Discrete Mathematics (Ayrık Matematik)

Doç.Dr.Banu DİRİ
e-mail: banu@ce.yildiz.edu.tr
http://www.ce.yildiz.edu.tr/myindex.php?id=9

Kaynaklar

•Discrete Mathematics and Its Applications
Kenneth H.Rosen, McGraw Hill

Konular

1. Logic and Proof
* propositions (önermeler)
* conditional propositions (şartlı önermeler)
* logical equivalence (mantıksal denklik)
* quantifiers (nicelikler)
* proof

2. The Language of Mathematics
* sets (kümeler)
* sequences and strings (diziler)
* number systems
* relations (ilişkiler)
* equivalence relations (eşitlik bağıntıları)
* matrices of relations
* functions

3. Algorithms

* different algorithms

4. Graph Theory

* path and cycles
* hamiltonian cycles
* a shortest-path algorithm
* isomorphisms of graph

5. Trees

* terminology and characterizations of tree
* spanning tree
* binary tree
* tree traversals
* isomorphisms tree

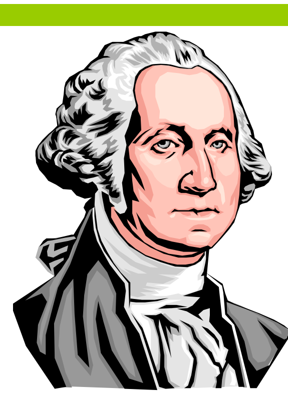
6. Choromatic polinomial

7. Boolean Algebras and Combinatorial Circuit

8. Automata, Grammars and Language

* finite-state automata (sonlu durum makineleri)
* language and grammars
* nondeterministic finite-state automata

Bölüm 1
Mantık ve İspatlar
(Logic and Proofs)



Mantık (Logic)

- Mantık (Logic) = doğru çıkarımı elde etme çalışmasıdır

- Mantığın kullanımı
  - Matematikte kullanımı:
    - Teoremleri ispatlamak
  - Bilgisayar Bilimlerinde kullanımı:
    - Programların kendilerinden beklenen sonucu üretip üretmediğinin kontrolüdür

Önermeler (Propositions)

- Sonucu doğru (true) veya yanlış (false) olan ifadelere proposition (önerme) denir.

- Örnekler:
  - “Cüneyt programcıdır" bu bir önermedir
  - “Keşke bilge kişi olsaydım” bu bir önerme değildir

Birleştiriciler (Connectives)

Önermeleri (propositions) göstermek için p,q,r,s,t,... gibi değişkenler kullanılır.

En çok kullanılan birleştiriciler:

- Conjunction AND — Sembol ^
- Inclusive disjunction OR — Sembol v
- Exclusive disjunction OR — Sembol $\underline{v}$
- Negation — Sembol ~
- Implication — Sembol →
- Double implication — Sembol ↔

AND (conjunction) doğruluk tablosu

- p ve q bir önerme ise, conjunction (p ^ q) veya (p and q) olarak gösterilir
- *Conjunction* doğruluk tablosu

p	**q**	**p ^ q**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- Sadece p ve q nun her ikisinin de doğru olduğu durumda p ^ q doğrudur

Örnek

- p = “kaplan vahşi bir hayvandır”
- q = “balina bir sürüngendir”
- p ^ q = " kaplan vahşi bir hayvandır **and** balina bir sürüngendir "
- p ^ q yanlıştır. Neden?

OR (disjunction) doğruluk tablosu

- p ve q bir önerme ise, *disjunction* (p v q) veya (p or q) olarak gösterilir
  - *Disjunction* doğruluk tablosu

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Sadece p ve q nun her ikisinin de yanlış olduğu durumda $p \vee q$ yanlıştır
  - Örnek: p = “Cüneyt programcıdır", q = “Zeynep avukattır"
  - p v q = " Cüneyt programcıdır or Zeynep avukattır "

Exclusive disjunction OR(XOR)

- p ve q bir önerme ise, *exclusive disjunction OR* (xor) $p \veebar q$ olarak gösterilir
- *Exclusive disjunction* doğruluk tablosu

p	q	$p \veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Sadece p doğru ve q yanlış ise, veya p yanlış ve q doğru ise $p \veebar q$ doğrudur
- Örnek: p = “Cüneyt programcıdır”, q = “Zeynep avukattır“
  $p \veebar q$ = “Ne Cüneyt programcıdır ne de Zeynep avukattır"

Tersi (Negation)

- p' nin tersi: ~p veya p' ile gösterilir

p	**~p**
T	F
F	T

p doğru iken ~p yanlıştır

p yanlış iken ~p doğrudur

- Örnek: p = “Cüneyt programcıdır"
  ~p = “Cüneyt programcı değildir"

Birden Fazla Önermenin Birleştirilmesi

- p, q, r basit önermeler olsun
- Birleştirilmiş ifadeleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz
  - $(p \vee q) \wedge r$
  - $p \vee (q \wedge r)$
  - $(\sim p) \vee (\sim q)$
  - $(p \vee q) \wedge (\sim r)$
  - ve diğer durumlar…

Örnek: $(p \vee q) \wedge r$ nin doğruluk tablosu

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Şartlı Önermeler ve Mantıksal Denklik (Conditional Propositions and Logical Equivalence)

- Şartlı önerme (*conditional* proposition)

"If p then q"

şeklinde gösterilir

- Sembolü: $p \rightarrow q$
- Örnek:
  - p = " Cüneyt programcıdır"
  - q = " Zeynep avukattır "
  - $p \rightarrow q$ = "If Cüneyt programcıdır then Zeynep avukattır"

$p \rightarrow q$ ‘nun Doğruluk Tablosu

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Sadece p ve q ‘nun her ikiside doğru veya p’nin yanlış olduğu durumlarda $p \rightarrow q$ önermesi doğrudur

Hipotez ve Sonuç (Hypothesis and conclusion)

- $p \rightarrow q$ şartlı önermesinde
  p *antecedent* veya *hypothesis*
  q *consequent* or *conclusion*

olarak adlandırılır.

- “if p then q" mantıksal olarak "p only if q“ ile aynıdır

Gereklilik ve Yeterlilik (Necessary and Sufficient)

- Gerekli şart (*necessary condition*) sonuç (*conclusion*) tarafından ifade edilir
- Yeterli şart (*sufficient condition*) hipotez (*hypothesis*) tarafından ifade edilir

  - Örnek:

    If Cüneyt programcıdır *then* Zeynep avukattır"
  - Necessary condition: “Zeynep avukattır”
  - Sufficient condition: “Cüneyt programcıdır”

Mantıksal Denklik (Logical Equivalence)

- Doğruluk tablosundaki değerleri aynı olan iki önerme için aralarında mantıksal denklik vardır denir

p	**q**	**$\sim p \vee q$**	**$p \rightarrow q$**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- Örnek: $\sim p \vee q$ önermesi $p \rightarrow q$ ile *logically equivalent* ‘dır. Yani aralarında mantıksal denklik vardır

Yer değiştirme (Converse)

- $p \rightarrow q$'nun *converse* $q \rightarrow p$ dir

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow p$**
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

- Bu iki önerme arasında mantıksal denklik mevcut değildir (<u>not</u> logically equivalent)

Contrapositive (Devrik)

- $p \rightarrow q$ önermesinin *contrapositive* $\sim q \rightarrow \sim p$ şeklinde gösterilir

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\sim q \rightarrow \sim p$**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- Bu önermeler logically equivalent'dır

Çift Yönlü Önerme (Biconditional Proposition)

- Çift Yönlü önerme (*biconditional proposition)* "p if and only if q" olarak tanımlanır

  $p \leftrightarrow q$ sembolü ile gösterilir

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**	**$(p \to q) \wedge (q \to p)$**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

- $p \leftrightarrow q$, $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 'nun logically equivalent'dır

Totoloji-Tutarlılık (Tautology)

- Eğer doğruluk tablosunda önermelerin her bir durumu için doğru sonuç (true) elde edilmiş ise, birleştirilmiş önerme (*compound proposition*) bir *tautology* 'dir
  - Örnek: $p \to p \vee q$

p	**q**	**$p \to p \vee q$**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Çelişki (Contradiction)

- Eğer doğruluk tablosunda önermelerin her bir durumu için yanlış sonuç (false) elde edilmiş ise, birleştirilmiş önerme (*compound proposition*) bir *contradiction* ‘dır

- Örnek: p ^ ~p

p	p ^ (~p)
T	F
F	F

De Morgan Kanunu

- Aşağıdaki önerme çiftleri birbirleri ile mantıksal olarak denktir
  - $\sim (p \vee q) \rightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
  - $\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

Nicelikler (Quantifiers)

- **P(x)**, *x* değişkeni ile ilişkili bir propositional fonksiyon olsun

  Örneğin, P(x): 2x çift tamsayı

- *D*'de içerisindeki her *x* değeri için, P(x)'i proposition yapan bir küme olsun

  Örneğin: *x,* tamsayılar kümesinin bir elemanıdır

- *D*, P(x)'nin domain of discourse'u olarak adlandırılır (ayrıntılı bilgi alanı)

- *D'*deki her *x* değeri*, P(x)'i* sonucu doğru veya yanlış olan bir proposition yapar

  Örneğin: P(n): n^2+2n tek sayıdır

  D kümesinin pozitif integer sayılardan oluşsun

  if *n* tek sayı then n^2+2n tek sayıdır

  if *n* çift sayı then n^2+2n tek sayı değildir

- Bu sınıftakiler 18 yaşından büyüktür

  D kümesi, sınıftaki öğrenciler olsun

  Öğrencilerin bazıları proposition'ı doğru, bazıları da yanlış yapar

Her ve Bazı (For every and for some)

- Matematik ve Bilgisayar Bilimlerindeki çoğu ifadede *for every* ve *for some* kullanılır

- Örneğin:
  - *For every* triangle T, the sum of the angles of T is 180 degrees.

Evrensel/Genel Niteliyiciler (Universal Quantifier)

- The *universal quantification* of P(x) is the proposition "P(x) is true for all values of x in the universe of discourse."

  P(x) önermesi, *D* kümesi içerisindeki her x değeri için doğru olmalıdır.
  ∀x *P(x)* veya
  for all x *P(x)* veya
  for every x *P(x)* şeklinde yazılır

- En az bir *x* değeri için doğru değilse, P(x) yanlış olur

"Every student in this class has studied calculus"

P(x)→ "x has studied calculus"

∀x *P(x)*

When all of the elements in the universe of discourse can be listed – $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – it follows that the universal quantification $\forall x\ P(x)$ is the same as the conjunction

$P(x_1) \Lambda P(x_2) \Lambda \ldots \Lambda P(x_n)$,

since the conjunction is true if and only if $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ are all true.

Propositional fonksiyonun doğruluğu

- $\forall x\ P(x)$ ifadesi
  - Doğrudur. Eğer P(x) doğruysa for every $x \in D$
  - Yanlıştır. Eğer P(x) doğru değilse for some $x \in D$

- Örneğin: P(n) propositional bir fonksiyon

  ve $P(n)$: $n^2 + 2n$ tek bir sayıdır.

  $\forall n \in D$ = {bütün tam sayılar}

- P(n) sadece *n* tek sayı olduğunda doğrudur.

  P(n) *n* çift sayı ise yanlıştır

- For every real number *x*, $x^2 \geq 0$ TRUE
- For every real number *x*, if $x > 1$ then $x+1>1$ TRUE
- For every real number *x*, if $x \geq 0$ then $x+1>1$ FALSE
- For every positive integer *n*, if n is even then

  n^2+n+19 prime FALSE

Varoluşsal Niteleyiciler (Existential Quantifier)

- The *existential quantification* of P(x) is the proposition "There exists an element x in the universe of discourse such that P(x) is true"

  P(x) önermesi, *D* kümesi içerisindeki en az bir x değeri için doğru olmalıdır.

$\exists x$ P(x) veya
"There is an x such that P(x)" veya
"There is at least one x such that P(x)"
şeklinde yazılır.

When all of the elements in the universe of discourse can be listed – $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – the existential quantification $\exists x$ $P(x)$ is the same as the disjunction

$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$,

since this disjunction is true if and only if at least one of $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ is true.

- For some real number x, $x/(x^2+1) = 2/5$ TRUE
- For some positive integer n, if n is prime then $n+1$, $n+2$, $n+3$ and $n+4$ are not prime TRUE n=23

Translating Sentences into Logical Expressions

Express the statement "**Everyone has exactly one best friend**" as logical expression.

Let B(x,y) be the statement "*y* is the best friend of *x*".

To translate the sentence in the example, note that it says that for every person *x* there is another person *y* such that *y* is the best friend of *x* and that if *z* is a person other than *y*, then *z* is not the best friend of *x*. We can translate the sentence into

$$\forall x \exists y \forall z \left(B(x,y) \wedge \left((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z)\right)\right)$$

Express the statement "**If somebody is female and is a parent, then this person is someone's mother**" as logical expression.

Let F(x) be the statement "*x* is female", let P(x) be the statement "x is a parent", and let M(x,y) be the statement "*x* is the mother of *y*". Since the statement in the example pertains to all people, we can write it symbolically as

$$\forall x\left(\left(F(x) \wedge P(x)\right) \rightarrow \exists y M(x,y)\right)$$

Counterexample

- Eğer $\exists x \in D$, P(x)'i yanlış yaparsa universal statement $\forall x\ P(x)$'de yanlış olur

- $\forall x\ P(x)$ ifadesindeki, P(x) yanlış yapan *x* değeri *counterexample* olarak adlandırılır
  - Örnek: P(x) = "her x değeri bir asal sayıdır", for every tamsayı x.
  - Fakat eğer x = 4 (bir tamsayı) bu *x* sayısı asal sayı değildir. Öyleyse 4 değeri bir counterexample olup P(x)'i yanlış yapar

Lojik için Genelleştirilmiş De Morgan Kanunu

$\sim(\forall x\ \ P(x)) \rightarrow \exists x\ \sim P(x)$

$\sim(\exists x\ \ P(x)) \rightarrow \forall x\ \sim P(x)$

"**Every student in the class has taken a course in calculus**"

This statement is a *universal quantification*, namely, $\forall x$ **P(x),**

Where P(x) is the statement "*x* has taken a course in calculus".

The negation of this statement is, **"It is not the case that every student in the class has taken a course in calculus".**

This is equivalent to, "**There is a student in the class who has not taken a course in calculus**".

And this is simply the *existential quantification* of the nagation of the original propositional function, namely

$\exists x \sim P(x)$

This example illustrates the following equivalence:

$\sim\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$

Suppose we wish to negate an *existential quantification*.

For instance, consider the proposition **"There is a student in this class who has taken a course in calculus".**

This is the existential quantification

$\exists x\ Q(x)$,

Where Q(x) is the statement "***x* has taken a course in calculus**". The nagation of this statement is the proposition **"It is not the case that there is a student in this class who has taken a course in calculus**". This is equivalent to, "**Every student in this class has not taken calculus**", which is just the universal quantification of the nagation of the original propositional function,

$\forall x \sim Q(x)$

Negating Quantifiers			
Negation	***Equivalent Statement***	***When is negation true?***	***When false?***
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	P(x) is false for every *x*	There is an x for which P(x) true
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which P(x) is false	P(x) is true for every *x*

Çıkarsama Kuralları (Rules of Inference)

Doğruluğu varsayılan ya da kanıtlanmış önermeleri içeren bir kümeden yola çıkarak bu küme dışındaki bir önermenin doğruluğuna varma.

Çıkarsama kurallarının gösterilimi

$$\begin{array}{l} p1 \\ p2 \\ \cdots \\ pn \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$p1 \wedge p2 \wedge \cdots \wedge pn \Rightarrow q$

ekleme

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

Basitleştirme

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore\ q}$$

Örnek

Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
Ali piyangoyu kazandı.
O halde, Ali araba alacak.

modus tollens

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\therefore\ \neg p}$$

Örnek

Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
Ali araba almadı.
O halde, Ali piyangoyu kazanmadı.

Sonucu Onaylama Yanılgısı

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \end{array}}{\therefore\ p}$$

$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$ bir totoloji değil:

$p = Y$, $q = D$ ise: $(Y \rightarrow D) \wedge D \rightarrow Y$

Örnek

Madonna A.B.D. başkanıysa 35 yaşının üstündedir.
Madonna 35 yaşının üstündedir.
O halde, Madonna A.B.D.

Öncülü Yadsıma Yanılgısı

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg p \end{array}}{\therefore\ \neg q}$$

$p \rightarrow q \wedge \neg p \rightarrow \neg q$ bir totoloji değil:

$p = Y$, $q = D$ ise: $(Y \rightarrow D) \wedge D \rightarrow Y$

Örnek

$2 + 3 = 8$ ise $2 + 4 = 6$
$2 + 3 \neq 8$
O halde, $2 + 4 \neq 6$

ayırıcı kıyas

p v q
¬p
∴ q

Örnek

Ali'nin cüzdanı cebinde veya masasında.
Ali'nin cüzdanı cebinde değil.
O halde, Ali'nin cüzdanı

varsayımlı kıyas

p → q
q → r
∴ p → r

Örnek

396|35244 → 66|35244
66|35244 → 3|35244
O halde, 396|35244 → 3|35244

yapıcı ikilem

p → q
r → s
p v r
∴ q v s

yıkıcı ikilem

p → q
r → s
¬q v ¬s
∴ ¬p v ¬r

Akıl Yürütme Örneği

Örnek

p → r
r → s
t v ¬s
¬t v u
¬u

¬p

p → r (1)
r → s (2)
p → s (1, 2, VK) (3)
t v ¬s (4)
¬s v t (4, degisme) (5)
s → t (5, ise) (6)
p → t (3, 6, VK) (7)
¬t v u (8)
t → u (8, ise) (9)
p → u (7, 9, VK)

Akıl Yürütme Örneği

Örnek

(¬p v ¬q) → (r ^ s)
r → t
¬t

p

r → t (1)
¬t (2)
¬r (1, 2, MT) (3)
¬r v ¬s (3, ekleme) (4)
¬(r ^ s) (4, DM) (5)
(¬p v ¬q) → (r ^ s) (6)
¬(¬p v ¬q) (6, 5, MT) (7)
p ^ q (7, DM) (8)
p (8,

İspatlar (Proofs)

- Bir matematik sistemi
  - Tanımlanmamış terimler (Undefined terms)
  - Tanımlar (Definitions)
  - Aksiyomlar (Axioms)

Tanımlanmamış Terimler (Undefined Terms)

- *Tanımlanmamış terimler* bir matematik sisteminin temel taşını oluşturur. Bu terimler bir matematiksel sistemin başlangıç kavramları olarak da kabul edilebilir.
  - Örnek: Euclidean geometride tanımlanmamış terimler
    - Nokta (Point)
    - Doğru (Line)

Tanımlar (Definitions)

- *Tanım* (*definition),* yeni bir kavram yaratmak amacıyla önceden kabul edilmiş kavramlar ve tanımlanmamış terimlerden bir proposition oluşturmaktır

Örnek: Euclidean geometrideki tanımlar:

- Eğer iki üçgenin karşılıklı kenarları ve açıları birbirinin aynı ise bu iki üçgen eş üçgendir
- İki açının toplamı 180 derece ise bu açılara birbirini tamamlayan açılar denir

Aksiyomlar (Axioms)

- Aksiyom (*axiom),* matematiksel bir sistem içerisinde ispat yapmaksızın doğru kabul edilen proposition'dır
- Matematikteki aksiyomlara örnek:
  - Örnek: Euclidean geometrideki aksiyomlar
    - İki nokta verilmiş olsun. Bu noktalardan geçen bir doğru her zaman mevcuttur.
    - Bir doğru ve doğru üzerinde yer almayan bir nokta mevcut olsun. Bu noktadan geçen doğruların bir tanesi verilen doğruya mutlaka paraleldir.

Teoremler (Theorems)

- *Teorem*, Önceden ispatlanmış teoremleri, aksiyomları, tanımlamaları kullanarak ve *p* nin doğru olduğunu farzederek doğruluğu önerilebilen p $\rightarrow$ q formundaki proposition'a denir

Lemma(yardımcı teorem/ön sav) ve **Corollary** (bir önermenin doğru sonucu)

- *Lemma,* büyük bir teoremi ispatlamak için kullanılan küçük bir teoremdir

- *Corollary*, bir başka teoremin mantıksal sonucu ile diğer bir teoremin ispatlamasıdır
  - Euclidean geometriden örnek : "Eğer bir üçgenin, üç kenarı eşit ise açılarıda eşittir."

İspat Çeşitleri

- *İspat (proof),* Teoremin doğruluğunu belirlemek için proposition'ları kullanan bir seri işlemden oluşan mantıksal çıkarımdır
- *Doğrudan ispat (Direct* proof): $p \rightarrow q$
  - *q* önermesinin doğruluğunu elde etmek amacıyla ispatlanmış teoremleri, aksiyomları ve *p* önermesinin doğruluğunu kabul ederek çözüme ulaşmadır
- *Dolaylı ispat (Indirect* proof): $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
  - $p \rightarrow q$ önermesinin çelişkisinden çözüme ulaşmaktır

Matemaiksel sonuç çıkarma (Mathematical induction)

- $\forall\ n \in A \quad S(n)$ formundaki ifadenin ispatına bakalım

  * N, pozitif tamsayılar veya doğal sayılardan oluşan bir küme

  * A, N'nin bir alt kümesi

  * S(n) propositional bir fonksiyon

- Her pozitif tamsayının, S(n) önermesini doğru veya yanlış yaptığını farzedelim
  - 1. S(1) doğru olduğunu teyit et
  - 2. *n* keyfi seçilmiş pozitif bir tamsayı olsun

    i pozitif bir tamsayı olup, $i < n$ olarak belirle
  - 3. S(i) ‘nin doğruluğundan yola çıkarak S(i+1)’in doğru olduğunu göster

    $$S(i) \rightarrow S(i+1)$$
  - 4. Sonuç olarak, tüm pozitif tamsayılar için S(n) doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarım: terminoloji

- *Temel adım (basis step):*

  S(1) ‘in doğruluğunun gösterilmesi
- *Tümevarımsal adım (Inductive step):*

  S(i)’nin doğru farzedilmesi

  İspat $S(i) \rightarrow S(i+1)$

  if S(i) *is true*, *for all* i<n+1, *then* S(n+1) *is true*
- *Sonuç (Conclusion):*

  Bütün pozitif tamsayılar için S(n)’nin doğruluğu