Tugas Praktikum Metode Numerik
Tahun Ajaran 2018/2019

Petunjuk Umum

1. Kerjakan secara individu

2. Kerjakan kedua bagian dalam tugas ini, yaitu:
   - Program, kerjakan dalam format .py atau .ipynb
   - Penjelasan, kerjakan dalam format .pdf (konversikan file Anda terlebih dahulu setelah mengerjakan dalam .docx atau .pptx)

3. Bagian Program dari tugas ini dikumpulkan dalam format:
   NPM_Nama_Kelas SIAK_MetNum_Nomor Soal_Versi Python
   Contoh: 1606884136_Abyoso Hapsoro N_E_MetNum_Nomor 5_Py3
   Sehingga akan terdapat **lima** file .py atau .ipynb yang harus dikumpulkan. Namun, Anda dibolehkan untuk mengumpulkan hanya satu file yang berisikan program semua nomor

4. Bagian penjelasan dari tugas ini dikumpulkan dalam format:
   NPM_Nama_Kelas SIAK_MetNum_Penjelasan
   Contoh: 1606884136_Abyoso Hapsoro N_E_MetNum_Penjelasan
   Kumpulkan hanya **satu** file penjelasan yang berisi penjelasan untuk semua lima nomor. Penjelasan Anda harus menjelaskan program yang dibuat dan menjawab soal bagian B

5. Kumpulkan keenam file tersebut dengan subject e-mail:
   MetNum_Kelas SIAK_NPM_Nama_Versi Python
   Attachment dalam e-mail dapat berupa sebuah file rar atau zip yang berisi keenam file maupun keenam file itu sendiri tanpa dimasukkan ke dalam zip atau rar.

6. Batas maksimal pengumpulan tugas ini adalah **Rabu, 13 November 2019 pukul 23.59** WIB ke email sesuai kelas SIAK Anda
   Kelas A: komputasikelasa@gmail.com
   Kelas B: komputasikelasb@gmail.com
   Kelas C: komputasikelasc@gmail.com
   Kelas D: komputasikelasd@gmail.com
   Kelas E: komputasikelase@gmail.com

7. **Dilarang melakukan plagiarisme** atau menduplikasi dalam mengerjakan tugas ini. Apabila terdapat kesamaan program atau penjelasan pada tugas yang dikumpulkan, akan dikenakan sanksi berupa pemotongan nilai bagi semua pihak yang terlibat plagiarisme.

8. Apabila ada yang ingin ditanyakan, silakan mengontak salah satu kontak

   berikut: Pandu (LINE: pandusetyailham / WA: 087878719036)
   Raisya (LINE: raisyafaradesy / WA: 085880252050)

Nama : Abdullah Hasan
NPM : 1606875125
Kelas Metnum : D

Soal Bagian A

1. $f(x) = (e^x - e^{-x})/b$, dimana $b = \max\{d, 10 - d\}$, dengan d adalah digit terakhir dari NPM anda, sebagai contoh untuk NPM 180612345678 maka $b = \max\{8,2\} = 8$. Buatlah suatu program untuk mengaproksimasi akar dari fungsi $f(x)$ pada interval $[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}]$, yang menerima input berupa:

–

a. Metode yang akan digunakan (Bisection/Fixed-Point/Newton/Secant/Regula-Falsi) beserta nilai-nilai awal yang dibutuhkan per metode
b. Toleransi error
c. Banyak iterasi maksimal

Output yang ada dari program tersebut berupa tabel (pakai tabulate). Contoh bentuk tabel dari sebuah metode yang selesai setelah 2 iterasi:

i	Hasil Aproksimasi Metode (nama metode)
0 (awal)	…
1	…
2	…

Contoh bentuk tabel dari sebuah metode yang tidak selesai sampai banyak iterasi maksimal $= N$:

i	Hasil Aproksimasi Metode (nama metode)
0 (awal)	…
1	…
…	…
N	Metode gagal setelah N iterasi

Bonus:

- Definisikan fungsi bukan secara eksplisit namun secara implisit, dimana pengguna program dapat memasukkan fungsi sendiri. Begitu pula dengan intervalnya.
- Buatlah suatu opsi "Semua" pada pemilihan metode yang digunakan, untuk menghasilkan output semua metode dalam 1 tabel. Contoh bentuk tabel dari 2 metode (di contoh ini dimisalkan banyak metode ada 2, yang harusnya ada 5) dimana metode 1 selesai 4 iterasi, dan metode 2 selesai 2 iterasi:

i	Hasil Aproksimasi Metode (nama metode 1)	Hasil Aproksimasi Metode (nama metode 2)
0 (awal)	…	…
1	…	…
2	…	…
3	…	x
4	…	x

2. Buatlah suatu program dengan input :
   - Fungsi yang di input, yaitu $f(x)$
   - Batas bawah integral, yaitu Batas atas integral, yaitu b
   - Banyak titik yang akan digunakan untuk membentuk plot $f(x)$ dan $F(x)$, yaitu

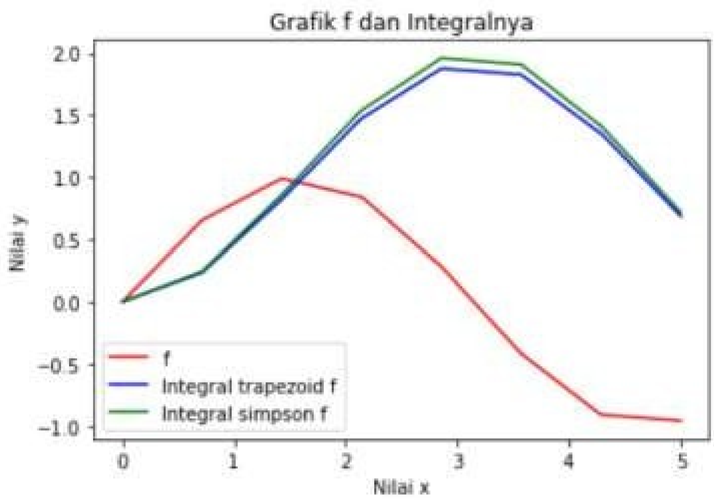
     n sehingga didapat $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

   Dengan output :

- Plot dari $f(x)$ pada interval [a,b]
- Plot dari $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pada [a,b] dengan aproksimasi menggunakan metode trapezoid.
- Plot dari $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pada [a,b] dengan aproksimasi menggunakan metode simpson.

Contoh input dan output :

```
Masukan fungsi : sin(x)
Masukkan batas bawah integral : 0
Masukkan batas atas integral : 5
Masukkan banyak titik : 7
```



Bonus :

Ubah soal sebelumnya menjadi satu fungsi, atau dengan kata lain buat fungsi F dengan input :

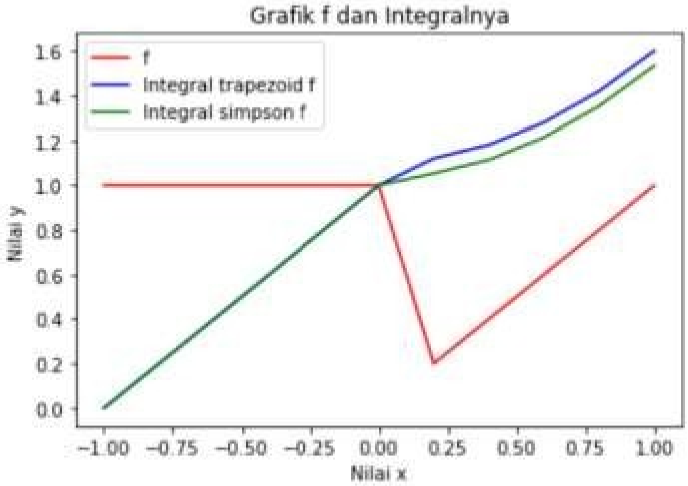
- fungsi yang akan dimasukan f(x)
- batas bawah a
- batas atas b
- Banyak titik yang akan digunakan untuk membentuk plot $f(x)$ dan $F(x)$, yaitu

n dan output :

- Plot dari $f(x)$ pada interval [a,b]
- Plot dari $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pada [a,b] dengan aproksimasi menggunakan metode trapezoid.
- Plot dari $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pada [a,b] dengan aproksimasi menggunakan metode simpson.

Sehingga kita dapat memasukan fungsi piecewise ,dengan contoh input dan output seperti ini :

```
In [42]: def h(x):
             if x > 0:
                 return x
             else:
                 return 1

         F(h,-1,1,10)
```



Hint :

Dalam membuat plot $F(x)$ kita tinggal mencari nilai $F(x_0), F(x_1), \dots, F(x_{n-1}), F(x_n)$ dan kita bisa mencari nilai $F(x_0), F(x_1), \dots, F(x_{n-1}), F(x_n)$ dengan memperhatikan

$$F(x_i) = \int_a^{x_i} f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt + \cdots + \int_{x_{i-1}}^{xi} f(t)dt$$

Dimana $\int_{x_{i-1}}^{xi} f(t)dt$ dapat dicari dengan metode aproksimasi.

3. Buatlah sebuah program untuk menginterpolasi nilai di sebuah titik yang meminta input:
    1. Pilihan untuk memasukkan list titik-titik atau memakai fungsi (membuat sendiri titik-titik dari fungsi tsb)
        a. Jika memilih untuk memasukkan list titik-titik, program akan meminta untuk memasukkan titik-titik dalam list (seperti [1,2,3]) dan titik-titik dalam x dan y harus sama.

b. Jika memilih untuk memakai fungsi, program akan meminta memasukkan fungsi, batas bawah, batas atas, dan jumlah partisi.

2. Pilihan metode (Polinomial Interpolasi Lagrange/ Newton Divided-Difference) Jika metode yang dipilih adalah Newton Divided-Difference, program akan meminta input tambahan berupa:
    a. Pilihan untuk memakai metode Forward atau Backward.
    b. Pilihan untuk menampilkan tabel Divided-Differenceya (Jika ya, maka output tabel langsung ditampilkan).
3. Titik dimana nilai akan diinterpolasi.

dan program akan mengeluarkan output berupa:

1. Polinomial interpolasi (dari metode yang digunakan).
2. Hasil interpolasi di titik tersebut (dengan nama metode yang digunakan).

Hint: Modifikasi program yang telah diajarkan (jika biasanya langsung masukkan angka, sekarang modifikasi menjadi string, supaya yang diolah di program tetap dalam variabel ‘x’) dan gunakan package ‘sympy’ untuk menyederhanakan fungsi polinomial yang telah dibentuk oleh fungsi program.

```
In [1]: import sympy as sp
        def Lagrange(xpoints,ypoints):

          return pol

In [2]: x = [1,2,3,4]
        y = [1,3,6,9]
        Lagrange(x,y)

Out[2]: '1*((x-2)/(-1))*((x-3)/(-2))*((x-4)/(-3))+3*((x-1)/(1))*((x-3)/(-1))*((x-4)/(-2))+6*((x-1)/(2))*((x-2)/(1))*((x-4)/(-1))+9*((x-1)/(3))*((x-2)/(2))*((x-3)/(1))+0'

In [3]: polinomial =
        print(polinomial)

        -x**3/6 + 3*x**2/2 - 4*x/3 + 1
```

Bonus apabila

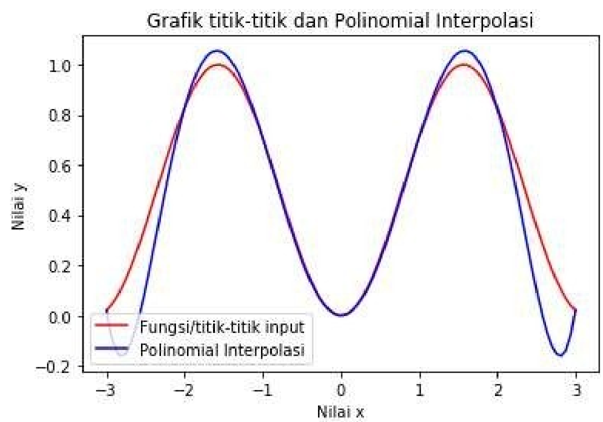
a. Menggunakan error handling, yaitu ketika tipe input salah dimasukkan atau input tidak sesuai dengan apa yang diminta, program dapat meminta untuk menginput kembali.
b. Program meminta input tambahan berupa:
    - Pilihan untuk menampilkan grafik dari titik-titik yang diinput dan grafik dari polinomial interpolasi (Jika ya, maka output kedua grafik langsung ditampilkan, boleh digabung dalam 1 grafik).
c. Dan output tambahan berupa:
    - Jika memakai fungsi, maka akan ditampilkan hasil eksak dan errornya.

Contoh :

```
1 untuk memasukkan list titik-titik
2 untuk memakai fungsi

Masukkan pilihan :
2

Masukkan fungsi:
sin(x)**2

Masukkan batas bawah:
-3

Masukkan batas atas:
3

Masukkan jumlah partisi:
7

1 untuk Lagrange
2 untuk NDD

Masukkan metode yang ingin digunakan :
2

Pilihan metode?(f/b):
f

Tampilkan tabel?(y/n):
y
|    x     |   y    |   DD1   |   DD2   |   DD3   |   DD4   |   DD5   |  DD6   |
|----------+--------+---------+---------+---------+---------+---------+--------|
| -3.0000  | 0.0199 | 0.8069  | -0.4628 | 0.0561  | 0.0695  | -0.0473 | 0.0158 |
| -2.0000  | 0.8268 | -0.1187 | -0.2947 | 0.3342  | -0.1671 | 0.0473  |   -    |
| -1.0000  | 0.7081 | -0.7081 | 0.7081  | -0.3342 | 0.0695  |    -    |   -    |
| 0.0000   | 0.0000 | 0.7081  | -0.2947 | -0.0561 |    -    |    -    |   -    |
| 1.0000   | 0.7081 | 0.1187  | -0.4628 |    -    |    -    |    -    |   -    |
| 2.0000   | 0.8268 | -0.8069 |    -    |    -    |    -    |    -    |   -    |
| 3.0000   | 0.0199 |    -    |    -    |    -    |    -    |    -    |   -    |

Masukkan titik x dimana nilai f(x) akan diinterpolasi:
0.5

Polinomial interpolasi dengan menggunakan metode Forward NDD adalah:
0.0157794444444443*x**6 - 1.35525271560688805e-18*x**5 - 0.246030555555554*x**4
+ 2.38524477946810098e-17*x**3 + 0.938351111111114*x**2 -
3.31765864780564336e-17*x + 2.37657116208822558e-16

Hasil interpolasi pada titik x = 0.5 adalah: 0.2194574
```

Contoh bonus:

```
Hasil eksak pada titik x = 0.5 adalah: 0.2298488

Errornya adalah sebesar:  0.01039142519092992

Tampilkan grafik?(y/n): y
```



Bonus

4. Sebuah fungsi f(x) didefinisikan sebagai $x^5 + 9x^4 - ax^3 + bx^2 – cx + 5 = 0$ dimana a, b, dan c adalah tiga digit terakhir berturut-turut dari NPM kalian. (Contoh: Untuk NPM 1806906412 maka fungsi yang digunakan adalah $x^5 + 9x^4 - 4x^3 + x^2 – 2x + 5 = 0$).

Buatlah program yang dapat memberikan output berupa lima hasil turunan yakni menggunakan metode TPMP, TPEP, FPMP, FPEP, dan turunan aslinya.

5. Misalkan $g(x) = \ln(4 + x - x^2)$.

a. Estimasi *fixed point* dari $g(x)$ dengan algoritma *Fixed Point* dengan nilai toleransi 10^{-10} dan nilai $p_0 = 2$.

b. Percepat konvergensi dari barisan $\{p_n\}$ yang diperoleh pada (a) dengan metode Aitken dan gambarkan $\frac{|\hat{p}_{n+1} - p|}{|\hat{p}_n - p|}$

<u>Bonus</u>:

Buat juga bagian b) dengan metode Steffensen.

Soal Bagian B

1. Di antara semua metode untuk mengaproksimasikan akar dari fungsi $f(x) = (e^x - e^{-x})/b$ pada interval $\left[-\frac{\pi}{5}, \frac{�}{4}\right]$, manakah yang lebih baik dalam melakukan aproksimasi? Mengapa demikian?
   Apakah semua metode konvergen ke akar yang dicari? Jika iya, mengapa? Jika tidak, mengapa? Jelaskan untuk setiap metode
   Bonus:
   - Jika intervalnya menjadi $[-z, z]$, untuk metode Fixed-Point, apakah dijamin didapatkan akar yang unik jika $z \leq \frac{\ln(b)}{3}$?
   - Apakah metode Newton dijamin konvergen untuk fungsi $f(x)$ di atas, jika diambil titik awalnya p, untuk sembarang $p \in \mathbb{R}$? Jelaskan

2. Misalkan diberikan $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} \text{Cos}\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2x \text{ Sin}\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ pada interval [-1 , 1]. Dengan menggunakan program anda jelaskan apakah ada perbedaan antara aproksimasi $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ yang didapat dari metode trapezoid dan aproksimasi

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ yang didapat dari metode simpson. Jika ada jelaskan mengapa ada perbedaan tersebut ! Jika tidak mengerjakan bonus, bisa mendefinisikan $f(x)$ didalam program (Disarankan menghilangkan grafik dari f(x) selama sementara pada program anda)

3. Diberikan beberapa data waktu dan kecepatan suatu kendaraan saat waktu tersebut sebagai berikut:

Waktu (jam)	2	2.1	2.15	2.25	2.34	2.39	2.43	2.5
Kecepatan (km/jam)	27.0	37.5	40.6	43.7	46.5	48.4	47.0	43.0

Estimasi jarak (dalam km) yang telah ditempuh oleh kendaraan tersebut!
Hint: Gunakan program yang telah dibuat pada nomor 3 tipe A untuk mendapatkan polinomial interpolasinya. Kemudian gunakan program Integral Numerik Komposit yang telah diajarkan untuk menghitung luas daerah dibawah kurva fungsi polinomial interpolasinya dari 2 hingga 2.5. Hanya kumpulkan screenshot berupa hasil polinomial interpolasi dan hasil integral numerik dari program-program yang anda buat, dan penjelasan metode interpolasi dan integral numerik yang anda pilih.

4. Bandingkan hasil dari keempat metode aproksimasi pada soal nomor 4, manakah yang paling mendekati turunan aslinya dan mengapa?

5. Jelaskan apa itu metode Steffensen dan manakah yang lebih baik kerjaan soal nomor 5(b) dengan metode Steffensen? Mengapa demikian?

Jawaban :

1. Penjelasan Mengenai beberapa metode :

Bisection Metode :

Pada Metode ini akan mencari akar dengan menggunakan binary search dengan mengandalkan teorema IVT dengan diberikan sebuah interval tertutup misalkan I:=[a,b] dengan f(a) dan f(b) berlainan tanda maka dijamin bahwa ada akar didalam interval tersebut.kerja interval berdasarkan teorema dengan membagi interval menjadi dua bagian lalu dicari dimana akar berada dengan menggunakan teorema tersebut.dengan algoritma sebagai berikut :

```
INPUT endpoints a, b; tolerance TOL; maximum number of iterations N0.
OUTPUT approximate solution p or message of failure.
Step 1 Set i = 1;
FA = f (a).
Step 2 While i ≤ N0 do Steps 3–6.
    Step 3 Set p = a + (b − a)/2; (Compute pi.)
    FP = f ( p).
    Step 4 If FP = 0 or (b − a)/2 < TOL then
    OUTPUT (p); (Procedure completed successfully.)
    STOP.
    Step 5 Set i = i + 1.
    Step 6 If FA · FP > 0 then set a = p; (Compute ai, bi.)
    FA = FP
    else set b = p. (FA is unchanged.)
Step 7 OUTPUT (‘Method failed after N0 iterations, N0 =’, N0);
(The procedure was unsuccessful.)
    STOP.
```

Fixed Point :

Pada metode pencarian akar kali ini kita berusaha mencari fixed point dari sebuah fungsi yang nantinya terbentuk sebuah fungsi yang nantinya digunakan sebagai barisan kekonvergenan akar dari metode ini.metode ini memiliki teorema yang menjamin bahwa fungsi itu akan memiliki fixed point dengan sebagai berikut :

(i) If $g \in C[a,b]$ and $g(x) \in [a,b]$ for all $x \in [a,b]$, then g has at least one fixed point in $[a,b]$.

(ii) If, in addition, $g'(x)$ exists on (a,b) and a positive constant $k < 1$ exists with

$$|g'(x)| \leq k, \quad \text{for all } x \in (a,b),$$

then there is exactly one fixed point in $[a,b]$. (See Figure 2.4.) ■

Pada teorema tersebut akan menjamin bahwa barisan $\{p_n\}$ akan konvergen ke p.

Dengan Algoritma sebagai berikut :

```
INPUT initial approximation p0; tolerance TOL; maximum number of iterations N0.
OUTPUT approximate solution p or message of failure.
Step 1 Set i = 1.
Step 2 While i ≤ N0 do Steps 3–6.
    Step 3 Set p = g( p0). (Compute pi.)
    Step 4 If | p − p0| < TOL then
    OUTPUT ( p); (The procedure was successful.)
    STOP.
    Step 5 Set i = i + 1.
    Step 6 Set p0 = p. (Update p0.)
  Step 7 OUTPUT (‘The method failed after N0 iterations, N0 =’, N0);STOP
```

Newton Method :

Pada metode pencarian akar ini kita akan mencari sebuah akar dari sebuah fungsi yang diketahui kontiyu,berangkat dari aproksimasi fungsi dengan menggunakan deret taylor yang nantinya kita dapatkan perumusan sebagai berikut :

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Dengan algoritma sebagai berikut :

```
INPUT initial approximation p0; tolerance TOL; maximum number of iterations N0.
OUTPUT approximate solution p or message of failure.
Step 1 Set i = 1.
Step 2 While i ≤ N0 do Steps 3-6.
    Step 3 Set p = p0 - f ( p0)/f

    ( p0). (Compute pi.)
    Step 4 If | p - p0| < TOL then
    OUTPUT (p); (The procedure was successful.)
    STOP.
    Step 5 Set i = i + 1.
    Step 6 Set p0 = p. (Update p0.)
Step 7 OUTPUT ('The method failed after N0 iterations, N0 =', N0);
(The procedure was unsuccessful.)
    STOP.
```

Secant Method :

Metode Pencarian akar ini merupakan metode yang berasal dari modifikasi dari metode sebelumnya yaitu newton dengan perumusan sebagai berikut :

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

Dengan algoritma sebagai berikut :

```
INPUT initial approximations p0, p1; tolerance TOL; maximum number of iterations N0.
OUTPUT approximate solution p or message of failure.
Step 1 Set i = 2;
q0 = f ( p0);
q1 = f ( p1).
Step 2 While i ≤ N0 do Steps 3-6.
    Step 3 Set p = p1 - q1( p1 - p0)/(q1 - q0). (Compute pi.)
    Step 4 If | p - p1| < TOL then
    OUTPUT (p); (The procedure was successful.)
    STOP.
    Step 5 Set i = i + 1.
    Step 6 Set p0 = p1; (Update p0, q0, p1, q1.)
    q0 = q1;
    p1 = p;
    q1 = f ( p).
Step 7 OUTPUT ('The method failed after N0 iterations, N0 =', N0);
(The procedure was unsuccessful.)
    STOP.
```

Regulafasi Method :

Metode Pencarian akar ini merupakan metode yang berasal dari modifikasi dari metode sebelumnya yaitu newton dengan perpaduan metode bisection sebagai pengecek bahwa ada akar disana,berikut algoritma dari metode tersebut :

False Position

To find a solution to $f(x) = 0$ given the continuous function f on the interval $[p_0, p_1]$ where $f(p_0)$ and $f(p_1)$ have opposite signs:

INPUT initial approximations p_0, p_1; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 2$;
$q_0 = f(p_0)$;
$q_1 = f(p_1)$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–7.

Step 3 Set $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$. (*Compute* p_i.)

Step 4 If $|p - p_1| < TOL$ then
OUTPUT (p); (*The procedure was successful.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$;
$q = f(p)$.

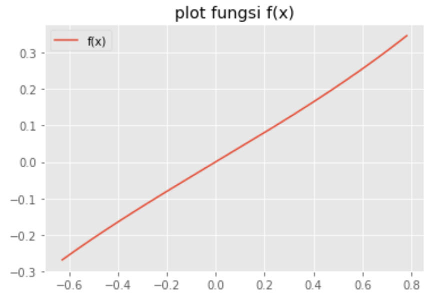
Step 6 If $q \cdot q_1 < 0$ then set $p_0 = p_1$;
$q_0 = q_1$.

Step 7 Set $p_1 = p$;
$q_1 = q$.

Step 8 OUTPUT ('Method failed after N_0 iterations, $N_0 =$', N_0);
(*The procedure unsuccessful.*)
STOP.

SOAL

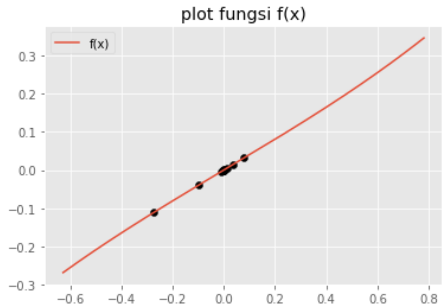
Diberikan sebuah fungsi $f(x) = (e^x - e^{-x})/b$, dimana $b = \max\{d, 10 - d\}$
Karena NPM saya 1606875125 sehingga kita biliki nilai b=max{5,5}=5.setelah berhasil mendapatkan nilai b selanjtnya kita akan mencoba untuk memplot fungsi tersebut dalam interval yang diberikan sehingga kita dapatkan :



Dari gambar kita dapat melihat bahwa fungsi yang kita miliki melewati sumbu x(memiliki akar real) yang nilainya akan kita cari menggunakan beberapa metode.berikut beberapa metode yang akan digunakan :

1.Bisection
2.Fixed Point
3.Newton
4.Secant
5.Regulafasi

a. Dengan menggunakan metode Bisection kita dapatkan :

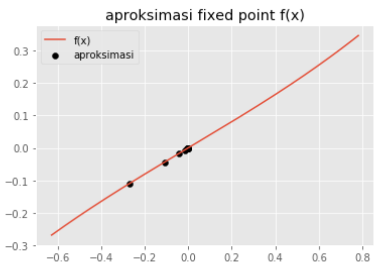


Dengan titik hitamnya menunjukan akar-akar yang menuju ke aproksimasi akar, Dengan mendapatkan tabel untuk 100 iterasi dan toleransi 10^{-5} didapatkan :

	akar
0	0.078540
1	-0.274889
2	-0.098175
3	-0.009817
4	0.034361
5	0.012272
6	0.001227
7	-0.004295
8	-0.001534
9	-0.000153
10	0.000537
11	0.000192
12	0.000019

Dari Data disamping bahwa hasil menunjukan barisan aproksimasi akar menuju ke nilai : 0.000019 .

b. Dengan menggunakan metode Fixed Point kita dapatkan hasilnya seperti berikut

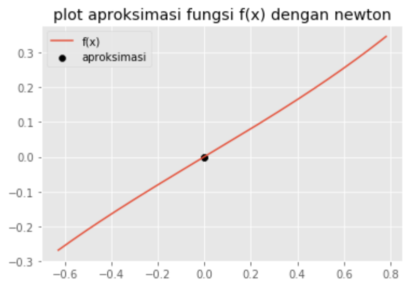


Dari gambar disamping merupakan barisan kekonvergenan menggunakan fixed point.dengan N sebanyak 100 ,titik awal di ujung kiri interval dan toleransi sebesar 10^{-5}

	akar
0	-0.268194
1	-0.108568
2	-0.043513
3	-0.017411
4	-0.006965
5	-0.002786
6	-0.001114
7	-0.000446
8	-0.000178
9	-0.000071
10	-0.000029
11	-0.000011

Dari gambar disamping kita dapatkan barisan kekonvergenan dari metode fixed point yang ditampilkan dengan menggunakan tabel.

c. Dengan menggunakan metode Newton kita dapatkan hasilnya seperti berikut :

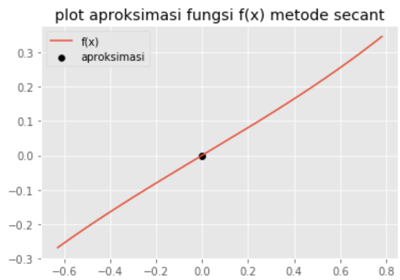


Dari gambar disamping diberikan bahwa pada awal iterasi barisan yang kita miliki sudah mendekati akar sesunguhnya. parameternya(batas iterasi dengan nilai toleransinya) sama dengan metode metode sebelumnya.

	akar
0	-1.234567e-04
1	-1.097450e-08

Dari data disamping menunjukan bahwa barisan kekonvergenan setelah menggunakan Newton

d. Dengan menggunakan metode Secant kita dapatkan hasilnya seperti berikut :

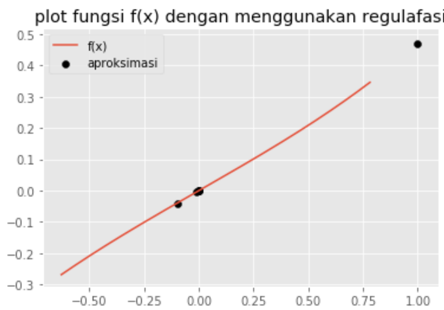


Dari data disamping menunjukan hasil kekonvergenan dari menggunkaan metode Secant dalam plot.
dengan parameter yang sama dengan beberapa metode sebelumnya(batas dan toleransinya).

	akar
0	-1.234567e-04
1	-1.097450e-08

Dari gambar disamping merupakan gambar barisan dengan menggunakan 100 iterasi.

e. Dengan menggunakan metode Regulafasi kita dapatkan hasilnya seperti berikut :



Gambar diatas merupakan plot dari akar-akar yang kita dapatkan dengan menggunakan metode pencarian akar menggunakan regulafasi dengan nilai awal -0.1 dan 1.

Dengan table akar akar tersebut ditampilkan seabgai berikut :

	Akar regulfasi
0	-0.100000
1	1.000000
2	-0.013607
3	-0.002005
4	-0.000298
5	-0.000044
6	-0.000007

Table akar-akar tersebut didapatkan dengan menggunakan metode regulafasi.

BONUS

Misalkan Pada soal bonus ini kita ingin mengnginkan penggunaan dari metode bisection dan metode newton untuk mengaproksimasi fungsi $f(x)=1-e^x$ .dengan menggunanakan program kita mmenggunakan inteval [-1,2] denga toleransi sebesar 10^{-4} dan menggunakan titik inisialnya sebesar -1 maka kita dapatkan tabel gabungan yang kita punya seperti berikut :

	bisection	newton
0	0.500000	2.057346e-01
1	-0.250000	1.977213e-02
2	0.125000	1.961831e-04
3	-0.062500	4.174405e-08
4	0.031250	NaN
5	-0.015625	NaN
6	0.007812	NaN
7	-0.003906	NaN
8	0.001953	NaN
9	-0.000977	NaN
10	0.000488	NaN
11	-0.000244	NaN
12	0.000122	NaN
13	-0.000061	NaN

Kita dapat melihat bahwa metode newton lebih cepat konvergen dibandingkan dengan metode bisection

2. Penjelasan Integrasi Numerik

Pada nomor dua ini kita diminta untuk menghitung sebuah teknik pengintegralan dengan menggugnakan beberapa metode diantaranya adalah sebagai berikut :

a. Metode Trapezoidal :

Pada metode ini kita memiliki dua titik diamana titik awal dan titik akhir.berangkat dari interpolasi lagrange kita akan mengkontruksikan fungsi tersebut dan akan digunakan dalam aproksimasi integrasinya.

Misal kita memiliki dua titik katakan lah x_1 dan x_0 dengan $x_1= x_0+h$ dan h merupakan bilangan yang kecil.selanjutnya kita akan menggunakan lagrange interpolasi dari dua titik sehingga kita dapatkan :

$$P_1(x)= \frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)\right]dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\varepsilon(x))(x-x_0)(x-x_1)dx$$

Karena perkalian antara $(x-x_0)(x-x_1)$ tidak merubah tanda pada interval $[x_0,x_1]$,sehingga dengan menggunakan teorema 1.13 bisa diaplikasikan kedalam term error menjadi sebagai berikut :

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\varepsilon(x))(x-x_0)(x-x_1)dx=f''(\varepsilon(x))\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx$$

$$\leftrightarrow f''(\varepsilon(x))\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx=\frac{-h^3}{6}f''(\varepsilon)$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan diatas kita dapatkan hasil sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$
$$=\frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

Dengan pemisalan bahwa :

$$h=x_1-x_0$$

sehingga kita dapatkan bentuk formula trapezoidal sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

b. Metode Simpson :

Pada metode ini kita memiliki tiga titik dimana titik awal ,titik tengah dan titik akhir.berangkat dengan menggunakan interpolasi lagrange kita akan menggunakan hasil aproksimasi fungsi tersebut untuk menggunakan aproksimasi integral yang nantinya dimanamakan dengan metode Simpson.

Sama dengan metode Trapezoidal kita akan menggunakan metode simpson integrasi namun yang berbeda hanya pada bagian jumlah titik saja.pada metode simpson kita memiliki tiga titik yang akan digunakan untuk membuat sebuah polinamial lagrange.setelah menggunakan polinomial lagrange tersebut akan digunakan untuk aproksimasi integral nya.

Kita akan mencari polinmial lagrange sebagai berikut :

P2(x)= $\frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}\frac{(x-x_2)}{x_0-x_2}f(x_0)+\frac{(x-x_2)}{x_1-x_2}\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{(x-x_0)}{x_2-x_0}\frac{(x-x_1)}{x_2-x_1}f(x_2)$

Setelah menerapkan polinomial lagrange tersebut kita dapatkan :

$$x_2$$

$$\frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}\frac{(x-x_2)}{x_0-x_2}f(x_0)+\frac{(x-x_2)}{x_1-x_2}\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{(x-x_0)}{x_2-x_0}\frac{(x-x_1)}{x_2-x_1}f \text{¿} dx+\frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_1} f'''(\varepsilon(x))(x-x_0)(x-x_1)(x-$$

¿

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} \text{¿}$$

Dengan menggunakan Simpson kita dapatkan truncation errornya menjadi lebih bagus,dengan cara yang sama maka kita akan mendapatkan nilai aproksimasi integral dari fungsi menjadi sebagai berikut :

Simpson's Rule:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

SOAL

1. Pada nomor dua ini kita diminta untuk membuat sebuah program dengan input :
   - **a.** Fungsi yang ingin di integrasi
   - **b.** Batas atas
   - **c.** Batas Bawah
   - d. Jumlah titik atau Partisinya

   Dengan keluaran sebuah :

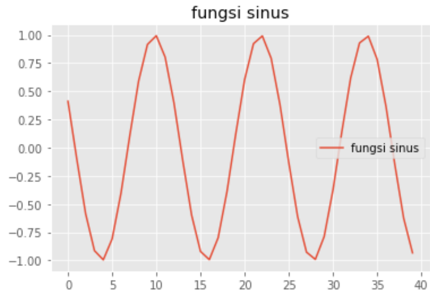
   a. Plot fungsi dari fungsi itu sendiri

   b. Plot pendekatan integral dengan menggunakan metode trapezoidal

   c. Plot pendekatan integral dengan menggunakan metode simpson

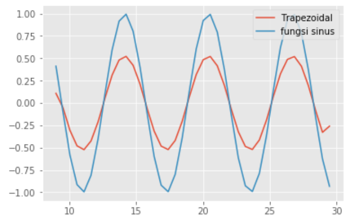
   Misalkan kita masukan input fungsi $f(x)=\sin(x)$ dengan batas bawah sebesar 9 dan batas atas sebesar 30,dengan banyak titik sebanyak 40 kita akan menggunakan teknik teknik aprksimasi integral untuk menghitng luas dari fungsi tersebut.

   Misalkan kita plot terlebih dahulu fungsi sinus tersebut :



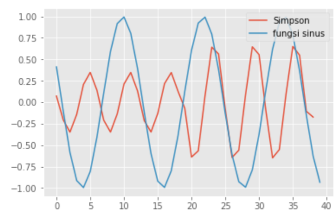
   Kita akan mengeaproksimasi fungsi tersebut dengan menggnakan beberapa metode seperti trapezoidal dan simpson.pertama-tama kita akan gunakan metode trapezoidal dengan hasil :

Trapezoidal Rules



Dengan menggunakan cara yang sama kita akan mencari nilai integrasi dengan menggunakan metode simpson dengan menggunakan batas-batas yang sama dan banyak titik yang sama.

Simpson Rules



Gambar diatas merupakan teknik integrasi menggunakan simpson rule dengan parameter yang sama dengan nomor sebelumnya.

3 .Penjelasan Mengenai Teknik Interpolasi

Pada bagian ini saya akan mencoba untuk memberikan bagaimana teknik interpolasi digunakan untuk mengaproksimasi sebuah fungsi dengan diberikan sebuah data.dari teknik interpolasi yang sudah kita kenal seperti deret taylor yang sudah didefinsikan sebelumnya dalam bentuk :

Taylor

Namun deret tersebut tidak dapat merepresentasikan sebuah fungsi diluar titik insialnya semakin berjalan jauh dari titik tersebut kita mendapatkan nilai error yang semakin besar.untuk itu diberikan beberapa metode pengaproksimasi dari sebuah fungsi yang diberikan sebuah data berikut metode diantaraya :

1. Simple Lagrange
2. Divided difference
3. Hermite Interpolasi

Sebenarnya dasar dari beberapa metode diatas berdasarkan dari polinomial lagirange yang didasasrkan dari teorema weiestrass.

SOAL

Pada contoh kali ini kita akan mencoba untuk menginterpolasi x^2 dengan batas bawah 0 dan batas atas 19 dengan jumlah partisi sebanyak 10 titik dan kita ingin mencoba untuk mengaproksimasi nilai di x=3.saat kita menjalankan programnya kita dapatkan polinomialnya seperti berikut :

```
           9              8              7              6              5
3.47e-22 x + 1.193e-18 x - 7.286e-17 x - 2.498e-16 x + 5.773e-15 x
             4             3     2
 + 1.243e-14 x + 2.86e-13 x + 1 x - 7.816e-14 x
```

Dengan hasil interpolasi dititik itu sebesar :

```
dengan hasilnya interpolasi di titik tersebut adalah 8.999999999999993
```

Kita dapatkan bahwa nilainya mendekati nilai sebenarnya yaitu 9.Hasil dari error yang kita dapatkan sebesar 7×10^{-13} merupakan hasil error yang bisa dibilang kecil.metode tersebut dapat dicari dengan menggunakan teknik divided difference juga.dengan menggunakan metode newton forward kita dapatkan bahwa hasil dari aproksimasi di titik 3 adalah sebesar :

```
8.999999999998584
```

Jika dengan menggunakan backward kita dapatkan aprksimasi akar ditiik tersebut adalah sebesar :

```
8.999999999998543
```

Dari kesimpulan bahwa kita dapatkan bahwa dengan mengugnakan metode aproksimasi lagrange kita dapatkan metode tersebut memiliki nilai absolute error yang kecil dibandingkan dengan dua metode pengaprkmasian fungsi dengan menggunakan metode forward dan backward.

4 .Penjelasan Mengenai Turunan Numerik

Turunan secara formal dituliskan dalam bentuk :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Dikatakan bahwa x terturunkan di x_0.dengan menggunakan polinomial lagrange kita dapat menggunakan fungsi aproksimasi tersebut untuk mendapatkan aproksimasi turunan.dibentuk dua titik yaitu katakanlah x_0 dan x_1.pada dua titik ini kita akan bentuk polinomial lagrange sehingga kita dapatkan :

$$f(x)=P_{0,1}(x)+f''(\varepsilon(x))\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}$$

Dengan $\varepsilon(x)$ berada diantara x_0 dan x_1.sehingga dengan perumusan turunan kita dapatkan :

$$f'(x)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+D_x[f''(\varepsilon(x))\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h}]$$

Dengan mensubtitusikan x dengan x_0 kita dapatkan aproksimasi turunan di x_0 adalah sebagai berikut :

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{h}{2}f''(\varepsilon)$$

Formula diatas merupakan formula yang dikenal dengan foward difference dan untuk backward difference untuk h<0.

Selain bentuk diatas dikenal beberapa bentuk seperti mengaproksimasi turunan dengan menggunakan tiga titik dan 5 titik.berikut formula dari aproksimasi turunan tersebut :

Three-Point Endpoint Formula

- $f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0),$

where ξ_0 lies between x_0 and x_0+2h.

Three-Point Midpoint Formula

- $f'(x_0)=\frac{1}{2h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$

Untuk 3 titik

Five-Point Midpoint Formula

- $$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi), \quad (4.6)$$

where ξ lies between x_0-2h and x_0+2h.

The derivation of this formula is considered in Section 4.2. The other five-point formula is used for approximations at the endpoints.

Five-Point Endpoint Formula

- $$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)$$ $$+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)]+\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi), \quad (4.7)$$

where ξ lies between x_0 and x_0+4h.

Untuk 5 titik

SOAL

Dari penjelasan mengenai aproksimasi turunan dengan beberapa metode,sekarang kita akan mencoba untuk menerapkan beberapa metode tersebut untuk mengaproksimasi sebuah turunan dari sebuah polinomial bererajat 5 dengan koefesien yang belum diketahui tergantung NPM. Sebuah fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai $x^5 + 9x^4 – ax^3 + bx^2 – cx + 5 = 0$ dimana 1, 2, dan 5 adalah tiga digit terakhir berturut-turut dari NPM kalian.

Pada soal tersebut diberikan polinomial berderajat 5 dengan menggunakan beberapa metode aproksimasi turunan :

a. TPEP :Three Point End Point
b. TPMP :Three Point Mid Point
c. FPEP : Five Point End Point
d. FPMP : Five Point Mid Point

Dari 4 metode itu kita akan mencoba untuk membuat sebuah table yang berisakan sebuah hasil aproksimasi turunan dengan step size sebesar : 0.05 dititik 2.sehingga kita dapatkan nilai aproksimasi sebagai berikut dengan beberapa metode:

	Aproksimasi	Metode
0	358.430662	TPEP
1	359.277506	TPMP
2	358.999850	FPEP
3	358.999975	FPMP
4	359.000000	Turunan

Dari gambar disamping kita dapatkan bahwa nilai aproksimasi dari turunan menggunakan beberapa metode dengan turunan aslinya.

Dari keempat metode kita dapatkan sangatlah bervariasi nilainya terhadap nilai turunan yang sebenarnya.

5 .Penjelasan Mengenai Aitken

Aitken merupakan sebuah metode pengakselerasi konvergen barisan menjadi lebih cepat.penggunaan Aitken ini didapatkan dari persamaan barisan-barisan yang diketahui berangkat dari persamaan :

$$\frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} \approx \frac{p_{n+2}-p}{p_{n+1}-p}$$

Sehingga kita dapatkan sebuah formula aitken yang mempercepat order konvergensinya seperti berikut :

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{\left(p_{n+1}-p_n\right)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$$

Dengan menerapkan aitken formula tersebut kita akan mendapatkan order konvergensi yang lebih cepat.

SOAL

5. Misalkan $g(x) = \ln(4 + x - x^2)$.

   a. Estimasi fixed point dari $g(x)$ dengan algoritma *Fixed Point* dengan nilai toleransi 10^{-10} dan nilai $p_0 = 2$.

   b. Percepat konvergensi dari barisan $\{p_n\}$ yang diperoleh pada (a) dengan metode Aitken dan gambarkan $\frac{|p_{n+1}-p|}{|\hat{p}_n - p|}$

a. Dengan menggunakan fixed point kita dapatkan akarnya dengan menggunakan toleransi 10^{-10} dan nilai p_0=2.
   Didapatkan barisan lima terakhir sebagai berikut :

	akar
0	0.693147
1	1.438102
2	1.214902
3	1.318795
4	1.275244
...	...
96	1.288678
97	1.288678
98	1.288678
99	1.288678
100	1.288678

   Dengan nilai aproksimasi terakhir sebesar 1.288578 belum mencapai nilai toleransinya.

b. Dengan menggunakan metode aitken kita dapatkan akarnya dengan menggunakan toleransi 10^{-4} dan nilai p_0=2. Didapatkan barisan lima terakhir sebagai berikut :

	barisan awal
0	2.000000
1	1.438102
2	1.214902
3	1.318795
4	1.275244
5	1.294452
6	1.286155

	barisan aiken
0	1.067814
1	1.285796
2	1.288108
3	1.288573

Dengan Menggunakan Barisan Biasa :

```
[2,
 1.4381023875875656,
 1.2149020352275535,
 1.3187954837893439,
 1.275243786550342,
 1.294452354882075,
 1.286155040111431]
```

Dengan Menggunakan aitken :

```
[1.067813755606033, 1.285796238240689, 1.288107894908038, 1.2885733310443093]
```

BONUS

Pada kali ini saya akan mencoba untuk menggunakan metode Stefensen untuk mengakselerasi akar yang ada.dengan menggunakan algoritma sebagai berikut :

Steffensen's

To find a solution to $p = g(p)$ given an initial approximation p_0:

INPUT initial approximation p_0; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$.

Step 2 While $i \le N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p_1 = g(p_0)$; (*Compute* $p_1^{(i-1)}$.)
$p_2 = g(p_1)$; (*Compute* $p_2^{(i-1)}$.)
$p = p_0 - (p_1 - p_0)^2/(p_2 - 2p_1 + p_0)$. (*Compute* $p_0^{(i)}$.)

Step 4 If $|p - p_0| < TOL$ then
OUTPUT (p); (*Procedure completed successfully.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 Set $p_0 = p$. (*Update* p_0.)

Step 7 OUTPUT ('Method failed after N_0 iterations, N_0 =', N_0);
(*Procedure completed unsuccessfully.*)
STOP.

Dari algoritma tersebut kita akan mencoba menjalankannya dan kita dapatkan hasilnya sebagai berikut :

	akar stefensen
0	2.000000
1	1.438102
2	1.214902
3	1.318795
4	1.067814
5	1.275244
6	1.294452
7	1.286155
8	1.181382

SOAL B

1.dari beberapa metode pencarian akar untuk mendapatkan solusi dari fungsi di nomor satu yang terbaik adalah metode newton dan secant dikarenakan jumlah iterasi yang dibutuhkan untuk mendekati akar sangatlah sedikit dan tingkat konvergensinya yang lebih dari linear atau dengan konvergensi kuadratik.

a. bisection method :
untuk bisection kita tahu bahwa order konvergensinya linear dan barisan tersebut akan konvergen ke suatu nilai akar pada kasus ini 0 namun tidak pernah menjadi 0.

b .fixed point :
untuk fixed point begitu juga karena order konvergensinya lineaer,sehingga kalah cepat dalam kekonvergensian namun nilai aproksimasinya tidak akan pernah menjadi 0.

C .newton method :
Untuk newton method begitu juga walaupun order konvergensinya kuadratik namun karena newton method diadaptasi dari deret taylor yang mempunyai error sehingga kita dapat simpulkan nilai aproksimasi tidak akan pernah menjadi nilai 0.

D .secant method:
Untuk secant method berlaku sama seperti metode sebelumnya

E.Regulafasi method :
Untuk Metode Regulafasi berlaku juga sama seperti metode-metode yang lain namun karena regulafasi merupakan perpaduan antara metode newton dengan bisection sehingga order konvergensinya lebih bagus dari linear.

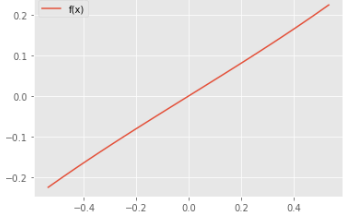
Apakah pada iterval [-z,z] dimana z $\leq \frac{\ln(5)}{3}$ akan berlaku metode fixed point disana ?

Ya karena turunan dari f adalah :

$$f'(x)=\frac{1}{5}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$

Jika disubtitusikan dengan x=-10 kita dapatkan nilai sebesar 0.4=f'(0)<1 sehingga ini tidak menyalahi teorema fixed point yang sudah di jelaskan sebelumnya,atau kita juga dapat mengambil kesimpulannya dengan menggunakan gambar dibawah(fungsi increasing).

Untuk metode newton karena fungsinya kontinyu dan tidak memiliki akar kembar dilhat dari gambar :



Sehingga kita dapat menggunakan metode newton untuk mencari solusi dari fungsi diatas.

2. -
3. Diberikan sebuah data dari sebuah perjalanan yang direpresentasikan dengan menggunakan sebah tabel :

Waktu (jam)	2	2.1	2.15	2.25	2.34	2.39	2.43	2.5
Kecepatan (km/jam)	27.0	37.5	40.6	43.7	46.5	48.4	47.0	43.0

Kita akan menggunakan teknik interpolasi dengan memanfaatkan titik yang direpresentasikan dengan waktu dan kecepatan.karena data yang diberikan titik kita akan mencoba menginterpolasi dengan menggunakan teknik lagrange.pertama-tama kita subtitusikan informasi diatas ke dalam polinomial lagrange yang kita punya sehingga kita dapatkan sebuah persamaan polinomial :

```
           7             6             5             4             3
1.153e+06 x - 1.814e+07 x + 1.222e+08 x - 4.568e+08 x + 1.024e+09 x
              2
 - 1.376e+09 x + 1.026e+09 x - 3.275e+08
```

Setelah kita dapatkan polinomialnya selanjutnya adalah menggunakan teknik integrasi untuk menghitung luas permukaan dibawah kurva dengan batas yang sudah tertera dalam data tersebut.

```
Apakah jenis yang ingin dimaskan titik atau fungsi ? :titik
Metode apakah yang  ingin dignakan lagrange atau newtonlagrange
Masukkan list titik-titik berurutan : [2,2.1,2.15,2.25,2.34,2.39,2.43,2.5]
Masukkan list nilai fungsi di titik-titik tsb : [27,37.5,40.6,43.7,46.5,48.4,47.0,43.0]
Masukkan nilai x yang akan diaproksimasi nilai fungsinya : 3
Hasil integrasinya menggunakan integrasi numerik kita dapatkan sebagai berikut 21.067161671767593
```

Sehingga dengan menggnakan polinomial yang sudah kita gunakan sebagai aproksimasi dari data tersebut kita mendapatkan bahwa estimasi jarak tersebut adalah 21.06 km.

4. Dari nomor 4 kita diminta untuk melakukan teknik turunan numerik.dari beberapa metode numerik yang digunakan terdapat 4 metode numerik numerik yang digunakan dalam mengaproksimasi nilai turunan pada interval yang sudah ditentukan.4 metode diantaranya tersebut adalah metode forward difference,three point mid point,three point end point,five point mid point dan five point end point.dari nomor tersebut kita mendapatkan nilai aproksimasi seperti berikut:

	Aproksimasi	Metode
0	358.430662	TPEP
1	359.277506	TPMP
2	358.999850	FPEP
3	358.999975	FPMP
4	359.000000	Turunan

Dapat dilihat dari gambar diatas kita dapat mengambil keputusan bahwa metode aproksimasi dengan menggunakan five point mid point memiliki nilai aproksimasi turunan yang sebenarnya,karena dari informasi yang ingin dicari turunannya diapit oleh titik-titik tersebut.

5. Metode Stefensen merupakan modifikasi dari aitken sendiri.Metode stefensen digunakan untuk mengakseleras kekonvergenan suatu berisan yang tadinya berorder linear menjadi kuadratik.yang lebih bagus dari tiga metode diatas adalah stefensen dikarenakan stefensen merupakan suatu algoritma yang bertujuan untuk mempercepat kekonvergensian suatu barisan untuk mendapatkan aproksimasi nilai akarnya(dengan order konvergensi kuadratik).dari hasil yang didapat dari beberapa metode :

Fixed Point :

	akar
0	0.693147
1	1.438102
2	1.214902
3	1.318795
4	1.275244
...	...
96	1.288678
97	1.288678
98	1.288678
99	1.288678
100	1.288678

Aitken :

	barisan aiken
0	1.067814
1	1.285796
2	1.288108
3	1.288573

Stefensen :

	akar stefensen
0	2.000000
1	1.438102
2	1.214902
3	1.318795
4	1.067814
5	1.275244
6	1.294452
7	1.286155
8	1.181382

Dari ketiga metode tersebut kita bisa lihat dari metode fixed point dipercepat kekonvergensiannya denga menggunakan Aitken namun dengan menggunakan stefensen hasilnya tidak begitu bagus.