Chapter 1 :

Solve linear system by matrix

Section 1

Linear System

A finite set of linear equations .

Properties of linear equation

① Doesn`t involve any roots of variables.
② All variables are only of power 1.
③ All variables don`t appear as arguments for trigonometric, logarithmic, or exponential function.

Examples (determine linear and non linear equations)

$X + 3\sqrt{y} = 5$

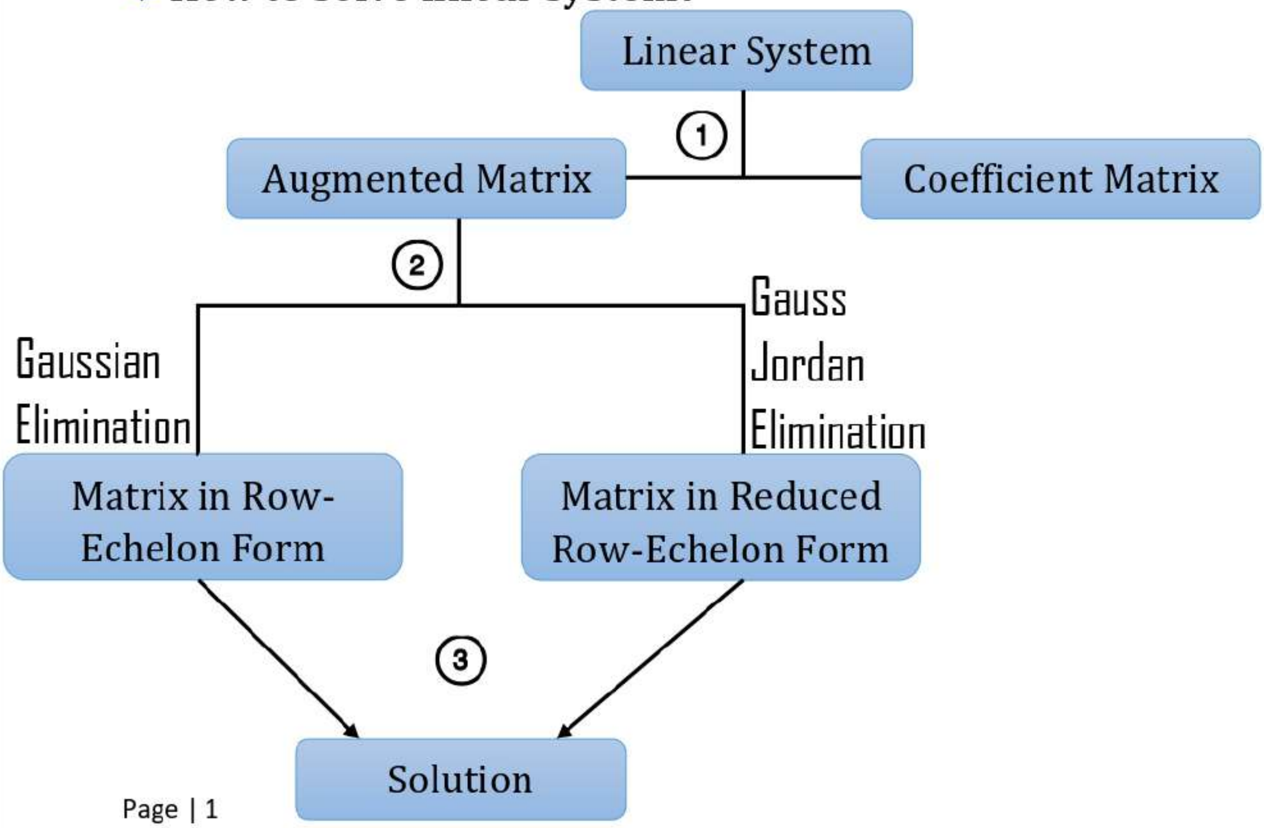
$x^2 + 4 = 2$

$X + 3y - xz = 2$

$y = \sin x$

$X + 5y - \sqrt{2}\, Z = 1$

How to solve linear system?



Example 1: solve the following linear system

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

---------------------------**Solution**--

① Linear System to matrix

Augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Coefficient matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

✓ **Row-Echelon Form**

1) اذا وجد صف غير صفرى فان قيمة اول عنصر غير صفرى تكون ب 1 **(Leading 1)**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) اذا وجدت صفوف صفرية فانها تكون فى اسفل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) اذا وجد **2 leading** متتاليين فان ال **leading** الاسفل يكون على يمين ال **leading** الاعلى

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ **Examples of not Row-Echelon Form matrices**

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 2 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

✓ **Elementary row operations**

1) Multiply a row (equation) by a non zero constant .
2) Interchange two rows (equations) .
3) Add a multiple of one row(equation) to another row (equation)

② Gaussian Elimination

1) حدد اول عمود غير صفرى على يسار المصفوفة .

2) نجعل اول قيمة فى العمود السابق تحديده لا تساوى صفر وذلك باستخدام العملية التانية .

3) نجعل اول قيمة فى العمود السابق تساوى 1 وذلك باستخدام العملية الاولى. ونسميه Leading 1

4) نجعل القيم اسفل ال leading اصفار و ذلك باستخدام العملية التالتة .

5) نعتبر الصف الاول غير موجود ثم نكرر العمليات الاربعة السابقة للوصول الى ال Row-Echelon Form

Augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & -8\\1 & -2 & -3 & 0\\-1 & 1 & 2 & 3\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Interchange } R_1 \text{ with } R_2} \begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 0\\0 & 2 & 1 & -8\\-1 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 0\\0 & 2 & 1 & -8\\0 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\,/\,2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 0\\0 & 1 & 1/2 & -4\\0 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_3 \longrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -4 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_3 \longrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

③ Solution

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$ $\boxed{x_1 = -4}$

$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -4$ $\boxed{x_2 = -5}$

$\boxed{x_3 = 2}$

✓ **Reduced Row-Echelon Form**

1) المصفوفة تكون فى ال Row-Echelon Form

2) اذا وجد عمود به leading فان باقى جميع عناصر العمود تساوى صفر .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ **Gauss-Jordan Elimination**

1) حدد اول عمود غير صفرى على يسار المصفوفة .

2) نجعل اول قيمة فى العمود السابق تحديده لا تساوى صفر وذلك باستخدام العملية التانية .

3) نجعل اول قيمة فى العمود السابق تساوى 1 وذلك باستخدام العملية الاولى. ونسميه Leading 1

4) نجعل باقى عناصر العمود اصفار (القيم اسفل واعلى ال leading) باستخدام العملية الثالثة

5) نعتبر الصف الاول غير موجود ثم نكرر العمليات الاربعة السابقة للوصول الى Reduced Row-Echelon Form

Example 2: solve the following linear system by Gauss-Jordan Elimination

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

---------------------------**Solution**---

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1 + R_3 \to R_3]{-2R_1 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 / -5 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[6R_2 + R_3 \to R_3]{-2R_2 + R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 / -4 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3 + R_2 \to R_2]{-R_3 + R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x_1 = 2}$ $\boxed{x_2 = -1}$ $\boxed{x_3 = 3}$

Note

Row-Echelon Form	Reduced Row-Echelon Form
• *Gaussian .* • *The matrix has Zeros below each leading .*	• *Gauss Jordan .* • *The matrix has Zeros below and above each leading .*