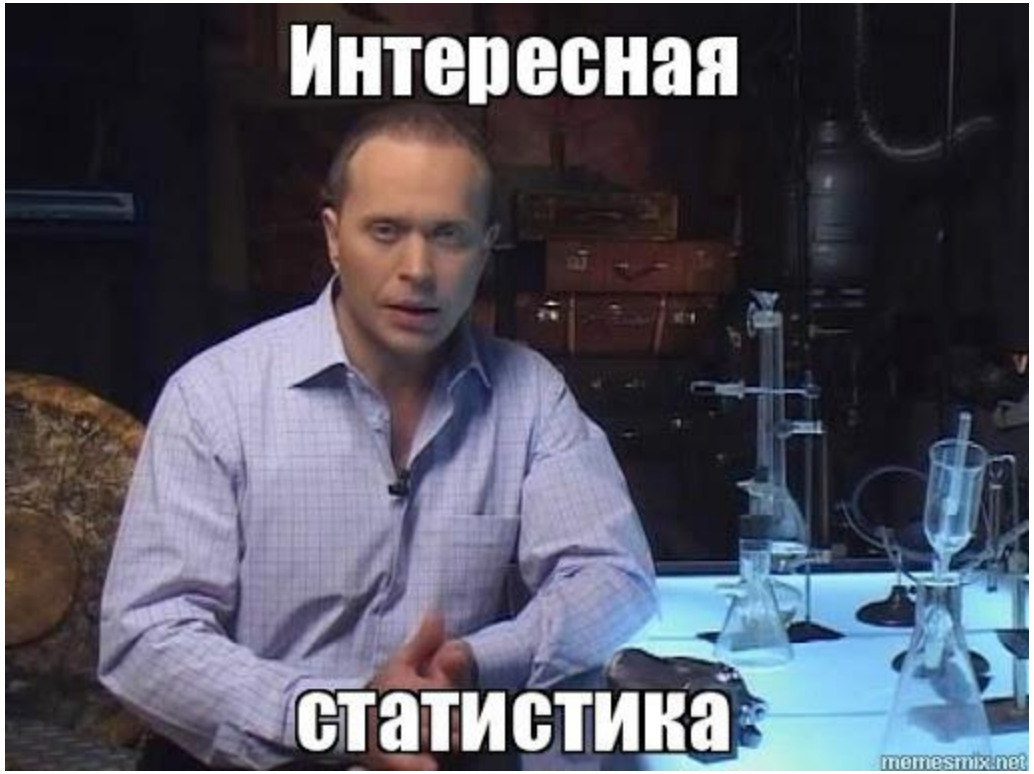
Сортировки-2 и k-я порядковая статистика

Шовкопляс Григорий

Введение в алгоритмы и структуры данных



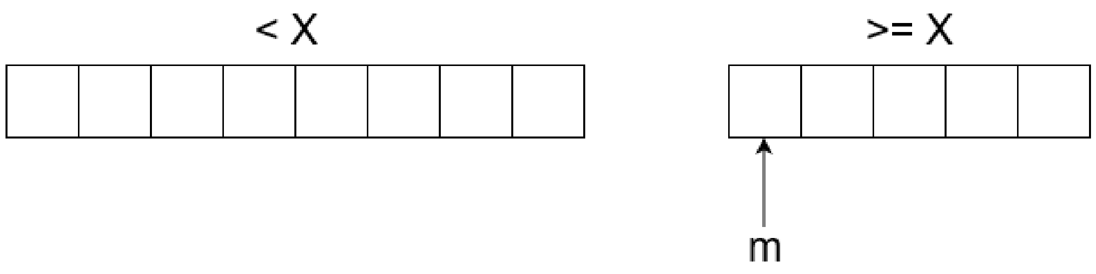
K-я порядковая статистика

K-я порядковая статистика

- Дан массив чисел
- Требуется найти в нем K-й по величине элемент
- Как это сделать?
    - Sort(a), return a[k]
    - O(nlogn)
    - Можно ли быстрее?

Алгоритм Хоара

- Рассмотрим кусочки массива после операции split(a, x)
- Пусть в левой части m элементов



- Если m > k рекурсивно переходим к левой части
- Иначе к правой
- Когда придем к массиву размера один, найдем ответ

Алгоритм Хоара

Псевдокод

Инвариант: l <= k < r!

```
find(k, l, r)
  x = a[random(l..r-1)]
  m = split(l, r, x)
  if k < m
    return find(k, l, m)
  else
    return find(k, m, r)
```

Алгоритм Хоара

Опять забыли терминальное условие!

```
find(k, l, r)
  if r - l == 1
    return a[k]
  x = a[random(l..r-1)]
  m = split(l, r, x)
  if k < m
    return find(k, l, m)
  else
    return find(k, m, r)
```

Анализ

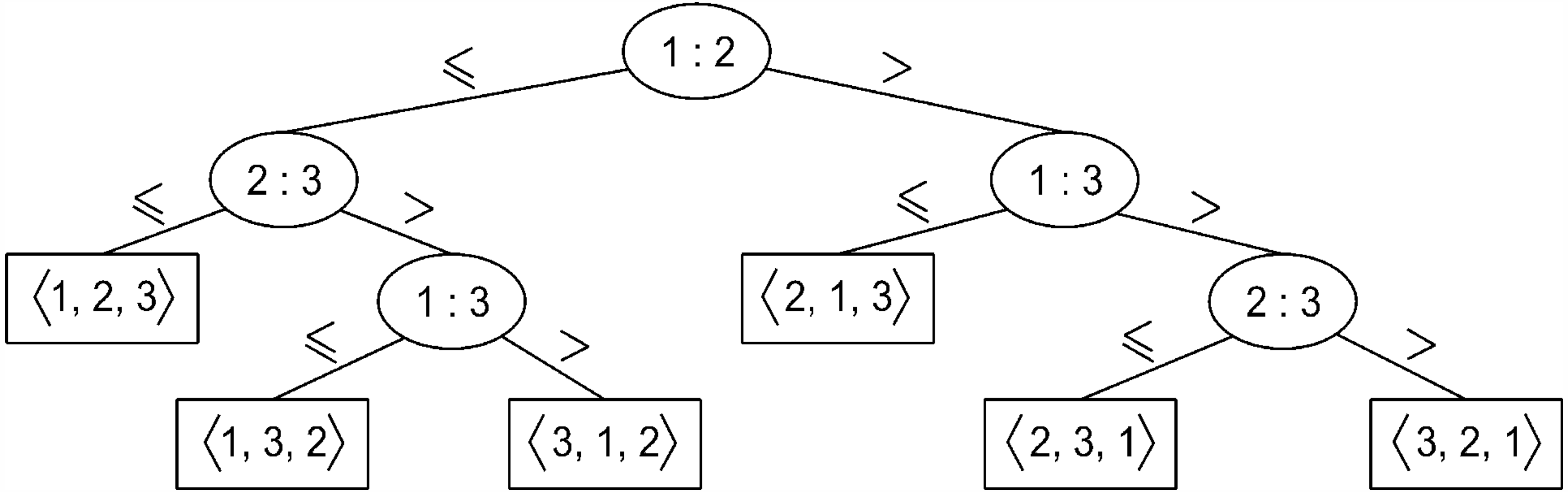
- Какие бы у нас могли возникнуть проблемы, если бы мы были любителями срезов из питона?
- Почему это будет работать быстрее, чем сортировка?
  - $E(T(n)) = 3 \times \left(n + \frac{2}{3}n + \frac{4}{9}n + \cdots\right) =$
  - $= 3n \times \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i =$
  - $= 3n \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 9n$
  - Работает за O(n) в среднем получается!

Есть ли сортировки быстрее быстрой?

Время теорем

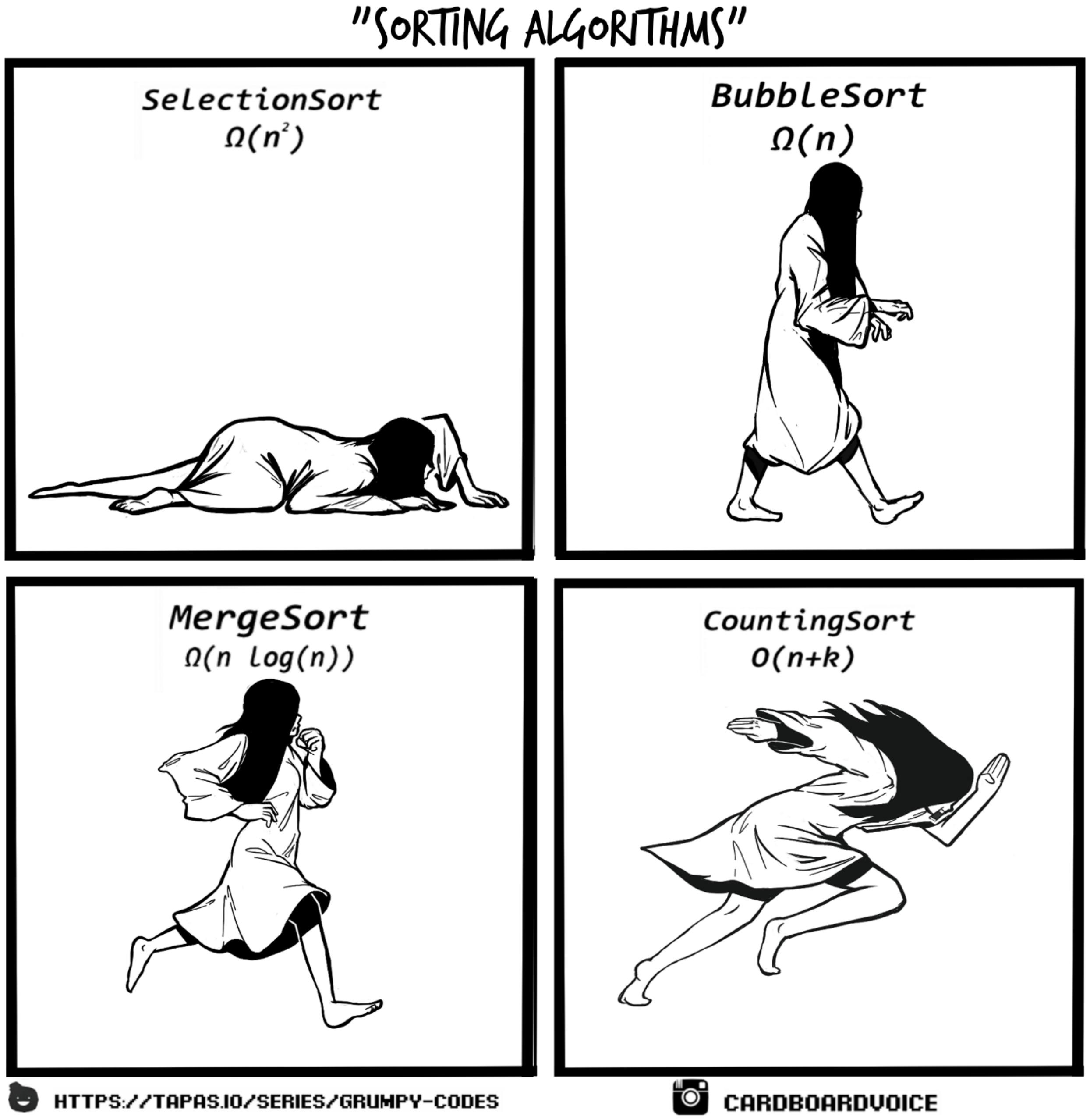
- Все рассмотренные сортировки требуют от элементов массива отношение порядка
- Давайте докажем, что нельзя сортировать быстрее, чем за nlogn
- Теорема о нижней оценке для сортировки сравнениями:
  - В худшем случае любой алгоритм сортировки сравнениями выполняет $\Omega(n \log n)$ сравнений

Теорема о нижней оценке для сортировки сравнениями



Теорема о нижней оценке для сортировки сравнениями

- Какая высота у данного дерева?
- Дерево двоичное $\Rightarrow h \geq \log_2(leafs)$
- Всего перестановок $n! \Rightarrow h \geq \log_2(n!)$
- $\geq cnlogn$
- $h = \Omega(nlogn)$
- Можно ли сортировать быстрее?



Сортировка подсчетом

Сортировка подсчетом

- Дан целочисленный массив a, размера n
- $0 \leq a_i < m$
- Заведем вспомогательный массив cnt размера m
- Посчитаем сколько раз каждое число встречается в массиве
- Перезапишем исходный массив

Сортировка подсчетом

Псевдокод

Сколько работает?

$O(n + m)$

```
for i = 0 to n - 1
  cnt[a[i]]++

i = 0
for j = 0 to m - 1
  while cnt[j] > 0
    a[i++] = j
    cnt[j]--
```

Сортировка подсчетом

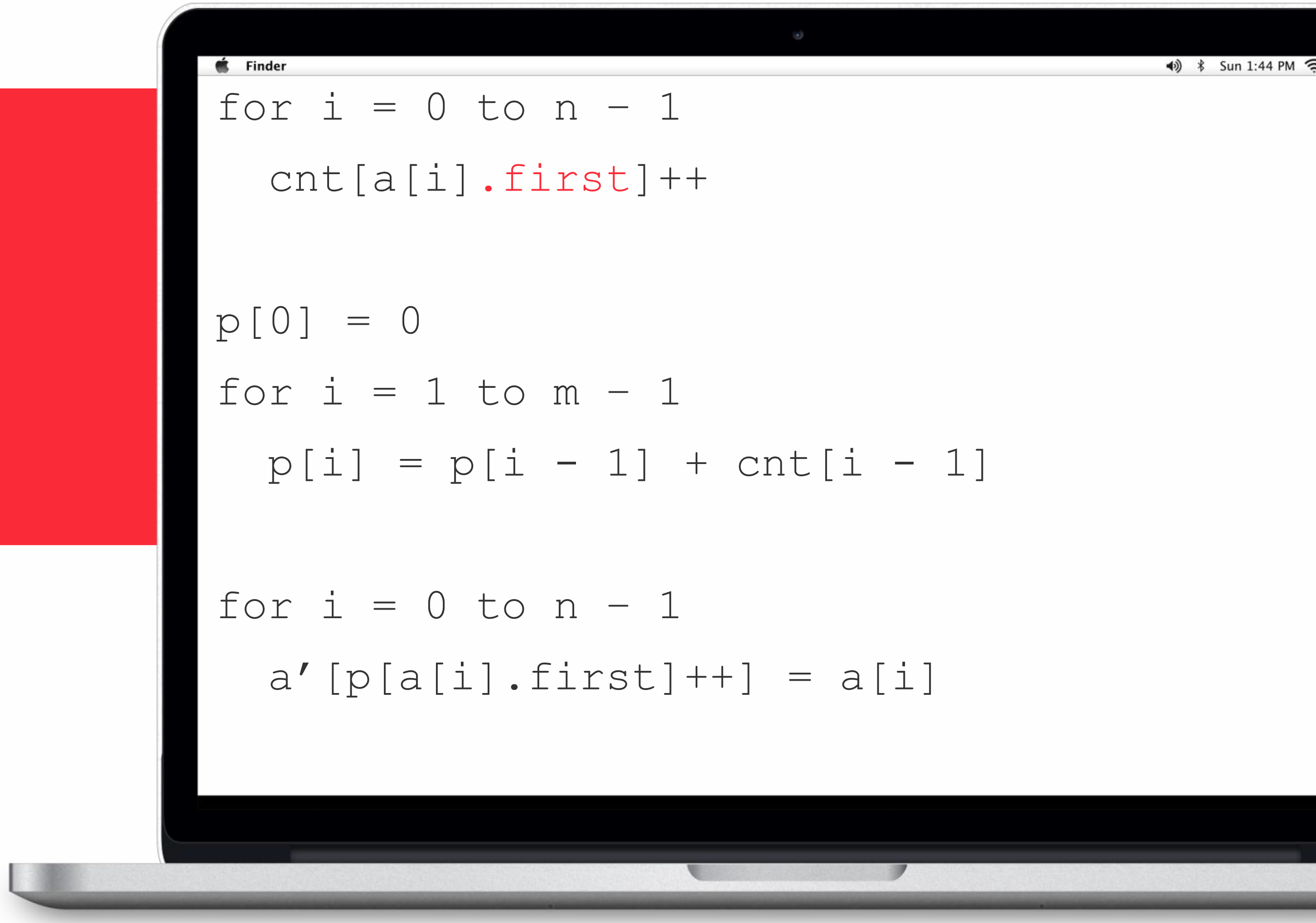
- Можно сортировать отрицательные числа?
- Можно ли сортировать большие числа?
- Анаграммы?
- Можно ли сортировать кортежи по «маленькому» ключу?
  - Найдем диапазоны, в которых будут лежать элементы

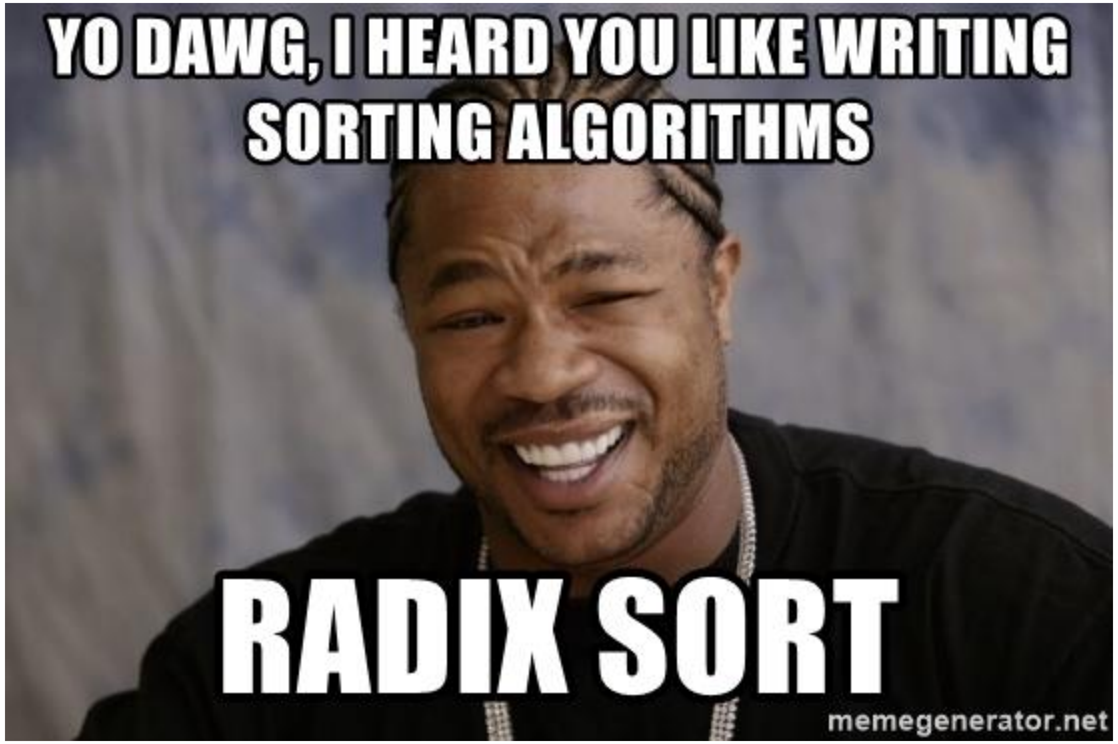
Сортировка подсчетом пар по первому элементу

Псевдокод

Сколько работает?

O(n + m)
Бонус: устойчивость





Цифровая сортировка

Цифровая сортировка

- Дан целочисленный массив a, размера n
- $0 \le a_i < m^k$
- Представим числа в m-ичной системе счисления
- У каждого k цифр (возможны ведущие нули)
- Будем сортировать их как кортежи по цифрам

Цифровая сортировка

- Если сортировать от старших разрядов к младшим долго☹
- А можно ли от младших к старшим?
- Да, если у нас есть устойчивая сортировка… секундочку!
- Идем по возрастанию разряда и сортируем устойчиво по каждой следующей цифре
- За сколько работает?
    - $O(k(n + m))$
- Память $O(n + m)$

Все!