# Vollständig elastische teilelastische und vollständig unelastische Stöße zweier Massen in der Ebene

Adis Talic

Abdulkadir Bülbül

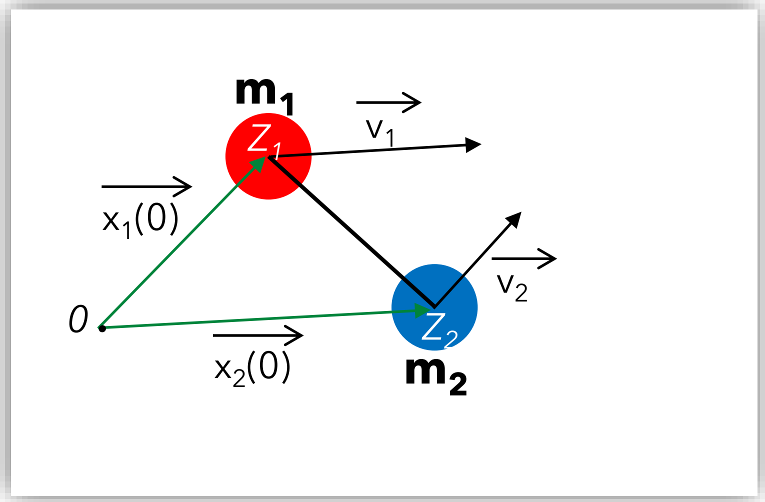
HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

# Gliederung

1. Problemstellung des Programms
2. Mathedokumentation
3. Programmvorstellung
4. Beispielablauf

Das Programm soll zwei homogene Körper mit kreisförmigem Querschnitt simulieren, wie die sich reibungsfrei in einem achteckigen Gebiet bewegen und gegeneinander oder an der Bande kollidieren.

## Problemstellung des Programms




# Beschreibung des Programmes

Masse 1 = $m_1$

Masse 2 = $m_2$

Anfangsposition Kreis 1 = $\overrightarrow{x_1(0)}$

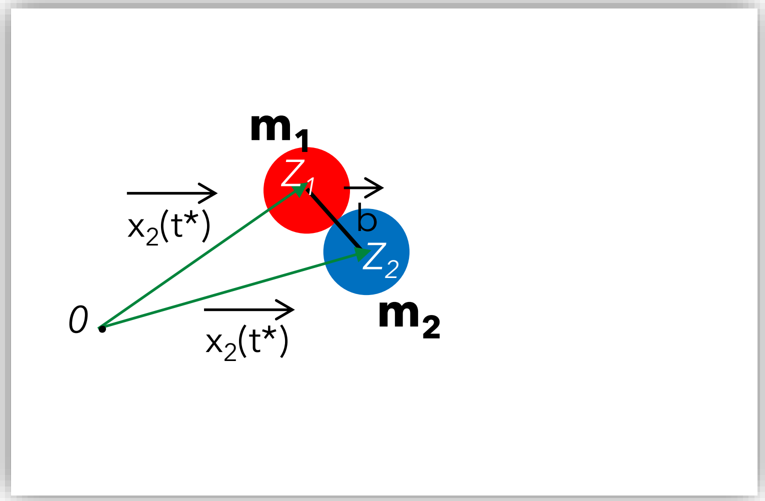
Anfangsposition Kreis 2 = $\overrightarrow{x_2(0)}$

Körpermittelpunkt 1 = $\overrightarrow{Z_1}$

Körpermittelpunkt 2 = $\overrightarrow{Z_2}$

Geschwindigkeit Kreis 1 = $\overrightarrow{v_1(0)}$

Geschwindigkeit Kreis 2 = $\overrightarrow{v_2(0)}$

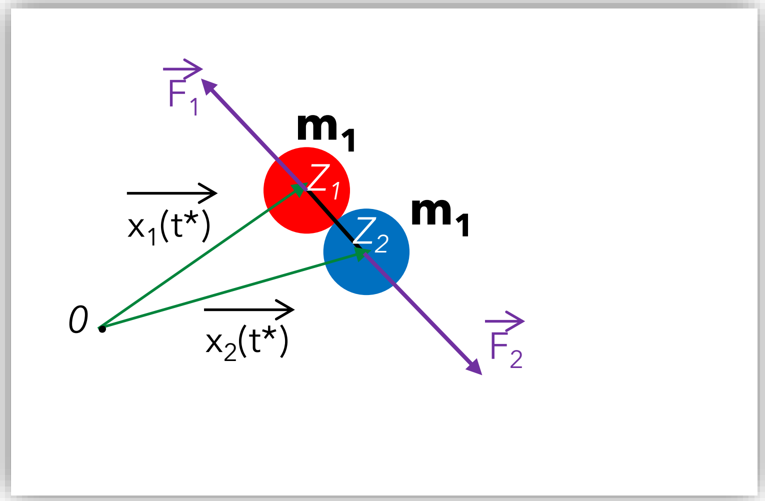



# Beschreibung des Programmes

Zeitpunkt Kollision Ball 1 = $\overrightarrow{x_1(t^*)}$

Zeitpunkt Kollision Ball 2 = $\overrightarrow{x_2(t^*)}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{Z_1Z_2}$




# Beschreibung des Programmes

Währen Stoß ausgeübte Kräfte auf:

Masse $m_1$ = $\overrightarrow{F_1}$

Masse $m_2$ = $\overrightarrow{F_2}$

# Kollisionsmodell 1 – Kollision mit der Bande

- Bei der Kollision mit der Bande ist der Stoßvektor $\hat{b}$ dem Normalvektor $\hat{n}$ der Bande entgegengesetzt. Deswegen zerlegen wir die Geschwindigkeit $\vec{v}$ in zwei Komponenten.

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

- Nach dem Stoß kehrt sich die Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_{\parallel}$ um.

- Vollelastischer Stoß: $\vec{v}_{\parallel}{}' = -\vec{v}_{\parallel}$ $\quad \vec{v}_{\perp}{}' = \vec{v}_{\perp}$ $\quad \vec{v}\,' = -\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$

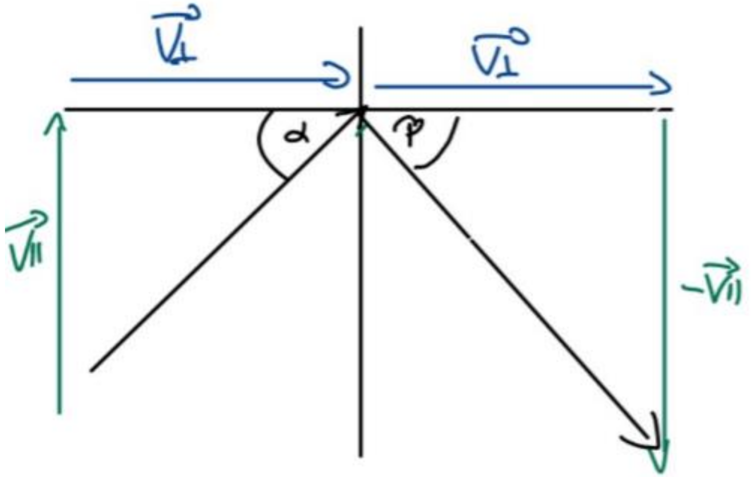
- Teilelastischer Stoß ( Betrag verringert sich abhängig vom Faktor ε): $\vec{v}_{\parallel}{}' = -\varepsilon\,\vec{v}_{\parallel}$ $\quad \vec{v}_{\perp}{}' = \vec{v}_{\perp}$ $\quad \vec{v}\,' = -\varepsilon\,\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$

- Total unelastischer Stoß: $\vec{v}_{\parallel}{}' = 0$ $\quad \vec{v}_{\perp}{}' = \vec{v}_{\perp}$ $\quad \vec{v}\,' = \vec{v}_{\perp}$

# Kollisionsmodell 1 – Kollision mit der Bande

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

$$\vec{v}' = -\varepsilon \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$



# Stoß zweier Scheiben

- Benötigt für den Stoß zweier Scheiben, ist einerseits der Verbindungsvektor $\vec{b}$ der Massenmittelpunkte, die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{u_u}$ und die Schwerpunktgeschwindigkeit.

- Die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{u_1}$ $\vec{u_2}$ werden jeweils in zwei Komponenten unterteilt:

$$\vec{u_1} = \vec{u_{1\parallel}} + \vec{u_{1\perp}} \qquad \vec{u_2} = \vec{u_{2\parallel}} + \vec{u_{2\perp}}$$

- Die Komponente $\vec{u_\parallel}$ kann mithilfe der Formel für orthogonale Projektion berechnet werden:

$$\vec{u_{1\parallel}} = \left(\frac{\vec{u_1} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\right) \cdot \vec{b} \qquad \vec{u_{2\parallel}} = \left(\frac{\vec{u_2} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\right) \cdot \vec{b}$$

- Für die Komponente $\vec{u_\perp}$ gilt hierbei:

$$\vec{u_{1\perp}} = \vec{u_1} - \vec{u_{1\parallel}} \qquad \vec{u_{2\perp}} = \vec{u_2} - \vec{u_{2\parallel}}$$

# Stoß zweier Scheiben

- Den Verbindungsvektor berechnet man in Abhängigkeit der Körpermitten:

$$\vec{b} = \overrightarrow{Z_1 Z_2}$$

- Die Schwerpunktgeschwindigkeit ist dadurch, dass keine äußeren Kräfte einwirken, immer konstant, das heißt das der Vektor für alle Zeiten durch die Anfangsgeschwindigkeit festgelegt ist:

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v_1}(0) + m_2 \vec{v_2}(0)}{m_1 + m_2}$$

- Die Geschwindigkeitsvektoren im Schwerpunktsystem (vor dem Stoß):

$$\underline{\vec{u_1}} = \vec{v_1}(t) - \vec{V} \rightarrow \underline{\vec{u_1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v_1}(t) - \vec{v_2}(t)\right)$$

$$\underline{\vec{u_2}} = \vec{v_2}(t) - \vec{V} \rightarrow \underline{\vec{u_2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v_2}(t) - \vec{v_1}(t)\right)$$

# Durch die

- Durch die errechneten Angaben von gerade eben können  wir die eigentlichen Formeln zur Berechnung der Geschwindigkeitsvektoren ( nach dem Stoß) berechnen:

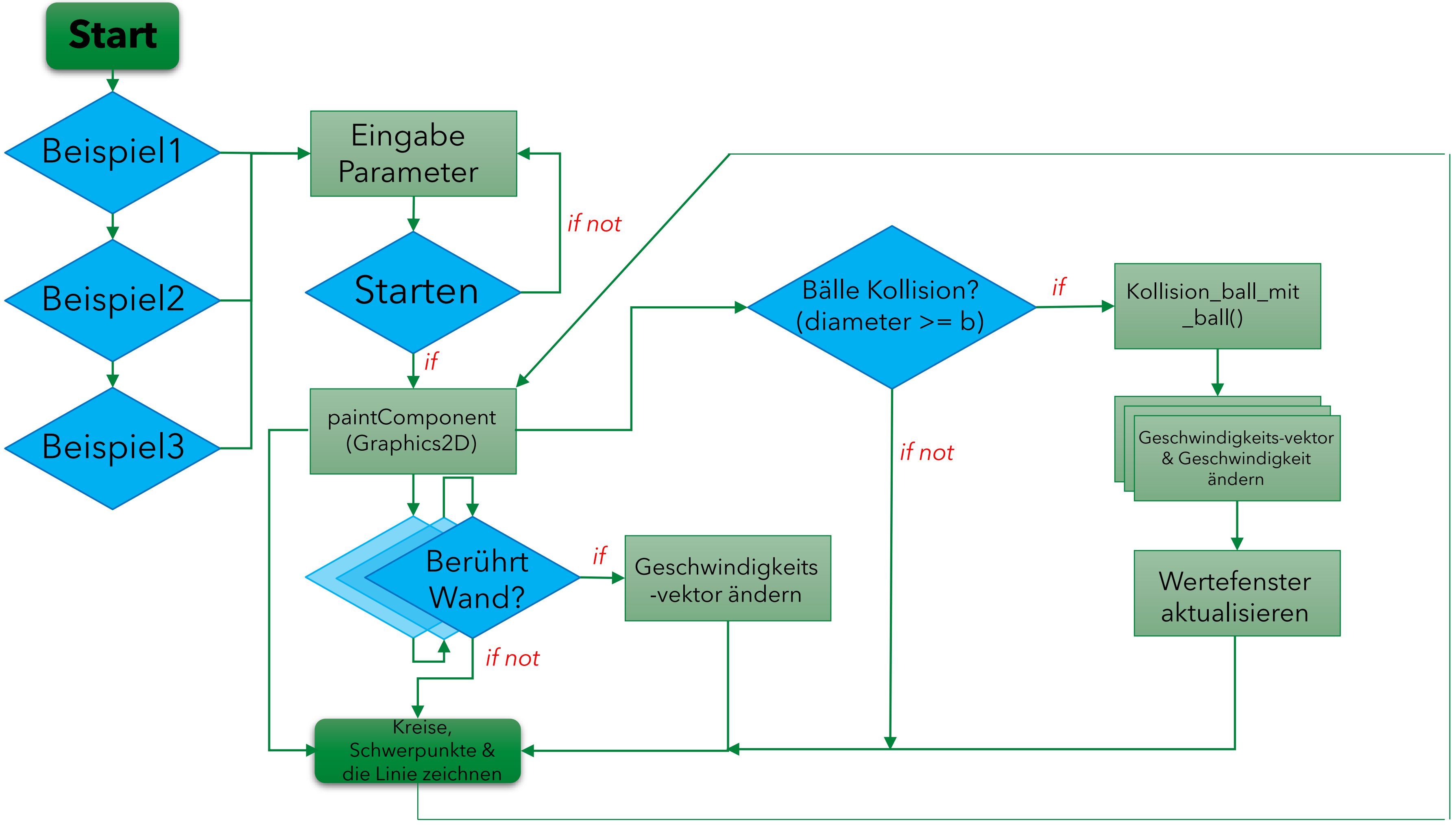
$$\vec{u}_1' = -\varepsilon \vec{u}_{\parallel 1} + \vec{u}_{1\perp}$$

$$\vec{u}_2 = -\varepsilon \vec{u}_{\parallel 2} + \vec{u}_{2\perp}$$

- Damit können wir die Geschwindigkeit der Massen nach dem Stoß errechnen:

$$\vec{v}' = \vec{u}' + \vec{V}$$

# Programmvorstellung



# Beispiel 1

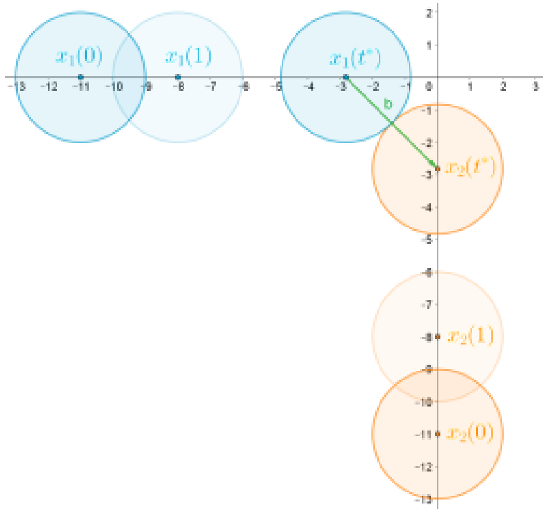
- Die Bälle prallen senkrecht auf einander ein
- Der Geschwindigkeitsvektor sowie die Geschwindigkeit nach dem Stoß muss berechnet werden

## Simulation einfacher dynamischer Systeme

Projekt 2: Elastische, teilelastische und inelastische Stöße zweier Massen in der Ebene

**Anwendung auf das Beispiel von Folie 18:**

- Zwei identische Kreisscheiben mit Massen $m_1 = m_2 = 1$ und Radien $r_1 = r_2 = 2$ befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an den Positionen $x_1(0) = (-11, 0)$ bzw. $x_2(0) = (0, -11)$.
- Sie bewegen sich mit Geschwindigkeiten $\vec{v_1} = \binom{3}{0}$ bzw. $\vec{v_2} = \binom{0}{3}$ auf einen Kollisionspunkt zu.



HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

# Beispiel1

Gesucht: $\vec{u}_1{}' = -\epsilon \vec{u}_{1_{\parallel}} + \vec{u}_{1_{\perp}}$ ; $\vec{u}_2{}' = -\epsilon \vec{u}_{2_{\parallel}} + \vec{u}_{2_{\perp}}$

Gegeben: $m_1 = m_2 = 1$ ; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ ; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ ; $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$

---

$$\vec{u}_1 = \vec{v_1(t)} - \vec{V}$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v_2(t)} - \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V} = \frac{1\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}{1+1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

= 1,5
= 1,5

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

= 1,5
= -1,5

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

= -1,5
= 1,5

$$\vec{u}_{1_{\parallel}} = \left(\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)\cdot\vec{b}$$

$$\vec{u}_{1_{\parallel}} = \left(\frac{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \vec{u}_1$$

= 1,5
= -1,5

$$\vec{u}_{2_{\parallel}} = \left(\frac{\vec{u}_2\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)\cdot\vec{b}$$

$$\vec{u}_{2_{\parallel}} = \left(\frac{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\-2\sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \vec{u}_2$$

= -1,5
= 1,5

$$\vec{u}_{1_{\perp}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_{1_{\parallel}}$$
$$\vec{u}_{1_{\perp}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_{2_{\perp}} = \vec{u}_2 - \vec{u}_{2_{\parallel}}$$
$$\vec{u}_{2_{\perp}} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Fälle:

### *Vollständig elastischer Stoß*

$$\vec{u}_1{}' = -1\,\vec{u}_{1\parallel} + \vec{u}_{1\perp} = -\vec{u}_{1\parallel}$$

$$\vec{u}_1{}' = -\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix} \begin{matrix}= -1{,}5\\ = 1{,}5\end{matrix}$$

$$\vec{u}_2{}' = -1\,\vec{u}_{2\parallel} + \vec{u}_{2\perp} = -\vec{u}_{2\parallel}$$

$$\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 1{,}5\\ = -1{,}5\end{matrix}$$

### *Geschwindigkeit im Laborsystem*

$$\vec{v}_1{}' = \vec{u}_1{}' + \vec{V} = \begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{u}_2{}' + \vec{V} = \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$$

### *teilelastischer Stoß*

$$\vec{u}_1{}' = -\frac{1}{2}\vec{u}_{1\parallel} + \vec{u}_{1\perp} = -\frac{\vec{u}_{1\parallel}}{2}$$

$$\vec{u}_1{}' = -\frac{\vec{u}_{1\parallel}}{2} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix} \begin{matrix}= -0{,}75\\ = 0{,}75\end{matrix}$$

$$\vec{u}_2{}' = -\frac{1}{2}\vec{u}_{2\parallel} + \vec{u}_{2\perp} = -\frac{\vec{u}_{2\parallel}}{2}$$

$$\vec{u}_2{}' = -\frac{\vec{u}_{2\parallel}}{2} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 0{,}75\\ = -0{,}75\end{matrix}$$

### *Geschwindigkeit im Laborsystem*

$$\vec{v}_1{}' = \vec{u}_1{}' + \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{9}{4}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 0{,}75\\ = 2{,}25\end{matrix}$$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{u}_2{}' + \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 2{,}25\\ = 0{,}75\end{matrix}$$

### *Vollständig inelastischer Stoß*

$$\vec{u}_1{}' = -0\,\vec{u}_{1\parallel} + \vec{u}_{1\perp} = 0$$

$$\vec{u}_1{}' = 0$$

$$\vec{u}_2{}' = -0\,\vec{u}_{2\parallel} + \vec{u}_{2\perp} = 0$$

$$\vec{u}_2{}' = 0$$

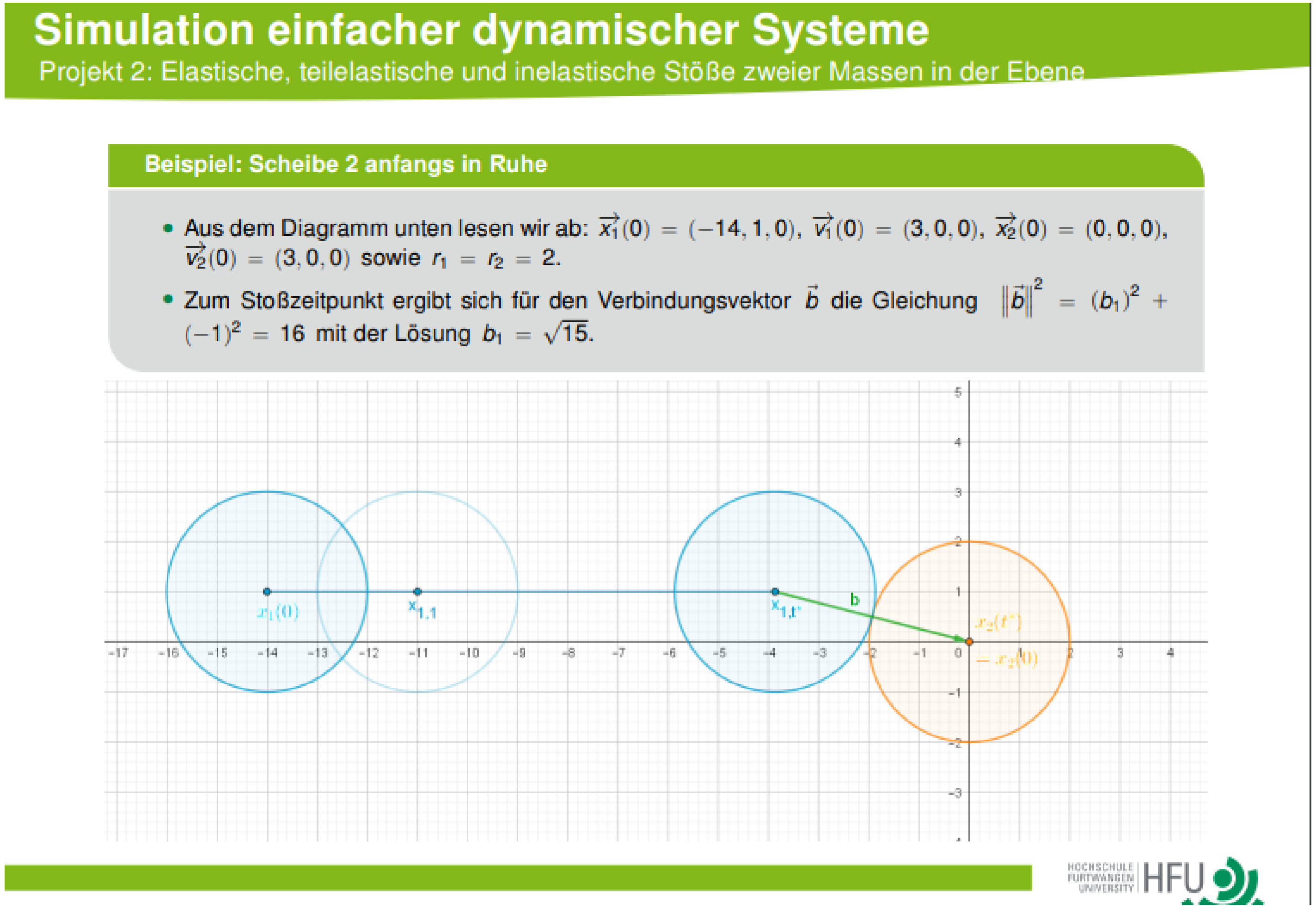
### *Geschwindigkeit im Laborsystem*

$$\vec{v}_1{}' = \vec{u}_1{}' + \vec{V} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \begin{matrix}= 1{,}5\\ = 1{,}5\end{matrix}$$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{u}_2{}' + \vec{V} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \begin{matrix}= 1{,}5\\ = 1{,}5\end{matrix}$$

# Beispiel 2

- Der zweite Ball ist in Ruhe
- Der Geschwindigkeitsvektor sowie die Geschwindigkeit nach dem Stoß muss berechnet werden



# Beispiel Ablauf.2

- Verbindungsvektor wurde nicht gegeben
- Selbe Schritte wie beim ersten Beispiel

## Beispiel 2

$$\|\vec{b}\|^2 = (b_1)^2 + B^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$16 = (b_1)^2 + 1^2$$

$$b_1 = \sqrt{15}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sqrt{15} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix} = 3{,}872$$

$$\vec{u_1}' = -e\,\vec{u_{1\parallel}} + \vec{u_{1\perp}} \qquad \vec{u_2}' = -e\,\vec{u_{2\parallel}} + \vec{u_{2\perp}}$$

$$\vec{u_{1\parallel}} = \left(\frac{\vec{u_1} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\right) \cdot \vec{b} \qquad \vec{u_{2\parallel}} = \left(\frac{\vec{u_2} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\right) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{u_{1\perp}} = \vec{u_1} - \vec{u_{1\parallel}} \qquad \vec{u_{2\perp}} = \vec{u_2} - \vec{u_{2\parallel}}$$

$$\vec{u_1} = \vec{v_1}(t) - \vec{V} \rightarrow \vec{u_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v_1}(t) - \vec{v_2}(t)\right)$$

$$\vec{u_2} = \vec{v_2}(t) - \vec{V} \rightarrow \vec{u_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v_2}(t) - \vec{v_1}(t)\right)$$

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

# Beispiel Ablauf.2

Einsetzen der Werte

$$\vec{v} = \frac{1\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{1+1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix} = 1{,}5$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{u_1} &= \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}\\ \vec{u_2} &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \vec{u_1} = -\vec{u_2}$$

$$\vec{u_1} = 1{,}5$$

$$\vec{u_2} = -1{,}5$$

$$\vec{u_{1\parallel}} = \left(\frac{\vec{u_1}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)\cdot\vec{b} \qquad \vec{u_{2\parallel}} = \left(\frac{\vec{u_2}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\right)$$

# Beispiel Ablauf.2

$$\overrightarrow{u_{1\parallel}} = \left( \frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{\frac{3\sqrt{15}}{2}}{16} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{32} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{45}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 1{,}406 \\ = -0{,}363 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{u_{2\parallel}} = \left( \frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{-\frac{3\sqrt{15}}{2}}{16} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{3\sqrt{15}}{32} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{45}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = -1{,}406 \\ = 0{,}362 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{u_{1\perp}} = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_{1\parallel}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{45}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_{1\perp}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 0{,}093 \\ = 0{,}363 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{u_{2\perp}} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_{2\parallel}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{45}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = -0{,}082 \\ = -0{,}363 \end{matrix}$$

# Beispiel Ablauf.2

- vollständig elastischer Stoß

$$\vec{u_1}' = -1 \cdot \vec{u}_{1\parallel} + \vec{u}_{1\perp}$$

$$= -1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{45}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_1}' = \begin{pmatrix} -\frac{21}{16} \\ \frac{3\sqrt{15}}{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} = -1{,}312 \\ = 0{,}726 \end{matrix}$$

$$\vec{u_2}' = -1 \cdot \vec{u}_{2\parallel} + \vec{u}_{2\perp} = -\vec{u}_{2\parallel}$$

$$= -1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{45}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}' = \begin{pmatrix} \frac{21}{16} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 1{,}312 \\ = -0{,}726 \end{matrix}$$

Geschwindigkeit im Laborsystem

$$\vec{v_1}' = \vec{u_1}' + \vec{V} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{16} \\ \frac{3\sqrt{15}}{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{3\sqrt{15}}{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 1{,}87 \\ = 0{,}726 \end{matrix}$$

$$\vec{v_2}' = \vec{u_2}' + \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{21}{16} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{16} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 2{,}812 \\ = 0{,}726 \end{matrix}$$

# Beispiel Ablauf.2

• teilelastischer Stoß

$$\vec{u}_1'' = -\frac{1}{2}\cdot\vec{u}_{1\parallel} + \vec{u}_{1\perp}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{45}{32}\\ -\frac{3\sqrt{15}}{32}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{32}\\ \frac{3\sqrt{15}}{32}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{45}{64}\\ \frac{3\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{32}\\ \frac{3\sqrt{15}}{32}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1' = \begin{pmatrix}-\frac{39}{64}\\ \frac{9\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} \begin{matrix}= -0{,}609\\ = 0{,}544\end{matrix}$$

$$\vec{u}_2'' = -\frac{1}{2}\cdot\vec{u}_{2\parallel} + \vec{u}_{2\perp} = -\vec{u}_{2\parallel}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{45}{32}\\ \frac{3\sqrt{15}}{32}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{32}\\ -\frac{3\sqrt{15}}{32}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{45}{64}\\ -\frac{3\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{32}\\ -\frac{3\sqrt{15}}{32}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2' = \begin{pmatrix}\frac{39}{64}\\ -\frac{9\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 0{,}609\\ = -0{,}544\end{matrix}$$

Geschwindigkeit im Laborsystem

$$\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{V} = \begin{pmatrix}-\frac{39}{64}\\ \frac{9\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{57}{64}\\ \frac{9\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 0{,}89\\ = 0{,}544\end{matrix}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{u}_2' + \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{39}{64}\\ -\frac{9\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{135}{64}\\ -\frac{9\sqrt{15}}{64}\end{pmatrix} \begin{matrix}= 2{,}109\\ = -0{,}544\end{matrix}$$

# Beispiel Ablauf.2

- vollständig inelastischer Stoß

$$\vec{u}_1'' = -0 \cdot \vec{u}_{1\parallel} + \vec{u}_{1\perp}$$

$$= -0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{45}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1' = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 0{,}093 \\ = 0{,}363 \end{matrix}$$

$$\vec{u}_2'' = -0 \cdot \vec{u}_{2\parallel} + \vec{u}_{2\perp} = -\vec{u}_{2\parallel}$$

$$= -0 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{45}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = -0{,}093 \\ = -0{,}363 \end{matrix}$$

Geschwindigkeit im Laborsystem

$$\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{32} \\ \frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 1{,}593 \\ = 0{,}363 \end{matrix}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{u}_2' + \vec{V} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{32} \\ -\frac{3\sqrt{15}}{32} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 1{,}406 \\ = -0{,}363 \end{matrix}$$