

Introducción a la Lógica Difusa para la representación de información imprecisa



Maria-Amparo Vila
vila@decsai.ugr.es

Grupo de Investigación en Bases de
Datos y Sistemas de Información
Inteligentes <https://idbis.ugr.es/>
Departamento de Ciencias de la
Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Granada

Descripción

- a) El concepto de conjunto difuso
 - 1. Definición y propiedades más simples
 - 2. Conectivos y operaciones con conjuntos difusos.
 - 3. Relaciones difusas. Propiedades
- b) El concepto de número difuso.
 - 1. Definición. Números difusos L-R.
 - 2. Operaciones con números difusos
 - 3. Ordenación de números difusos
- c) El concepto de etiqueta lingüística.
 - 1. Definición general
 - 2. Ejemplos y casos particulares



El concepto de conjunto difuso

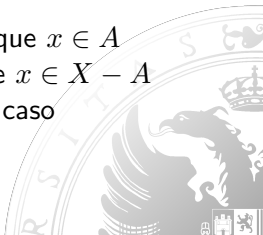
★Definición

- X un conjunto cualquiera, (referencial o universo de discurso)
- A conjunto difuso sobre $X \equiv \mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$
- μ_A se denomina función de pertenencia.

Intuitivamente:

A es un conjunto con los bordes no definidos. μ_A generaliza a la función indicador:

$$\forall x \in X \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si está claro que } x \in A \\ 0 & \text{si está claro que } x \in X - A \\ \alpha \in (0, 1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$



El concepto de conjunto difuso

★ **α -corte:** $\forall \alpha \in [0, 1] A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$; $A = \bigcup_{\alpha \geq 0}^1 A_\alpha$

★ **Moda:** α -corte de nivel 1.

★ **Soporte:** $\{x \in X | \mu_A(x) \geq 0\}$

★ **Semántica de los conjuntos difusos: ideas básicas**

- Toda propiedad imprecisa definida sobre un conjunto genera un conjunto difuso.

- Sea P una propiedad imprecisa sobre X, $\mu_p(x)$ = grado de cumplimiento de x de la propiedad P.

- En algunos casos la propiedad P se describe a su vez como un subconjunto difuso sobre otro referencial y el grado de cumplimiento puede calcularse:

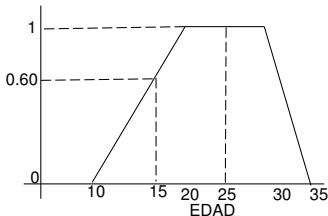


El concepto de conjunto difuso

★ Semántica de los conjuntos difusos: ideas básicas

Ejemplo:

"Ser joven" se puede representar como un subconjunto difuso de edad:



Si Juan tiene 15 años, $\mu_{\text{joven}}(\text{Juan}) = 0.60$

- "Joven" se denomina también **etiqueta lingüística** y su representación como conjunto difuso de edades "**Representación semántica**"

El concepto de conjunto difuso

★ **Inclusión** $\forall A, B$ difusos sobre X ,

$$A \subseteq B \iff \forall x \in X \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

★ **Unión** $\forall A, B$ difusos sobre X , $A \cup B = C$ tal que:

$$\forall x \in X ; \mu_C(x) = \mu_A(x) \bigoplus \mu_B(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Inicialmente, $u(x, y) = \max(x, y) = x \vee y$

★ **Intersección** $\forall A, B$ difusos sobre X , $A \cap B = C$ tal que

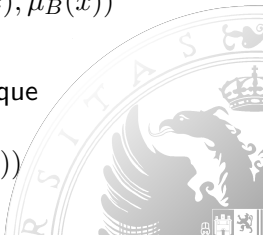
$$\forall x \in X ; \mu_C(x) = \mu_A(x) \bigodot \mu_B(x) = i(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Inicialmente, $u(x, y) = \min(x, y) = x \wedge y$

★ **Complementación** $\forall A$ difuso sobre X , $\bar{A} = C$ tal que

$$\forall x \in X ; \mu_C(x) = \neg \mu_A(x) = n(\mu_A(x))$$

Inicialmente, $n(x) = 1 - x$



El concepto de relación difusa

Dados dos referenciales X , e Y se define **Relación Difusa** sobre $X \times Y$, R como un subconjunto difuso tal que:

$$\mu_R : X \times Y \longrightarrow [0, 1]$$

- **Semánticamente** una relación difusa refleja conexiones imprecisas (graduales) entre elementos de dos conjuntos.
- Si $X \equiv Y$ una relación difusa R puede cumplir las propiedades:

1. *Reflexiva*: $\forall x \in X, \mu_R(x, x) = 1$
2. *Simétrica*: $\forall x, y \in X, \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$
3. *Antismétrica*: $\forall x, y \in X \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, x) = 0$
4. *Max-min transitiva*
 $\forall x, y \in X, \mu_R(x, y) \geq \max_{z \in X} (\mu_R(x, z) \wedge \mu_R(z, y))$



El concepto de relación difusa

- Una relación difusa puede ser:

De similitud si es:

- . Reflexiva
- . Simétrica
- . Max-min transitiva

De orden Difuso si es:

- . Reflexiva
- . Antisimétrica
- . Max-min transitiva



El concepto de relación difusa

- Una relación difusa puede ser:

De semejanza si es:

- . Reflexiva
- . Simétrica

De preorden si es:

- . Reflexiva
- . Antisimétrica



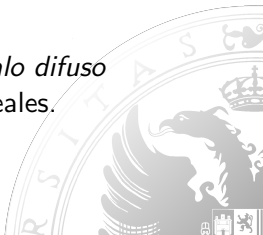
Números difusos

* Definición

Sea \mathcal{R} el conjunto de números reales. A , subconjunto difuso de \mathcal{R} es un número difuso sii:

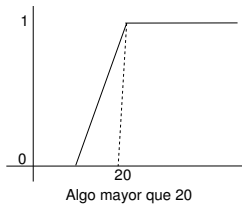
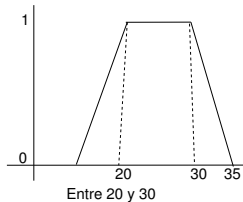
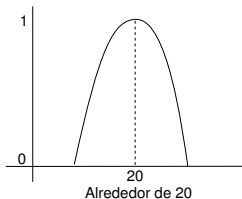
$$\forall \alpha \in [0, 1] ; A_\alpha = [a, b]$$

- Sea $\text{mod}(A) = \{x \in \mathcal{R} / \mu_A(x) > 0\}$:
 - .Si $\text{mod}(A) = \{x\} \implies A$ es *unimodal*
 - .Si $\text{mod}(A) = [a, b] \implies A$ es *un intervalo difuso*
- Notaremos por \mathcal{D} el conjunto de números difusos reales.



Números difusos

Ejemplos y significado intuitivo



Números difusos

*Representación L-R de números difusos

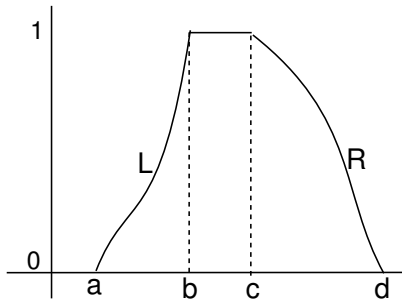
Todo numero difuso A se puede representar por $(d1, m, n, d2)_{LR}$, donde:

- Los cuatro valores reales $(d1, m, n, d2)$ verifican:
 $m \leq n, d1 \geq 0, d2 \geq 0, m \neq \infty ; n \neq \infty$
- Las dos funciones, verifican:
 - $L(.)$ monotona creciente, continua a la derecha, con $L(a) = 0$
 - $R(.)$ monotona decreciente, continua a la izquierda co $R(d) = 0$
- de forma que:

$$\forall x \in \mathcal{R} ; \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq m - d1 \text{ o } x \geq n + d2 \\ 1 & \text{si } x \in [m, n] \\ L(x) & \text{si } x \in [m - d1, m] \\ R(x) & \text{si } x \in [n, n + d2] \end{cases}$$

Números difusos

Graficamente:



Números difusos

* Aritmética con números difusos

- Forma general: sean $A, B \in \mathcal{D}$ y $*$ una operación aritmética $(+, -, \times, \div)$, definimos $C = A * B$ como el conjunto difuso cuya función de pertenencia es:

$$\forall z \in \mathcal{R}; \mu_C(z) = \sup \min_{z=x*y} (A(x), b(y))$$

Puede probarse que C es un número difuso.

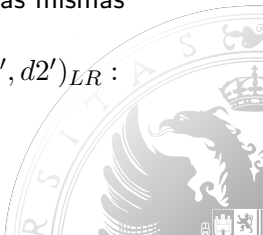
- Para el caso de números difusos en forma L-R con las mismas funciones asociadas se tiene que:

$$\forall A, B \in \mathcal{D} ; A = (d1, m, n, d2)_{LR} ; B = (d1', m', n', d2')_{LR} :$$

$$A + B = (d1 + d1', m + m', n + n', d2 + d2')_{LR}$$

$$A - B = (d1 - d1', m - m', n + n', d2 + d2')_{LR}$$

$$\forall v \in \mathcal{R} ; vA = (vd1, vm, vn, vd2)_{LR}$$



Números difusos

* Comparaciones con números difusos

- El problema es complejo cuando los números se solapan.

Dos enfoques básicos

A) Métodos crisp, deciden cuando un número es mayor(menor) que otro. Se basan en una "función ordenadora": $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\forall A, B \in \mathcal{D} \quad A \geq B \iff f(A) \geq f(B)$$

B) Métodos difusos, generan relaciones difusas orden en el conjunto \mathcal{D} .

$$\forall A, B \in \mathcal{D} ; \mu_{\geq}(A, B) = g(A| \geq B)$$

donde $g(A| \geq B)$ es la medida del difuso A con respecto al difuso que representa la propiedad imprecisa "ser mayor que B".

Concepto de etiqueta lingüística

●Definicion:

$\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ conjunto de etiquetas lingüísticas:
valoraciones imprecisas de alguna propiedad:

Ejemplos

$\{L_1, \dots, L_n\} = \{\text{Alto, Medio, Bajo}\}$

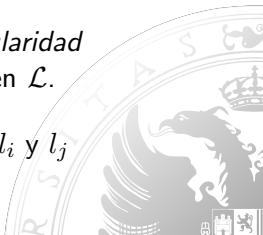
$\{L_1, \dots, L_n\} = \{\text{Muy Bueno, Bueno, Regular, Malo, Muy Malo}\}$

. Los conjuntos de etiquetas definen jerarquías de valores sobre las variable que representan.

. Un problema importante asociado es el de la *Granularidad*

. Siempre existe una relación de semejanza definida en \mathcal{L} .

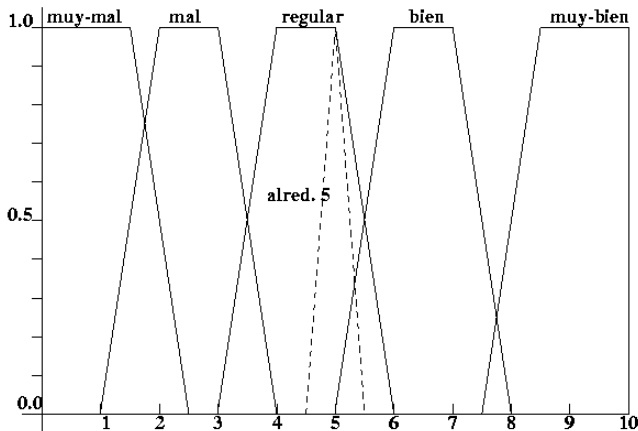
$$\forall l_i, l_j \in \mathcal{L} \quad s_{ij} = \text{grado de parecido entre } l_i \text{ y } l_j$$



Concepto de etiqueta lingüística

Si un conjunto de etiquetas tiene un referencial subyacente, estas poseen **representación semántica** como conjuntos difusos

-Ejemplo



Concepto de etiqueta lingüística:

Conjuntos de etiquetas destacados

- **Valoraciones de certeza:** el referencial es el $[0,1]$

○ Probabilísticas:

$\{L_1, \dots, L_n\} = \{\text{Casi seguro, Muy Probable, Probable, Poco Probable, Improbable}\}$

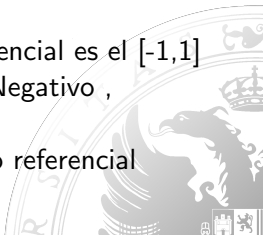
○ Posibilísticas

$\{L_1, \dots, L_n\} = \{\text{Casi seguro, Muy Posible, Posible, Poco Posible, Casi Imposible}\}$

- **Valoraciones asociadas al control difuso:** el referencial es el $[-1,1]$

○ $\{L_1, \dots, L_n\} = \{\text{Positivo alto, Positivo, Nulo, Negativo, Negativo bajo}\}$

- **Cuantificadores:** tienen conjuntos numéricos como referencial



Concepto de etiqueta lingüística:

- ★ **Variable lingüística** Variable que toma valores lingüísticos valorados en un referencial numérico
- ★ **Problemas asociados al trabajo con etiquetas**
 - Obtención de las etiquetas asociadas a una variable de un problema (Control difuso)
 - Análisis de la granularidad en la representación de la información mediante etiquetas: (bases de datos, decisión)
 - Operaciones con etiquetas: sumas, agregaciones etc...(decisión, optimización, bases de datos etc..)

Las etiquetas son la base de la Computación con Palabras o "Soft Computing" en sentido estricto

