immunisées. Pour faciliter la simulation, on se contentera de quatre directions de propagation, soient haut, bas, gauche et droite.

5.2 Explication du code

Nous avons choisi JAVA comme langage de programmation car ayant un projet d'informatique en parallèle en JAVA, nous avons pu nous familiariser avec ce langage.

Sans rentrer dans les détails, nous allons exposer les grandes lignes de notre code à savoir:

- *la conception d'une population*
- *la propagation de la maladie*
- *l'affichage dynamique*
- *l'interface graphique*

5.2.1 La conception d'une population

JAVA est un langage orienté objet. Un objet représente un concept, une idée ou toute entité du monde physique. Il possède une structure interne et un comportement, et il sait interagir avec ses pairs. Dans notre cas, nous avons un objet "Personne" qui comporte plusieurs particularités, un état (0 = immunisé, 1 = peut contracter la maladie au contact d'un autre malade et 2 = malade), un booléen qui va nous permettre de lui attribuer un état en fonction de la probabilité p et un entier appelé `nbrcheck` pour éviter de tester les mêmes personnes lors de la simulation. Notre Population va être modélisée par une matrice de Personne, qu'on appellera Graphe. Lorsque qu'on va remplir la matrice de Personne, on va créer un objet Personne pour chaque case de la matrice. On lui attribuera un booléen vrai ou faux en fonction de la probabilité p qu'on aura rentrée en paramètre. Si le booléen est vrai l'état de la personne sera de 1, sinon de 0.

```
public void ajoutcase(){

    Date D = new Date();
    Random R = new Random();
    R.setSeed((D.getTime()+((long)(Math.random()*1000))));
    int i,j;
    graphe= new Personne[N][N];

    for(i = 0;i<N;i++) {
        for(j=0;j<N;j++){
            boolean O = true ;
            Double T = R.nextDouble();
            if( T > P){
                O =false;
            }
            graphe[i][j] = new Personne(i,j,O);
            if(O){nbrouvert++;}
        }
    }
}
```

Figure 5: Conception d'une Personne en fonction de la probabilité

5.2.2 La propagation de la maladie

Petit rappel sur les états des Personnes :

**0 → immunise*

**1 → peut contracter la maladie au contact d'un autre malade*

**2 → malade*

Reprenons notre matrice de personne possédant des états à 0 ou 1 et plaçons une Personne malade au milieu de la matrice. Le fonctionnement de la simulation est assez simple. On parcourt chaque case de la matrice, si la case sur laquelle on est, a un état à 1, n'a pas déjà été traitée (nbrcheck = 0) et avoisine une personne malade alors on change son état à 2. Pour vérifier si une Personne avoisine une Personne malade, nous appelons la méthode Voisinmalade qui va renvoyer le nombre de voisin malade de la Personne rentrée en paramètre. Si en parcourant la matrice de nouvelles personnes sont devenues malades, on réitère l'opération.

```
do {  
    k = 0;  
    for(int i = 0; i < N; i++){  
        for(int j = 0; j < N; j++){  
            if(graphe[i][j].getEtat() == 1 && graphe[i][j].getNbrcheck() == 0 && g.voisinmalade(i,j) >= V){  
                graphe[i][j].setEtat(2);  
                graphe[i][j].ajoutnbrcheck();  
                g.ajoutnbrtouche();  
                k++;  
                Vecteur a = new Vecteur(i,j);  
  
                v.add(a);  
            }  
        }  
    }  
    update();  
}while(k != 0);
```

Figure 6: Propagation de la maladie à l'aide de différentes boucles(while et for)

5.2.3 L’affichage dynamique

Notre projet d’informatique consistait à simuler la course d’une voiture sur différents circuits, de l’afficher sur une interface graphique, puis d’optimiser la course...

Nous avons directement fait le parallèle entre ces deux projets, car il s’agissait pour les deux d’afficher un modèle physique en s’adaptant directement à la simulation. Nous avons donc repris le même modèle MVC (MODEL VIEW CONTROLLER) et nous l’avons adapté à notre cas. Le fonctionnement est le suivant :

- Une classe correspondant aux Listeners, ils attendent de recevoir un message de la part d’une classe émettrice pour se mettre à jour.
- La simulation est une classe émettrice, elle émet après chaque coup (lorsqu’un malade est trouvé).
- On ajoute à sa liste d’écouteur un contrôleur, ce dernier lors de la réception d’un ordre mettra à jour les observer (ce que l’on voit sur l’interface graphique).

Pour résumer et simplifier le tout, on a une liste de malade (qui ne contient que le malade initial au début de la simulation), lorsque l’on va trouver un autre malade, on ajoute celui ci à la liste qui va être directement envoyé au controller. Le controller va ensuite donner l’ordre d’afficher toute la liste.

Problème rencontré : Il arrivait un moment où la liste de Personne devenait trop longue, du coup le programme n’avait plus le temps d’afficher la liste dans son intégralité car elle était déjà en train d’être modifiée par la simulation. Pour palier ce problème, on n’envoyait plus la liste originale mais une copie au controller, ce qui laissait assez de temps au programme.

Signification des couleurs sur les graphes :

—bleu : peut contracter la maladie au contact d’un malade

—blanc : immunisée

—noir : malade

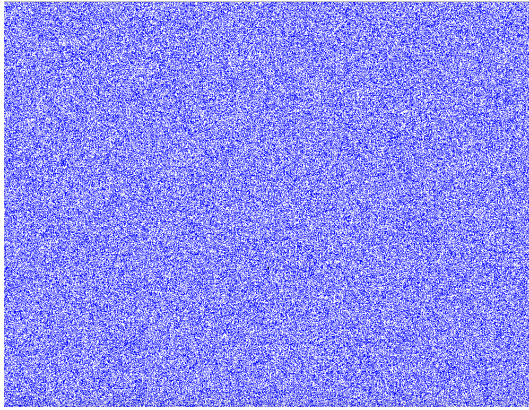


Figure 7: Probabilité à 0,2

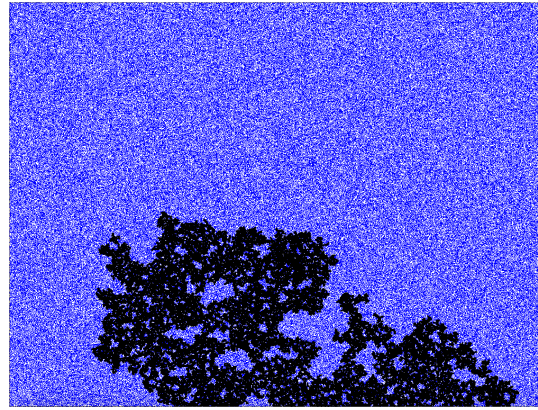


Figure 8: Probabilité à 0,59

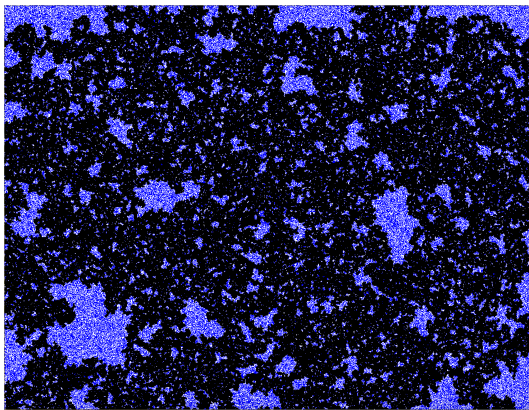


Figure 9: Probabilité à 0,6

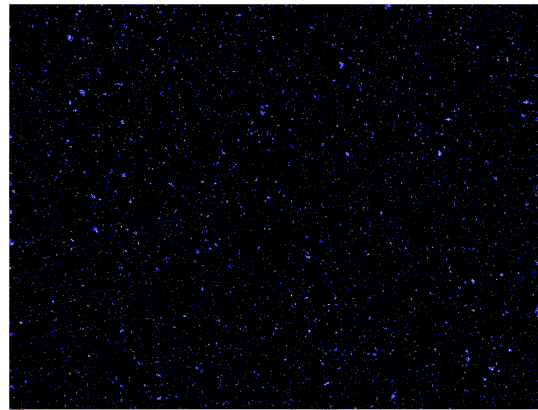


Figure 10: Probabilité à 0,8

5.2.4 L'interface graphique

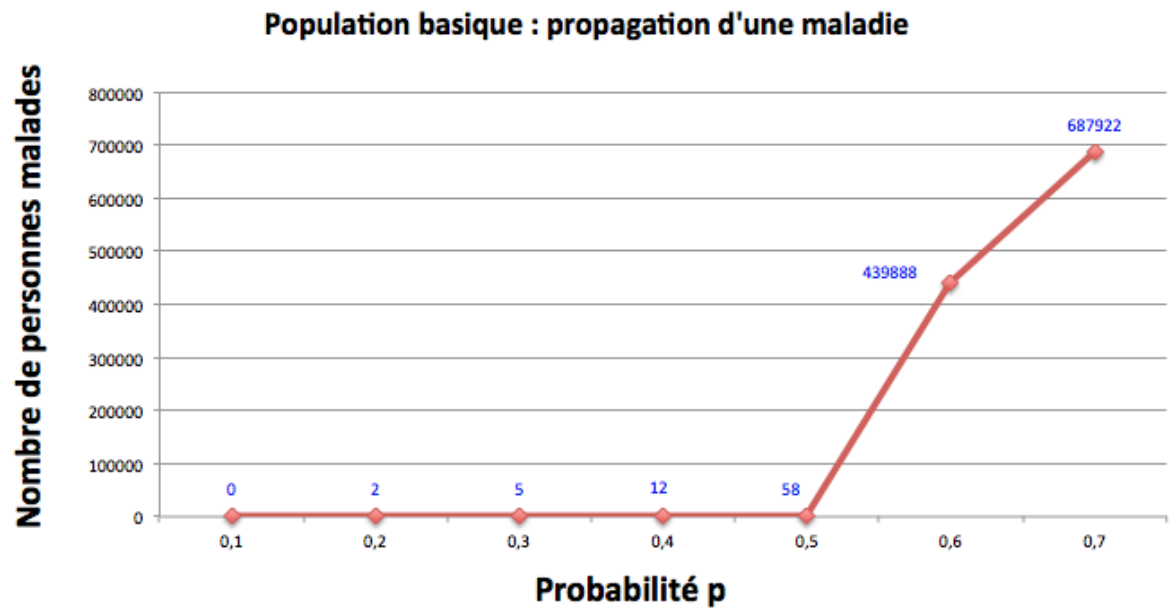
Nous avons décidé de créer une interface graphique, qui nous permettrait d'interagir avec la simulation.

Elle nous permet de choisir la probabilité p qui va être utilisée lors de la conception de la population et également le type de Graphe que l'on veut simuler à l'aide de plusieurs boutons.

5.3 Résultat

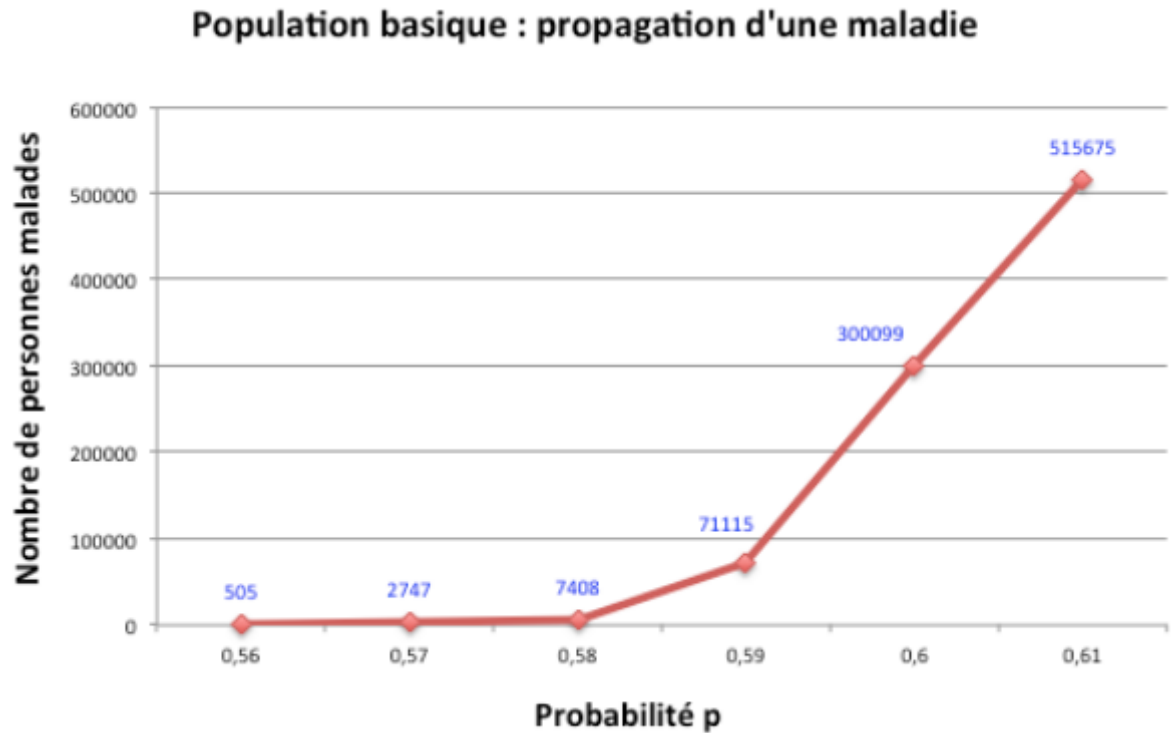
5.3.1 Population basique

Nous avons mis en place un programme qui va jouer la simulation 100 fois pour différentes probabilités et nous renvoyer le nombre moyen de personnes touchées. Avec ces données, nous avons pu tracer différentes courbe.



Nous constatons une transition de phase lorsqu'on dépasse 0,5. En effet, sur une population d'1 000 000 de personne, nous passons de 58 personnes touchées pour une probabilité à 0,5 à plus de 439 888 personnes touchées pour une probabilité à 0,6.

Pour calculer plus précisément la probabilité critique, nous nous sommes concentrés sur l'intervalle $[0,5, 0,6]$.



Nous trouvons une probabilité critique de 0,59, ce qui correspond bien à la probabilité critique pour une percolation par site ayant 4 directions de propagation.

5.3.2 Pour aller plus loin

Nous avons voulu tester un autre type de population, au lieu d'avoir une probabilité, nous en avons deux. Une Personne sur deux va se voir attribuer la première probabilité et l'autre la deuxième. Pour obtenir les deux probabilité, nous avons repris celle rentrée en paramètre et nous l'avons soustrait de 0.1 et additionné de 0.1. Nous retrouvons une probabilité critique avoisinant également 0,5.

6 Conclusion

Appréhendant le projet de mathématiques depuis le premier semestre, nous avons finalement été particulièrement surpris. Ce projet fut très intéressant et enrichissant.

Nous tenions à remercier Quentin Berger pour nous avoir aidé, conseillé et suivi tout au long de ce semestre.

References

- [1] <http://crotti.org/docs/math/seminars/percolation/percolation.pdf>.
- [2] <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01243589/document>.